

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις Ερωτήσεων Τράπεζας Θεμάτων

Μετατόπιση – Ταχύτητα – Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

1. (7970, B1) Οι ευθύγραμμοι διάδρομοι κολύμβησης σε μια πισίνα ολυμπιακών διαστάσεων έχουν μήκος ίσο με 50 m.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Σε έναν αγώνα κολύμβησης των 200 m, η ολική μετατόπιση του κολυμβητή είναι ίση με:

α) 200 m

β) 500 m

γ) μηδέν

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Όταν ο κολυμβητής επιστρέφει για 1η φορά στην αφετηρία έχει διανύσει απόσταση $2 \times 50 \text{ m} = 100 \text{ m}$.

Επομένως, κατά τον τερματισμό του αγώνα των 200 m βρίσκεται πάλι στην αφετηρία, άρα :

$$x_{\text{τελ}} = x_{\text{αρχ}}.$$

Η ολική μετατόπιση (αλγεβρική τιμή) του κολυμβητή είναι :

$$\Delta x = x_{\text{τελ}} - x_{\text{αρχ}} = 0.$$

2. (7978, B1) Το μέτρο της ταχύτητας αθλητή των 100 m είναι ίσο με $v_A = 36 \text{ km/h}$ και το μέτρο της ταχύτητας ενός σαλιγκαριού είναι ίσο με $v_\Sigma = 1 \text{ cm/s}$.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Το πηλίκο των μέτρων των ταχυτήτων του αθλητή και του σαλιγκαριού $\frac{v_A}{v_\Sigma}$, είναι ίσο με:

α) 100

β) 1000

γ) 36

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Υπολογίζω τα μέτρα των ταχυτήτων σε μονάδες S.I.

$$v_A = 36 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 36 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_\Sigma = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το πηλίκο των μέτρων των ταχυτήτων είναι : $\frac{v_A}{v_\Sigma} = \frac{10}{10^{-2}} = 10^3 = 1000$.

3. (7991, B1) Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι ίση με 340 m/s.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Αν βρίσκεστε 1190 m μακριά από σημείο που ξεσπά κεραυνός, θα ακούσετε τη βροντή που τον ακολουθεί:

α) μετά από 3 s

β) μετά από 3,5 s

γ) μετά από 4 s

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο ήχος διαδίδεται στον αέρα με σταθερή ταχύτητα $v_{\eta\chi}$.

Το χρονικό διάστημα Δt που μεσολαβεί ώστε να διανύσει ο ήχος την απόσταση s από το σημείο που ξεσπά ο κεραυνός μέχρι τον παρατηρητή, είναι :

$$\Delta t = \frac{s}{v_{\eta\chi}} = \frac{1190 \text{ m}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3,5 \text{ s}.$$

Επισημάνση

Δεχόμαστε ότι :

α) η βροντή συμβαίνει ταυτόχρονα με τον κεραυνό και η διάρκεια κάθε φαινομένου είναι ασήμαντη.

β) το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη στιγμή που ξεσπά ο κεραυνός μέχρι να δει τη λάμψη (φως) ο παρατηρητής είναι μηδαμινό (λόγω της τεράστιας ταχύτητας του φωτός).

4. (8001, B1) Ένα κινητό που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ ενός οριζόντιου άξονα $x'x$.

A) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Χρονική στιγμή $t \text{ (s)}$	Ταχύτητα $v \text{ (m/s)}$	Θέση $x \text{ (m)}$
5		
10		20
15		

Μονάδες 5

B) Να γίνει η γραφική παράσταση θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες για το παραπάνω κινητό. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η κλίση της ευθείας της γραφικής παράστασης, και να συγκριθεί με την τιμή του μεγέθους του πίνακα του ερωτήματος (A) στο οποίο αντιστοιχεί.

Μονάδες 7

Απάντηση

A) Η εξίσωση της θέσης στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι : $x = x_0 + v(t - t_0)$.

Αφού $t_0 = 0$ και $x_0 = 0$, προκύπτει η εξίσωση : $x = vt$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 10 \text{ s} \\ x = 20 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow v = \frac{x}{t} = \frac{20 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$t = 5 \text{ s} \Rightarrow x = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (5 \text{ s}) = 10 \text{ m}.$$

$$t = 15 \text{ s} \Rightarrow x = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (15 \text{ s}) = 30 \text{ m}.$$

B) Το διάγραμμα $x - t$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

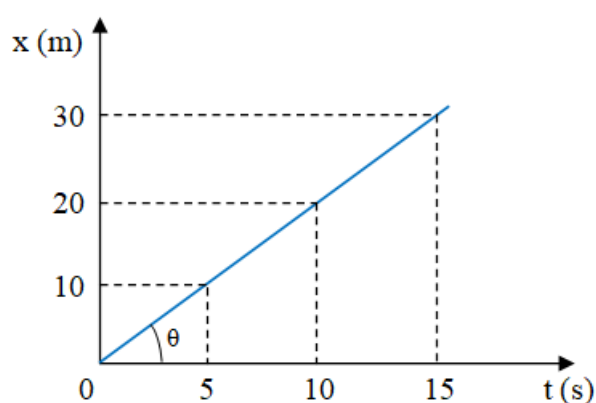
Η κλίση του διαγράμματος είναι :

$$\epsilon\phi\theta = \frac{10 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γνωρίζω ότι η κλίση του διαγράμματος $x - t$ είναι ίση (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) τιμή της ταχύτητας.

Διαπιστώνω ότι αυτό ισχύει, δηλαδή :

$$\epsilon\phi\theta = v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

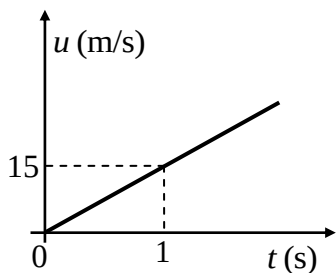


5. (8035, B2) Η θέση ενός σώματος, που κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος ενός προσανατολισμένου άξονα $x'x$, δίνεται σε κάθε χρονική στιγμή από την εξίσωση $x = 10 + 5t$ (x σε m, t σε s).

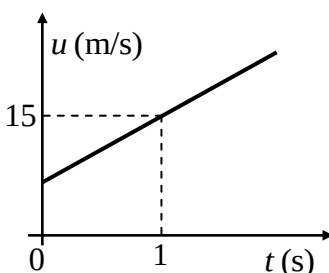
A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει σωστά την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο;

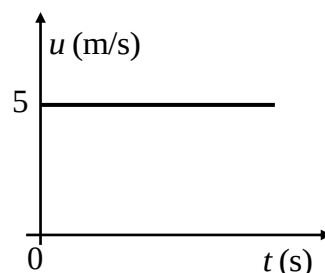
α)



β)



γ)



Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Η εξίσωση $x = 10 + 5t$ (S.I.) περιγράφει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, άρα η ταχύτητα είναι σταθερή.

Η εξίσωση της κίνησης με σύμβολα είναι: $x = x_0 + vt$.

1ος τρόπος

Με αντιστοίχιση των μεγεθών των δύο σχέσεων βρίσκουμε ότι: $x_0 = 10 \text{ m}$ και $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Επομένως, το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (αλγεβρική τιμή).

Το σωστό διάγραμμα είναι το γ).

2ος τρόπος

Σε δύο χρονικές στιγμές t_1, t_2 , οι θέσεις του κινητού θα είναι αντίστοιχα :

$$x_1 = 10 + 5t_1, \quad x_2 = 10 + 5t_2. \quad (\text{S.I.})$$

Στη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1$ η μετατόπιση του κινητού έχει τιμή :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (10 + 5t_2) - (10 + 5t_1) = 10 + 5t_2 - 10 - 5t_1 = 5(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta x = 5(\Delta t). \quad (\text{S.I.})$$

Υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5(\Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το σωστό διάγραμμα είναι το γ).

6. (13269, 2.1) Σημειακό αντικείμενο κινείται ευθύγραμμα και σε δύο οποιαδήποτε, ίσα μεταξύ τους, χρονικά διαστήματα Δt διανύει ίσα διαστήματα S .

A. Το παραπάνω δεδομένο μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η κίνηση του σημειακού αντικειμένου είναι ευθύγραμμη ομαλή;

α) ΝΑΙ

β) ΟΧΙ

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το αντικείμενο κινείται ευθύγραμμα, άρα η ταχύτητα έχει σταθερή διεύθυνση.

Σε ίσες χρονικές διάρκειες Δt το κινητό διανύει ίσα διαστήματα S , άρα η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο.

Αφού η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο και διεύθυνση, τότε και η φορά της είναι σταθερή, άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Παρατήρηση:

Όταν ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα, για να αλλάξει η φορά της ταχύτητας πρέπει να αποκτήσει επιβράδυνση. Η επιβράδυνση όμως θα μεταβάλλει και το μέτρο της ταχύτητας του σώματος.

Αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό άρα δεν υπάρχει επιβράδυνση, επομένως και η φορά της ταχύτητας είναι σταθερή.

Δεν είναι δυνατό να αλλάξει η φορά της ταχύτητας, χωρίς να μεταβληθεί το μέτρο της.

7. (13346, B1) Ένα σημειακό αντικείμενο κινείται ευθύγραμμα. Ορίσαμε άξονα $x'Ox$ στην ευθεία της κίνησης και με τη βοήθεια ενός χρονομέτρου δημιουργήσαμε ένα σύστημα αναφοράς για την καταγραφή της.

Ως προς το σύστημα αναφοράς που δημιουργήσαμε, δίνεται ο διπλάνος πίνακας, σε κάθε οριζόντια γραμμή του οποίου καταγράφονται: η θέση (x) και η μετατόπιση (Δx) του κινητού, σε αντίστοιχες χρονικές στιγμές (t).

x (m)	Δx (m)	t (s)
	0	0
-2	4	2
0		4
	10	6
8		8

A) Να συμπληρώσετε τις τιμές που λείπουν.

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στον πίνακα δίνονται οι τιμές της μετατόπισης Δx τις χρονικές στιγμές : 0 s, 2 s, 6 s και ζητούνται οι τιμές της τις χρονικές στιγμές 4 s, 8 s.

Όμως, η μετατόπιση αναφέρεται πάντοτε σε ορισμένη χρονική διάρκεια και όχι σε ορισμένη χρονική στιγμή.

Κατά συνέπεια, ο πίνακας έχει λάθος δεδομένα και επομένως η ερώτηση δεν μπορεί να απαντηθεί.

8. (13623, 2.1) Δύο σημειακά κινητά Α και Β κινούνται ευθύγραμμα. Από τα διαγράμματα θέσης - χρόνου 1 και 2, ένα αντιστοιχεί στο σημειακό κινητό Α και ένα στο σημειακό κινητό Β. Από τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου 3 και 4, ένα αντιστοιχεί στο σημειακό κινητό Α και ένα στο σημειακό κινητό Β.

Α. Αν στο σημειακό κινητό Α αντιστοιχεί το διάγραμμα θέσης - χρόνου 1, τότε, στο ίδιο κινητό, θα αντιστοιχεί το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου:

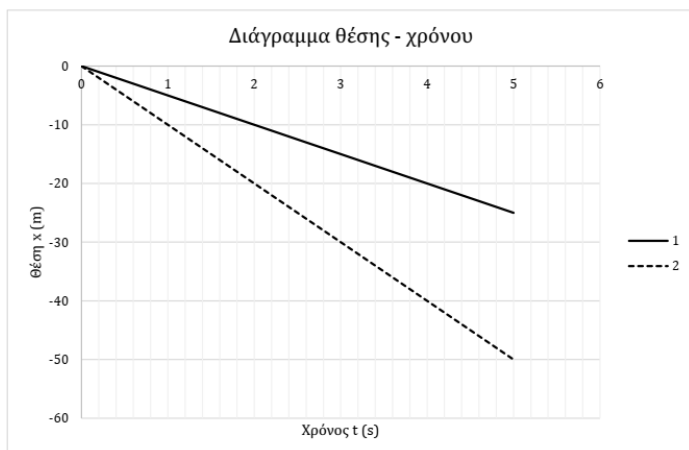
α) 3

β) 4

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Τα δύο κινητά εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση προς την αρνητική φορά.

1ος τρόπος

Από την κλίση του διαγράμματος $x - t$ υπολογίζεται το μέτρο της ταχύτητας.*

Αφού το διάγραμμα 1 έχει τη μικρότερη κλίση, άρα η ταχύτητα του κινητού Α έχει μικρότερο **μέτρο** από του Β. Επομένως το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για το κινητό Α είναι το 3.

2ος τρόπος

Η εξίσωση της θέσης κάθε κινητού είναι : $x = vt$.

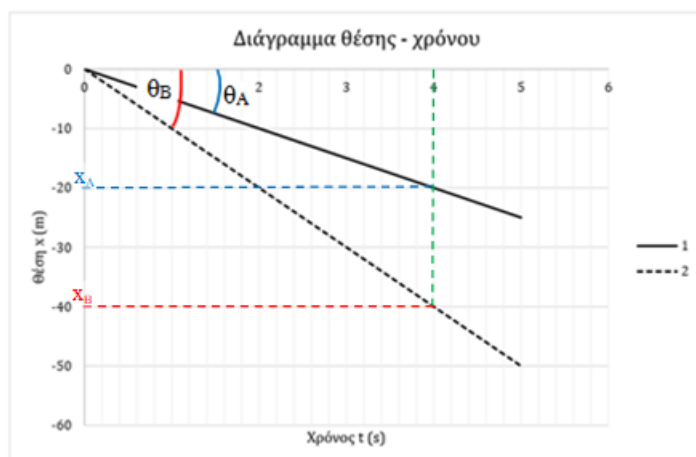
Από το διάγραμμα $x - t$ φαίνεται ότι σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει : $x_A > x_B \Leftrightarrow v_A t > v_B t \Leftrightarrow v_A > v_B$ (αλγεβρικές τιμές).

Επομένως το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για το κινητό Α είναι το 3.

* Για τον υπολογισμό της κλίσης χρησιμοποιήθηκαν οι οξείες γωνίες θ_A , θ_B .

Το **μέτρο** της ταχύτητας κάθε κινητού είναι ίσο με την εφαπτομένη της οξείας γωνίας θ :
 $|v_A| = \varepsilon\phi\theta_A$, $|v_B| = \varepsilon\phi\theta_B$.

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι ίση με την εφαπτομένη της μη κυρτής γωνίας $360^\circ - \theta$:
 $v_A = \varepsilon\phi(360^\circ - \theta_A)$, $v_B = \varepsilon\phi(360^\circ - \theta_B)$.



9. (14202, 2.1) Τα διαγράμματα θέσης – χρόνου για τα κινητά 1 και 2 δίνονται παρακάτω.

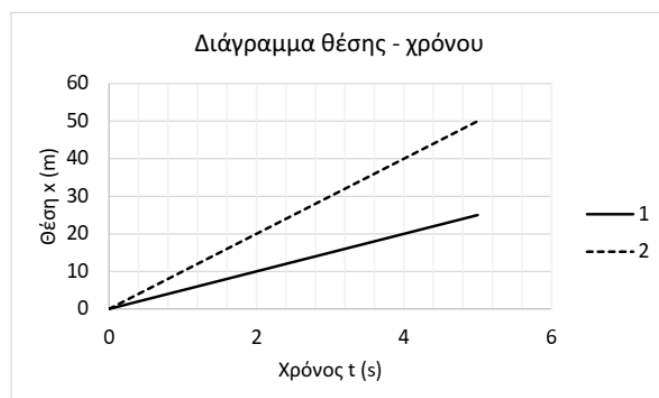
A. Για τα μέτρα των σταθερών τους ταχυτήτων $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ αντίστοιχα ισχύει:

α) $v_1 = v_2$, β) $v_1 > v_2$, γ) $v_1 < v_2$.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

1ος τρόπος

Στο διάγραμμα θέσης – χρόνου (x – t) η κλίση της ευθείας είναι ίση (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) τιμή της ταχύτητας.

Αφού το διάγραμμα 1 έχει μικρότερη κλίση, επομένως το κινητό 1 έχει μικρότερη ταχύτητα : $v_1 < v_2$.

2ος τρόπος

Τα δύο κινητά εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, με εξίσωση : $x = v t$.

Από το διάγραμμα x – t φαίνεται ότι σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει : $x_1 < x_2 \Leftrightarrow v_1 t < v_2 t \Leftrightarrow v_1 < v_2$.

10. (14203, 2.1) Δύο σημειακά κινητά Α και Β κινούνται ευθύγραμμα. Από τα διαγράμματα θέσης - χρόνου 1 και 2, ένα αντιστοιχεί στο σημειακό κινητό Α και ένα στο σημειακό κινητό Β. Από τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου 3 και 4, ένα αντιστοιχεί στο σημειακό κινητό Α και ένα στο σημειακό κινητό Β.

A. Αν στο σημειακό κινητό Α αντιστοιχεί το διάγραμμα θέσης - χρόνου 1, τότε, στο ίδιο κινητό θα αντιστοιχεί το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου:

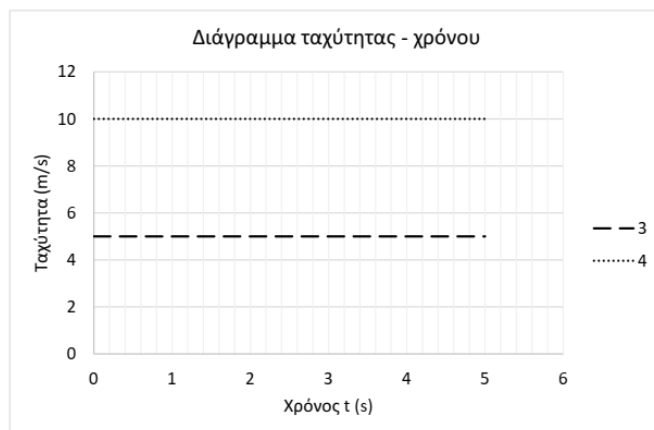
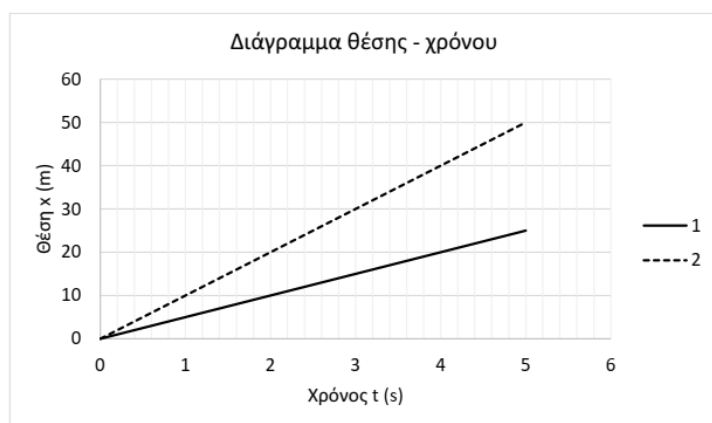
α) 3

β) 4

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Τα δύο κινητά εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση προς τη θετική φορά του άξονα x .

1ος τρόπος

Στο διάγραμμα $x - t$ η κλίση είναι ίση (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) τιμή της ταχύτητας.

Το διάγραμμα $x - t$ για το κινητό Α (διάγραμμα 1) έχει μικρότερη κλίση από του Β (διάγραμμα 2), άρα η ταχύτητα του Α έχει μικρότερη τιμή από του Β : $v_A < v_B$.

Επομένως, το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για το κινητό Α είναι το 3.

2ος τρόπος

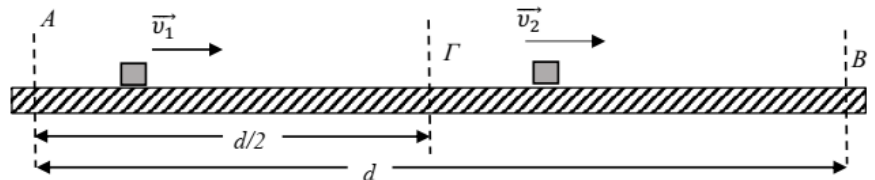
Η εξίσωση της θέσης κάθε κινητού είναι: $x = vt$.

Από το διάγραμμα $x - t$ φαίνεται ότι σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει : $x_A < x_B \Leftrightarrow v_A t < v_B t \Leftrightarrow v_A < v_B$.

Επομένως το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για το κινητό Α είναι το 3.

11. (13769, 2.2) Στους κυλιόμενους διαδρόμους που μεταφέρουν τις βαλίτσες, από το αεροπλάνο στο χώρο παραλαβής των αποσκευών, στο αεροδρόμιο «Ελευθέριος Βενιζέλος» υπάρχει η δυνατότητα αυτοματοποιημένης επιλογής της ταχύτητας τους. Έστω ότι στο ευθύγραμμο και οριζόντιο τμήμα $(AB) = d$ όπως αυτό του σχήματος παρατηρείτε την κίνηση μιας βαλίτσας.

Κάποια χρονική στιγμή, η βαλίτσα διέρχεται από το σημείο Α με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_1 , ενώ όταν διέρχεται από το σημείο Γ το μέτρο της ταχύτητάς της διπλασιάζεται ακαριαία (σε ελάχιστο χρόνο μέσω του μηχανισμού αυτόματης επιλογής ταχύτητας) σε $v_2 = 2 \cdot v_1$ και διατηρείται σταθερό, έως ότου η βαλίτσα να διέλθει από το σημείο Β.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν το σημείο Γ απέχει $d/2$ από το σημείο Α, για τη μέση ταχύτητα της βαλίτσας στη διαδρομή της από το Α στο Β ισχύει:

α) $v_\mu = \frac{3}{2} \cdot v_1$, β) $v_\mu = \frac{4}{3} \cdot v_1$, γ) $v_\mu = \frac{3}{4} \cdot v_1$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Διαδρομή Α → Γ

Η βαλίτσα διανύει την απόσταση $s_1 = \frac{d}{2}$ σε χρονική διάρκεια Δt_1 με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_1 .

$$\text{Ισχύει : } s_1 = v_1 \Delta t_1 \Leftrightarrow \Delta t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{d}{2}}{v_1} \Leftrightarrow \Delta t_1 = \frac{d}{2v_1}. \quad (1)$$

Διαδρομή Γ → Β

Η βαλίτσα διανύει την απόσταση $s_2 = \frac{d}{2}$ σε χρονική διάρκεια Δt_2 με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_2 .

$$\text{Ισχύει : } s_2 = v_2 \Delta t_2 \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{s_2}{v_2} \xrightarrow{v_2=2v_1} \Delta t_2 = \frac{\frac{d}{2}}{2v_1} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{d}{4v_1}. \quad (2)$$

Η συνολική απόσταση που διάνυσε η βαλίτσα είναι $s_{\text{ολ}} = s_1 + s_2 = d$ και η συνολική χρονική διάρκεια είναι $\Delta t_{\text{ολ}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 \xrightarrow{(1),(2)} \Delta t_{\text{ολ}} = \frac{d}{2v_1} + \frac{d}{4v_1} \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ}} = \frac{3d}{4v_1}. \quad (3)$

Η μέση ταχύτητα της βαλίτσας για τη διαδρομή Α → Β είναι :

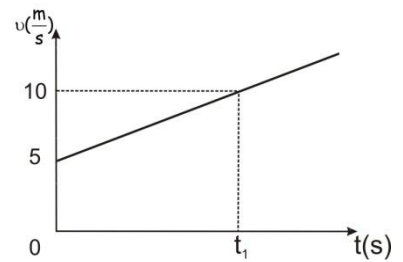
$$v_\mu = \frac{s_{\text{ολ}}}{\Delta t_{\text{ολ}}} = \frac{d}{\frac{3d}{4v_1}} \Leftrightarrow v_\mu = \frac{4}{3} v_1.$$

Επιταχυνόμενη κίνηση

12. (7971, 2.1) Στη διπλανή εικόνα παριστάνεται το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Από το διάγραμμα αυτό, προσδιορίζουμε:

- α) την επιτάχυνση και τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή t_1 .
- β) μόνο την επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_1 .
- γ) μόνο τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή t_1 .



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Από το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου μπορούμε να υπολογίσουμε :

α) την (αλγεβρική) τιμή της επιτάχυνσης α , μέσω της σχέσης : $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Με αντικατάσταση των τιμών του διαγράμματος προκύπτει η σχέση : $\alpha = \frac{5}{t_1}$. (S.I.)

β) την (αλγεβρική) τιμή της μετατόπισης Δx_1 κατά τη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$, μέσω του εμβαδού του τραπεζίου που σχηματίζεται : $\Delta x_1 = E_{\text{τραπ}} = \frac{(10+5)}{2} t_1 \Rightarrow \Delta x_1 = 7,5 t_1$.

Όμως, στο διάγραμμα του σχήματος δεν δίνεται η χρονική στιγμή t_1 , άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ούτε την επιτάχυνση ούτε τη μετατόπιση Δx_1 και επομένως ούτε και τη θέση x_1 τη χρονική στιγμή t_1 .

Η ερώτηση είναι λανθασμένη γιατί καμία από τις απαντήσεις που δίνονται δεν είναι σωστή.

13. (7974, B1) Ένα όχημα είναι αρχικά ακίνητο και τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζει να κινείται εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

A) Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα:

Χρονική στιγμή t (s)	Ταχύτητα v (m/s)	Διάστημα s (m)
0	0	0
1	4	
		8
	16	

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε τις τιμές των μεγεθών που συμπληρώσατε

Μονάδες 8

Απάντηση

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα ($v_0 = 0$), προς τη θετική φορά ($v > 0$, $a > 0$).

Οι εξισώσεις κίνησης είναι : $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$.

$$\left. \begin{array}{l} t = 1s \\ v = 4 \frac{m}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}.$$

Επομένως, οι εξισώσεις γράφονται : $v = 4t$, $s = 2t^2$. (S.I.)

$$t = 1s \Rightarrow s = 2 \cdot 1^2 m = 2m.$$

$$\left. \begin{array}{l} s = 8m \Rightarrow 2t^2 = 8 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = 2s. \\ \text{Για } t = 2s \Rightarrow v = 8m/s. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} v = 16m/s \Rightarrow 16 = 4t \Leftrightarrow t = 4s. \\ s = 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot 16m \Rightarrow s = 32m. \end{array} \right\}$$

14. (7975, B1) Μοτοσυκλετιστής βρίσκεται ακίνητος σε ένα σημείο Α. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ξεκινά και κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν ο μοτοσυκλετιστής βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_1 σε απόσταση 10 m από το σημείο Α, τότε τη χρονική στιγμή $2t_1$ θα βρίσκεται σε απόσταση από το Α ίση με:

α) 20 m

β) 40 m

γ) 80 m

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το διάστημα που διανύει ο μοτοσυκλετιστής σε χρόνο t υπολογίζεται από τη σχέση : $s = \frac{1}{2} \alpha t^2$

(α : το μέτρο της επιτάχυνσης).

$$\text{Για } t = t_1 : s_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \quad (1)$$

$$\text{Για } t = 2t_1 : s_2 = \frac{1}{2} \alpha (2t_1)^2 \Rightarrow s_2 = \frac{1}{2} \alpha \cdot 4t_1^2 \xrightarrow{(1)} s_2 = 4s_1.$$

Αφού $s_1 = 10$ m, άρα : $s_2 = 4 \cdot 10$ m = 40 m.

15. (7976, B2) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου για δύο οχήματα Α και Β, που κινούνται ευθύγραμμα.

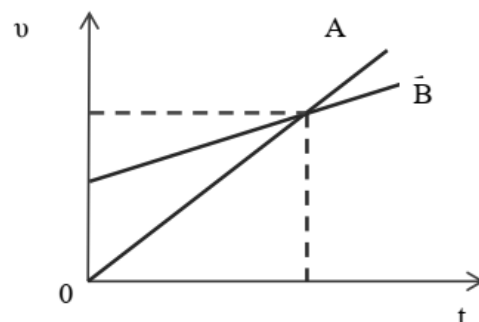
A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση
Για τα μέτρα των επιταχύνσεων των δύο οχημάτων ισχύει :

- α)** Μεγαλύτερη επιτάχυνση έχει το όχημα (Α)
- β)** Τα δύο οχήματα έχουν την ίδια επιτάχυνση
- γ)** Μεγαλύτερη επιτάχυνση έχει το όχημα (Β)

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας .

Μονάδες 9



Απάντηση

1ος τρόπος

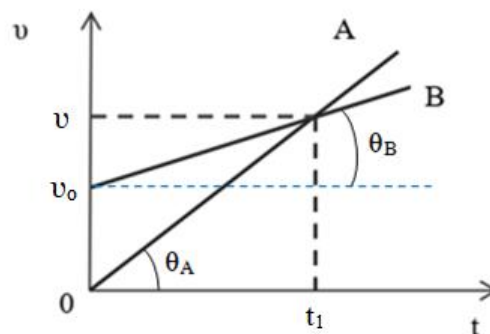
Η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα $v - t$ είναι ίση (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) τιμή της επιτάχυνσης.

Το διάγραμμα Α έχει μεγαλύτερη κλίση από το Β ($\theta_A > \theta_B$) άρα η επιτάχυνση του Α έχει μεγαλύτερη τιμή από του Β.

2ος τρόπος

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης.

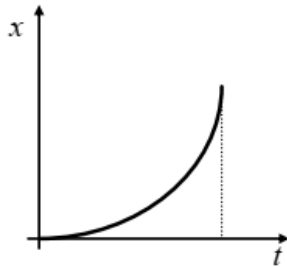
$$\left. \begin{aligned} \alpha_A &= \frac{v-0}{t_1-0} \Rightarrow \alpha_A = \frac{v}{t_1} \\ \alpha_B &= \frac{v-v_0}{t_1-0} \Rightarrow \alpha_B = \frac{v-v_0}{t_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_A > \alpha_B.$$



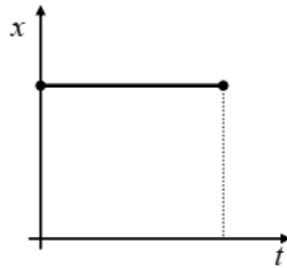
16. (7979, B1) Στα παρακάτω διαγράμματα παριστάνεται η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα σε συνάρτηση με τον χρόνο.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

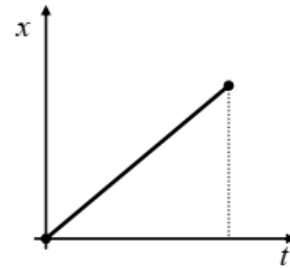
Από τα διαγράμματα αυτά εκείνο που αντιστοιχεί σε ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s το κινητό βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ m, είναι το διάγραμμα:



(α)



(β)



(γ)

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

Το διάγραμμα (β) αντιστοιχεί σε ακινησία ($x = \text{σταθ.}$), ενώ το διάγραμμα (γ) αντιστοιχεί σε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, αφού είναι πλάγια ημιευθεία και επομένως έχει σταθερή κλίση (άρα η ταχύτητα έχει σταθερή τιμή).

Στο διάγραμμα (α) αυξάνεται η κλίση με την πάροδο του χρόνου, άρα αυξάνεται και το μέτρο της ταχύτητας. Δηλαδή, το διάγραμμα (α) περιγράφει (ευθύγραμμη) επιταχυνόμενη κίνηση.

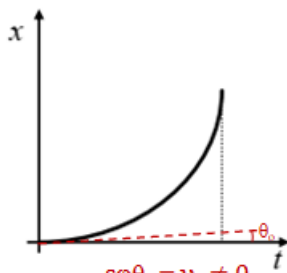
Δεν γνωρίζουμε όμως αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x_0 = 0$ (δεν έχει σημειωθεί το μηδέν στην αρχή των αξόνων).

Δεν μπορούμε να πούμε ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, γιατί δεν γνωρίζουμε αν η καμπύλη είναι παραβολή.

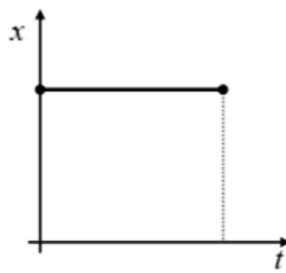
Επίσης, στην αρχή των αξόνων ($t = 0$;) ο άξονας του χρόνου δεν εφάπτεται στην καμπύλη, άρα το κινητό έχει αρχική ταχύτητα ($v_0 \neq 0$).

Επομένως, το διάγραμμα (α) δεν αντιστοιχεί σε ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα αλλά σε ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα.

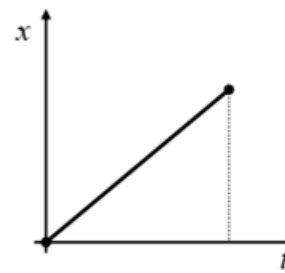
Δηλαδή καμία από τις απαντήσεις δεν είναι σωστή, άρα η ερώτηση είναι λανθασμένη.



(α)



(β)



(γ)

17. (7989, B1) Ένα κινητό διέρχεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από τη θέση $x_0 = 0$ ενός προσανατολισμένου άξονα Ox , κινούμενο κατά μήκος του άξονα και προς τη θετική του φορά.

Η εξίσωση της θέσης του κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο είναι της μορφής, $x = 5t + 2t^2$ (S.I.).

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Το μέτρο της ταχύτητας του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 5$ s, είναι ίσο με:

α) 5 m/s

β) 25 m/s

γ) 10 m/s

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Η σχέση $x = 5t + 2t^2$ (S.I.) περιγράφει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με εξίσωση θέσης :
 $x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$.

Με αντιστοίχιση των μεγεθών βρίσκουμε ότι : $v_0 = 5$ m/s και $\frac{1}{2} \alpha = 2$ m/s² $\Leftrightarrow \alpha = 4$ m/s².

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι : $v = v_0 + \alpha t \Rightarrow v = 5 + 4t$ (S.I.)

Για $t = 5$ s : $v = 5 + 4 \cdot 5 = 25$ m/s.

18. (7995, B1) Πέτρα μάζας m , εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα με επιτάχυνση μέτρου a .

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η θέση της πέτρας τη χρονική στιγμή t είναι:

α) $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

β) $a \cdot t$

γ) $m \cdot a$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Όταν η κίνηση εξελίσσεται στον άξονα $x'x$, ο ρυθμός μεταβολής της θέσης x (αλγεβρικά) τη χρονική στιγμή t είναι ίσος με την αλγεβρική τιμή v της ταχύτητας την ίδια χρονική στιγμή : $\frac{dx}{dt} = v$.

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από τη σχέση : $v = at$.

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της θέσης τη χρονική στιγμή t , είναι :

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = |v| = |a|t \quad \text{ή} \quad \left| \frac{dx}{dt} \right| = at, \quad \text{όπου } a \text{ το μέτρο της επιτάχυνσης.}$$

Σωστή απάντηση : β).

Σχόλιο

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι η κίνηση εξελίσσεται στον άξονα $x'x$ και ότι ζητά **το μέτρο** του ρυθμού μεταβολής της θέσης x .

19. (7982, B2) Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση ίση με a και τη χρονική στιγμή $t = 0$ s έχει ταχύτητα ίση με v_0 . Μετά από χρόνο t έχει διανύσει διάστημα s και η ταχύτητά του είναι ίση με v .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η ταχύτητα v του κινητού μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

(α) $v^2 = v_0^2 + 2a \cdot s$ (β) $v^2 = v_0^2 + a \cdot s$ (γ) $v^2 = v_0^2 + 4a \cdot s$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Γράφω την εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και την επιλύω ως προς t :

$$v = v_0 + at \Leftrightarrow v - v_0 = at \Leftrightarrow t = \frac{v - v_0}{a}. \quad (1)$$

Αντικαθιστώ το t από τη σχέση (1) στην εξίσωση της μετατόπισης:

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \xrightarrow{(1)} \Delta x = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Delta x = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει: } s = |\Delta x| \xrightarrow{(2)} s = \frac{v^2 - v_0^2}{2|a|} \Leftrightarrow v^2 - v_0^2 = 2|a|s \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 + 2|a|s.$$

Αν το σώμα κινείται προς τη θετική φορά ή αν a είναι το μέτρο της επιτάχυνσης, τότε η σχέση γράφεται: $v^2 = v_0^2 + 2as$.

Σχόλιο: Η εκφώνηση έπρεπε να διευκρινίζει αν το σώμα κινείται προς τη θετική φορά και αν τα σύμβολα v_0 , v , a είναι τα μέτρα ή οι αλγεβρικές τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Η σχέση $v^2 = v_0^2 + 2as$ ισχύει με την προϋπόθεση ότι το σώμα κινείται προς τη θετική φορά ή εφ' όσον το σύμβολο a εκφράζει το μέτρο της επιτάχυνσης.

Η γενικότερη σχέση είναι: $v^2 = v_0^2 + 2|a|s$.

20. (7984, B1) Δύο κιβώτια A και B κινούνται ευθύγραμμα. Η τιμή της ταχύτητάς τους μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για τα μέτρα α_A και α_B των επιταχύνσεων των κιβωτίων A και B αντίστοιχα, ισχύει:

(α) $\alpha_A = \alpha_B$

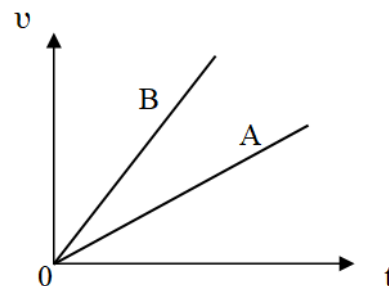
(β) $\alpha_A > \alpha_B$

(γ) $\alpha_A < \alpha_B$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

1ος τρόπος

Στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου, η κλίση της ευθείας είναι ίση (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) τιμή της επιτάχυνσης.

Το διάγραμμα B έχει μεγαλύτερη κλίση από το A, άρα η επιτάχυνση του B είναι μεγαλύτερη από του A : $\alpha_B > \alpha_A$.

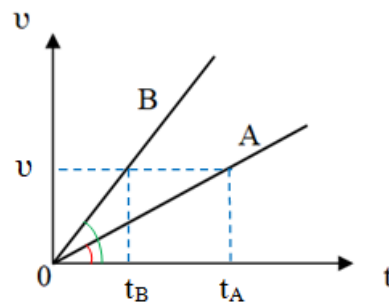
2ος τρόπος

Έστω t_A , t_B οι χρονικές στιγμές που τα κινητά έχουν την ίδια ταχύτητα v . Ισχύουν οι σχέσεις :

$$\alpha_A = \frac{v-0}{t_A-0} \Rightarrow \alpha_A = \frac{v}{t_A}$$

$$\alpha_B = \frac{v-0}{t_B-0} \Rightarrow \alpha_B = \frac{v}{t_B}$$

Αφού $t_B < t_A$ άρα $\alpha_B > \alpha_A$.



21. (8003, B2) Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου a και αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 .

A) Από τις παρακάτω τρεις επιλογές να επιλέξετε αυτήν που θεωρείτε σωστή.

Όταν το κινητό αποκτήσει τριπλάσια ταχύτητα της αρχικής θα έχει διανύσει διάστημα ίσο με:

α) $\frac{2v_0^2}{a}$

β) $\frac{4v_0^2}{a}$

γ) $\frac{v_0^2}{2a}$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, η εξίσωση της ταχύτητας είναι : $v = v_0 + at$.

Αντικαθιστώ $v = 3v_0$ και την επιλύω ως προς t :

$$v = v_0 + at \xrightarrow{v=3v_0} 3v_0 = v_0 + at \Leftrightarrow 2v_0 = at \Leftrightarrow t = \frac{2v_0}{a}. \quad (1)$$

Το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στο χρόνο t δίνεται από τη σχέση :

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \xrightarrow{(1)} s = v_0 \frac{2v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{2v_0}{a} \right)^2 = \frac{2v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \cdot \frac{4v_0^2}{a^2} \Leftrightarrow s = \frac{2v_0^2}{a} + \frac{2v_0^2}{a} \Leftrightarrow s = \frac{4v_0^2}{a}.$$

22. (8008, B1) Δύο κινητά Α και Β κινούνται ευθύγραμμα. Η τιμή της ταχύτητάς τους μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

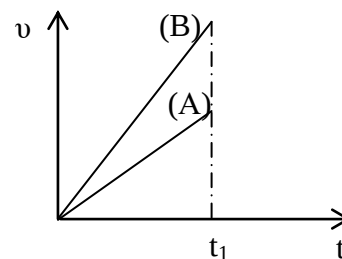
Για τα μέτρα Δx_A και Δx_B των μετατοπίσεων των δυο κινητών Α και Β αντίστοιχα, για το χρονικό διάστημα από 0 έως t_1 ισχύει:

α) $\Delta x_A = \Delta x_B$ **β)** $\Delta x_A > \Delta x_B$ **γ)** $\Delta x_A < \Delta x_B$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8



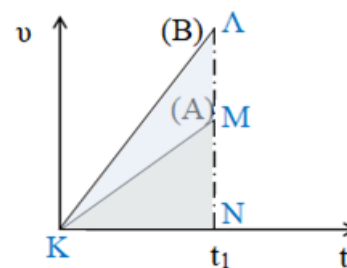
Απάντηση

Το εμβαδό στο διάγραμμα $v - t$ είναι ίσο (αριθμητικά) με την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx , άρα :

$$\Delta x_A = E_{KMN}$$

$$\Delta x_B = E_{K\Lambda N}$$

$$\text{Ισχύει : } E_{KMN} < E_{K\Lambda N} \Rightarrow \Delta x_A < \Delta x_B.$$



23. (8023, B2) Ένα σώμα είναι ακίνητο στη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $a = 2 \text{ m/s}^2$.

A) Να συμπληρώσετε τις τιμές των μεγεθών που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα.

Χρονική στιγμή $t \text{ (s)}$	Επιτάχυνση $a \text{ (m/s}^2\text{)}$	Ταχύτητα $v \text{ (m/s)}$	Θέση $x \text{ (m)}$
0	2		
2	2		
4	2		
6	2		

Μονάδες 5

B) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 6 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Γ) Να εξετάσετε, ποιο από τα μεγέθη του παραπάνω πίνακα, ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης.

Μονάδες 3

Απάντηση

A) Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα ($v_0 = 0$, $x_0 = 0$).

Οι εξισώσεις κίνησης είναι : $v = at$, $x = \frac{1}{2}at^2$.

Αφού $a = 2 \text{ m/s}^2$, οι εξισώσεις γράφονται : $v = 2t$, $s = t^2$. (S.I.)

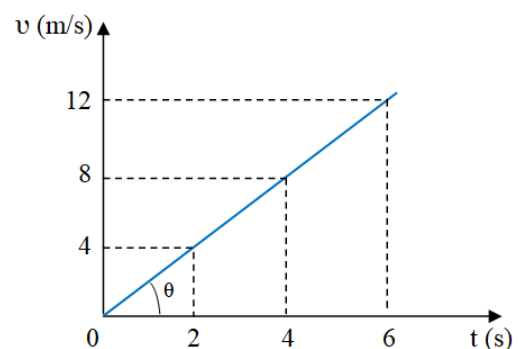
Για $t = 2 \text{ s} \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$, $x = 4 \text{ m}$.

Για $t = 4 \text{ s} \Rightarrow v = 8 \text{ m/s}$, $x = 16 \text{ m}$.

Για $t = 6 \text{ s} \Rightarrow v = 12 \text{ m/s}$, $x = 36 \text{ m}$.

B)

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 6 \text{ s}$ απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



Γ) Επιλέγω το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$ και υπολογίζω την κλίση του διαγράμματος $v - t$:

$$\epsilon_{\theta} = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Άρα, η κλίση του διαγράμματος $v - t$ είναι ίση (αριθμητικά) με την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης :

$$\epsilon_{\theta} = a = 2 \text{ m/s}^2.$$

24. (8024, B2) Ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο στη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $a = 4 \text{ m/s}^2$.

A) Να συμπληρώσετε τις τιμές των μεγεθών που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα.

Χρονική στιγμή $t \text{ (s)}$	Επιτάχυνση $a \text{ (m/s}^2\text{)}$	Ταχύτητα $v \text{ (m/s)}$
0		
2		
4		
6		

Μονάδες 4

B) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 6 \text{ s}$.

Μονάδες 4

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος που περικλείεται μεταξύ του οριζόντιου άξονα t και της γραμμής που παριστάνει την επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα από $0 \rightarrow 6 \text{ s}$, και να εξετάσετε τη μεταβολή ποιού φυσικού μεγέθους εκφράζει το εμβαδό που υπολογίσατε για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 6 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Απάντηση

Η επιτάχυνση είναι σταθερή : $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A) Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη ($v_0 = 0$).

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι : $v = at \Rightarrow v = 4t$. (S.I.)

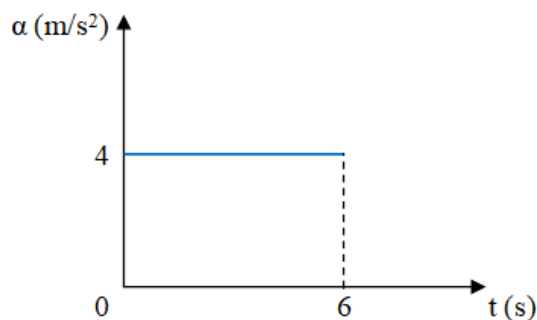
Για $t = 0 \text{ s} \Rightarrow v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Για $t = 2 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 4 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Για $t = 4 \text{ s} \Rightarrow v_4 = 4 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Για $t = 6 \text{ s} \Rightarrow v_6 = 4 \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

B) Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ)

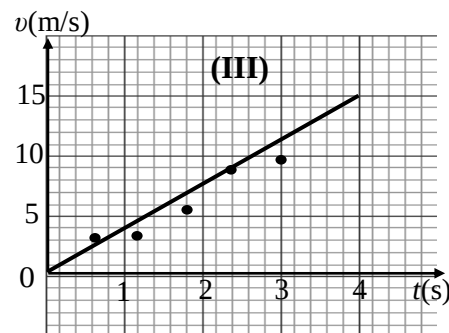
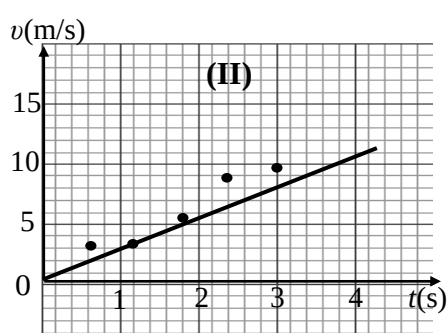
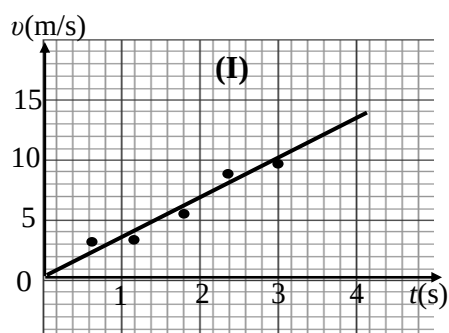
Το εμβαδό του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το διάγραμμα $a - t$, τους άξονες και την κάθετη στον άξονα t τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$, είναι :

$$E_{\text{ορθ.}} = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (6 \text{ s}) = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 6 \text{ s}$ ισχύει : $\Delta v = v_6 - v_0 = v_6 - 0 \Rightarrow \Delta v = v_6 = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Επομένως, στο διάγραμμα $a - t$, το εμβαδό του σχήματος μεταξύ του άξονα t και του διαγράμματος για τη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 6 \text{ s}$ είναι ίσο (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) μεταβολή της ταχύτητας στην ίδια χρονική διάρκεια : $E_{\text{ορθ}} = \Delta v$.

25. (8032, B2) Τρεις μαθητές εργαζόμενοι ομαδικά σε ένα πείραμα μελέτης της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης ενός αμαξιδίου, κατέληξαν σε 5 πειραματικές τιμές ταχύτητας τις οποίες τοποθέτησαν σε βαθμολογημένους άξονες ταχύτητας - χρόνου. Ο καθένας όμως χάραξε την ευθεία σε δικό του διάγραμμα. Τα διαγράμματα των μαθητών φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Η ευθεία έχει χαραχθεί καλύτερα στο διάγραμμα

α) I

β) II

γ) III

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας και στη συνέχεια από αυτό το διάγραμμα να υπολογίσετε την επιτάχυνση του αμαξιδίου.

Μονάδες 9

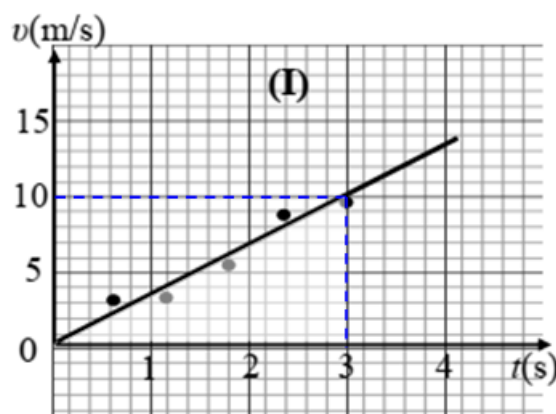
Απάντηση

Αφού τα σημεία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, θα πρέπει η ευθεία να σχεδιαστεί έτσι ώστε να διέρχεται ανάμεσα από αυτά (δηλαδή να έχει τόσα σημεία «από πάνω» όσα έχει και «από κάτω»). Επομένως, καλύτερα έχει σχεδιαστεί η ευθεία στο διάγραμμα I.

Τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$ η τιμή της ταχύτητας είναι : $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι ίση (αριθμητικά) με την κλίση της ευθείας στο διάγραμμα I :

$$\alpha = \varepsilon_{\text{φθ}} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ s}} \Rightarrow \alpha = \frac{10 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}.$$



26. (8034, B2) Ένα αυτοκίνητο είναι αρχικά ακίνητο σε ευθύγραμμο και οριζόντιο δρόμο. Ο οδηγός του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, πατάει το γκάζι οπότε το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση και τη χρονική στιγμή t_1 έχει διανύσει διάστημα S_1 ενώ τη χρονική στιγμή $t_2 = 2 \cdot t_1$, έχει διανύσει διάστημα S_2 .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Τα διαστήματα S_1 και S_2 συνδέονται με τη σχέση

α) $S_2 = S_1$

β) $S_2 = 2 \cdot S_1$

γ) $S_2 = 4 \cdot S_1$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (χωρίς αρχική ταχύτητα).

Η εξίσωση του διαστήματος που διανύει σε χρόνο t είναι : $s = \frac{1}{2} \alpha t^2$ (α : το μέτρο της επιτάχυνσης).

$$\text{Για } t = t_1 : s_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \quad (1)$$

$$\text{Για } t = 2t_1 : s_2 = \frac{1}{2} \alpha (2t_1)^2 \Rightarrow s_2 = \frac{1}{2} \alpha \cdot 4t_1^2 \xrightarrow{(1)} s_2 = 4s_1.$$

27. (8044, B2) Ένα μικρό σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση ($\vec{a} = \text{σταθερή}$) κατά μήκος του προσανατολισμένου άξονα xx' . Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ το σώμα διέρχεται από το σημείο O ($x = 0 \text{ m}$).

A) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις τιμές των μεγεθών, στον οποίο αναγράφονται οι χρονικές στιγμές και οι αντίστοιχες τιμές των θέσεων του κινητού σε σχέση με το σημείο O .

$t \text{ (s)}$	$x \text{ (m)}$	$v \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$	$a \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$
0	0		
1	+1		
2	+8		

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_0 (αλγεβρική τιμή) και επιτάχυνση a (αλγεβρική τιμή).

Ισχύουν οι εξισώσεις : $v = v_0 + at$ (1), $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ (2).

Για $t = 1 \text{ s}$ και $x = +1 \text{ m}$ $\xrightarrow{(2)}$ $1 = v_0 + \frac{1}{2} a \Leftrightarrow 2v_0 + a = 2$. (3)

Για $t = 2 \text{ s}$ και $x = +8 \text{ m}$ $\xrightarrow{(2)}$ $8 = 2v_0 + 2a \Leftrightarrow 2v_0 + 2a = 8$. (4)

Αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (3), (4) :

$$2v_0 + 2a - 2v_0 - a = 8 - 2 \Leftrightarrow a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Αντικαθιστούμε στην (3) : $2v_0 + 6 = 2 \Leftrightarrow v_0 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Για $t = 1 \text{ s}$: $v = -2 + 6 \Rightarrow v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Για $t = 2 \text{ s}$: $v = -2 + 12 \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

28. (8048, B2) Στη διπλανή εικόνα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου δυο αυτοκινήτων που κινούνται ευθύγραμμα.

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

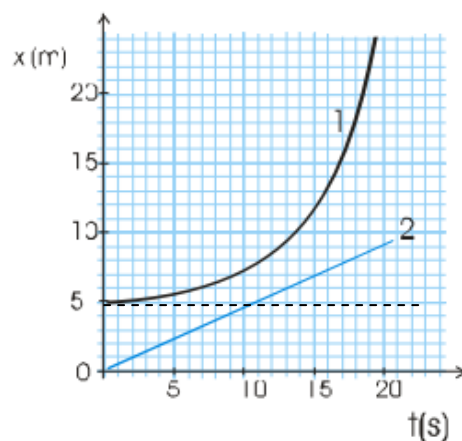
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s μηδενική ταχύτητα έχει το αυτοκίνητο

α) 1 β) 2 γ) 1 και 2

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



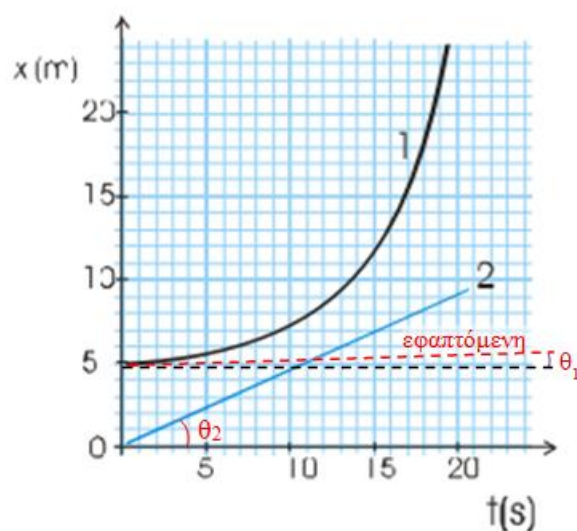
Απάντηση

Σχεδιάζω την εφαπτόμενη του διαγράμματος (1) στο σημείο που τέμνει τον άξονα x.

Παρατηρώ ότι η εφαπτόμενη (κόκκινη γραμμή) σχηματίζει με τον άξονα t γωνία $\theta_1 \neq 0$, άρα η κλίση του διαγράμματος (1) τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι μη μηδενική, άρα η αρχική ταχύτητα $v_{0,1}$ δεν είναι μηδενική ($v_{0,1} \neq 0$).

Το διάγραμμα (2) είναι ευθεία που σχηματίζει γωνία θ_2 με τον άξονα t, άρα η ταχύτητα v_2 είναι σταθερή και μη μηδενική, επομένως $v_{0,2} \neq 0$.

Καμία από τις απαντήσεις που δίνονται δεν είναι σωστή.



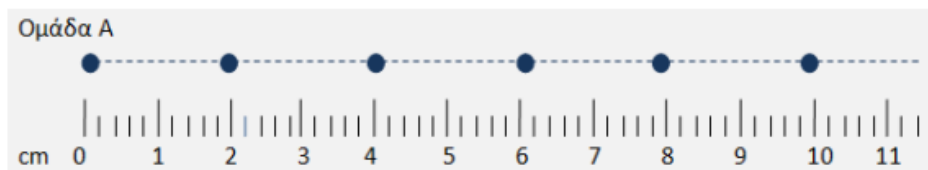
Σχόλιο

Το διάγραμμα (1) δεν έχει σχεδιαστεί σωστά, ώστε η ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα t να εφάπτεται στην καμπύλη τη χρονική στιγμή $t = 0$.

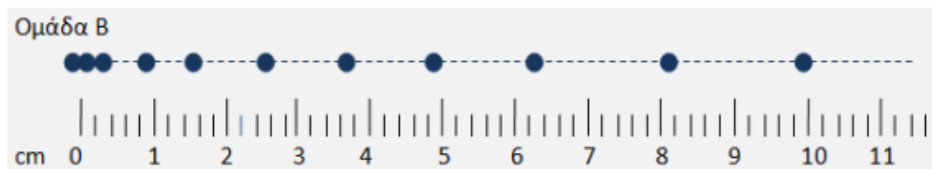
29. (13098, B1) Δύο ομάδες μαθητών εκτελούν στο εργαστήριο πειράματα μελέτης ευθύγραμμων κινήσεων. Η ομάδα Α χρησιμοποιεί ένα ηλεκτρικό αυτοκινητάκι, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η ομάδα Β χρησιμοποιεί ένα μικρό αμαξίδιο, το οποίο με νήμα συνδέεται μέσω μιας μικρής τροχαλίας με ένα βαρίδι. Άφησαν το βαρίδι ελεύθερο και καθώς πέφτει προκαλεί μια επιταχυνόμενη κίνηση στο αμαξίδιο. Τα οχήματα και των δύο ομάδων κινήθηκαν ευθύγραμμα πάνω στον πάγκο και σέρνουν πίσω τους από μια χαρτοταινία, στην οποία κατάλληλος μηχανισμός αφήνει στίγματα κάθε 0,2 s.

Οι μαθητές και των δύο ομάδων, πήραν την αντίστοιχη χαρτοταινία και με τη βοήθεια υποδεκάμετρου σημείωσαν τις τροχιές των κινητών, ενώνοντας με διακεκομμένη γραμμή τα στίγματα (κουκίδες), ενώ κάτω από αυτές σημείωσαν τις ενδείξεις του υποδεκάμετρου σε cm, αρχίζοντας με μηδέν στην πρώτη κουκίδα.

Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνονται για την ομάδα Α πέντε κουκίδες μετά την πρώτη, την οποία θεώρησαν ότι έγινε τη στιγμή $t_0 = 0$.



Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνονται για την ομάδα Β δέκα κουκίδες μετά την πρώτη, την οποία θεώρησαν ότι έγινε τη στιγμή $t_0 = 0$.



Αφού μελετήσετε προσεκτικά τις εργασίες των δύο ομάδων:

A) Να επιλέξετε τη σχέση που ισχύει για το μέτρο της ταχύτητας του κινητού της ομάδας Α (v_A) και το μέτρο της μέσης ταχύτητας του κινητού της ομάδας Β ($\bar{v}_B$), όπως αυτή προκύπτει για τη χρονική διάρκεια στην οποία έγιναν οι πρώτες δέκα κουκίδες μετά τη στιγμή $t_0 = 0$:

- i. $v_A = \bar{v}_B$ ii. $v_A = 2 \cdot \bar{v}_B$ iii. $\bar{v}_B = 2 \cdot v_A$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

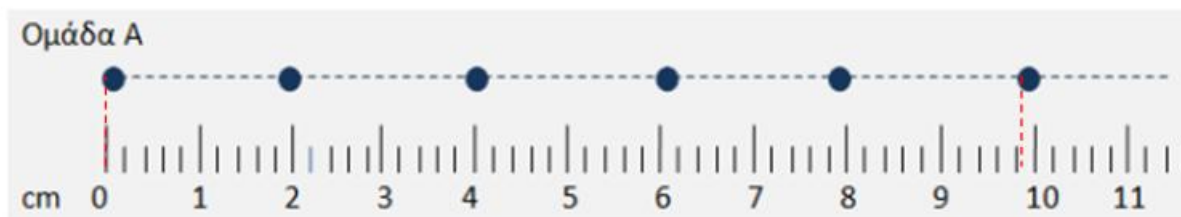
Μονάδες 8

Απάντηση

Ομάδα Α

Στη χρονική διάρκεια $t_A = 5 \cdot 0,2 \text{ s} = 1 \text{ s}$ το κινητό διανύει απόσταση $s_A = 9,85 \text{ cm}$ (εκτίμηση).

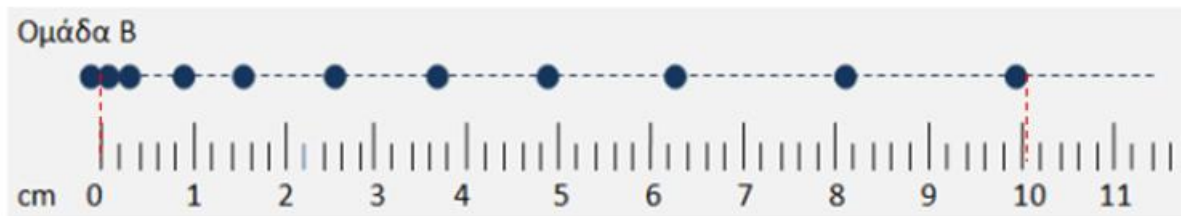
Η (σταθερή) ταχύτητα του Α είναι : $v_A = \frac{s_A}{t_A} = \frac{9,85 \text{ cm}}{1 \text{ s}} \Rightarrow v_A = 9,85 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.



Ομάδα Β

Στη χρονική διάρκεια $t_B = 10 \cdot 0,2 \text{ s} = 2 \text{ s}$ το κινητό διανύει απόσταση $s_B = 10,05 \text{ cm}$ (εκτίμηση).

Η μέση ταχύτητα του Β είναι : $\bar{v}_B = \frac{s_B}{t_B} = \frac{10,05 \text{ cm}}{2 \text{ s}} \Rightarrow \bar{v}_B = 5,02 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.



Υπολογίζω το πηλίκο των ταχυτήτων : $\frac{v_A}{v_B} = \frac{9,85}{5,02} \approx 1,96$.

Επομένως : $v_A \approx 1,96 \bar{v}_B$ ή προσεγγιστικά $v_A \approx 2 \bar{v}_B$.

Σχόλιο :

Η βαθμονόμηση δεν είναι ακριβής.

Οι «κουκίδες» δεν είναι σημειακές αλλά έχουν διαστάσεις (η διάμετρος κάθε «κουκίδας» είναι περίπου 2 mm), με αποτέλεσμα να είναι δύσκολος ο καθορισμός των θέσεων τους.

Η 1η κουκίδα δεν είναι στη θέση $x = 0$, ούτε για το Α ούτε για το Β.

Επομένως οι μετρήσεις και οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν μόνο προσεγγιστικά και η ζητούμενη σχέση θα βρεθεί προσεγγιστικά.

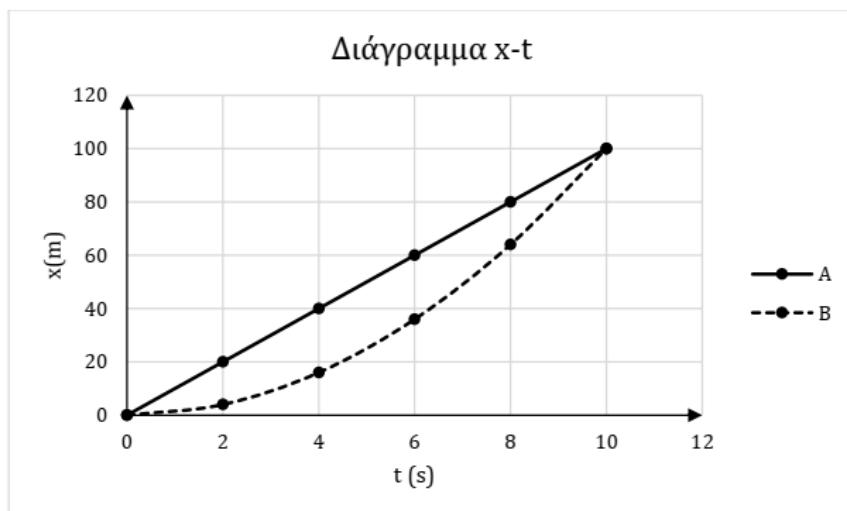
Αν οι εξεταζόμενοι/νες χρησιμοποιήσουν άλλες θέσεις για τον υπολογισμό του μέτρου της ταχύτητας v_A , θα καταλήξουν σε άλλο αποτέλεσμα.

π.χ. η απόσταση μεταξύ 2ης και 5ης κουκίδας είναι $s = 5,95 \text{ cm}$ (εκτίμηση).

Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας του Α προκύπτει : $v_A = \frac{s}{\Delta t} = \frac{5,95 \text{ m}}{0,6 \text{ s}} \approx 9,92 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Άρα, το πηλίκο των ταχυτήτων είναι $\frac{v_A}{v_B} = \frac{9,92}{5,02} \approx 1,98$, δηλαδή : $v_A \approx 1,98 \bar{v}_B$.

30. (13273, B1) Τα σημειακά κινητά Α και Β, κινούνται στον ίδιο ευθύγραμμο δρόμο και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ διέρχονται από το σημείο $x_0 = 0$. Το κινητό Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Η θέση των δύο κινητών μεταβάλλεται με το χρόνο όπως στο ακόλουθο διάγραμμα:



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κινητού Α είναι διπλάσια εκείνης του κινητού Β.

Α. Η επιτάχυνση του κινητού Β έχει αλγεβρική τιμή:

α) $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, β) $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, γ) $0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Απάντηση

Η ταχύτητα του Α έχει σταθερή τιμή : $v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{100 \text{ m}}{10 \text{ s}} \Rightarrow v_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ταχύτητα του Β έχει τιμή : $v_{0,B} = \frac{1}{2} v_A = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης του Β επιλέγω τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$ το Β βρίσκεται στη θέση $x_B = 100 \text{ m}$ (συνάντηση των δύο κινητών).

Ισχύει : $x_B = v_{0,B}t + \frac{1}{2} \alpha_B t^2 \Rightarrow 100 = 5 \cdot 10 + \frac{1}{2} \alpha_B \cdot 100 \Leftrightarrow 50 \alpha_B = 50 \Leftrightarrow \alpha_B = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Σχόλια

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει τις μονάδες του ερωτήματος Α) και το ερώτημα Β) με τις μονάδες του.
- 2) Το διάγραμμα του Β δεν έχει σχεδιαστεί σωστά.

Αν οι εξεταζόμενοι/ες χρησιμοποιήσουν άλλη χρονική στιγμή από την $t = 10 \text{ s}$, θα υπολογίσουν άλλη τιμή για την επιτάχυνση του Β !

π.χ. για $t = 2 \text{ s}$, με βάση το διάγραμμα είναι : $x_B \cong 5 \text{ m}$. Άρα :

$$5 = 5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_B \cdot 2^2 \Leftrightarrow \alpha_B = -2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

δηλαδή η επιτάχυνση του Β προκύπτει αρνητική !

- Με βάση τις τιμές $v_{0,B} = 5 \text{ m/s}$, $\alpha_B = 1 \text{ m/s}^2$ υπολογίζω τις θέσεις του Β τις χρονικές στιγμές 2 s , 4 s , 6 s , 8 s .

$$t = 2 \text{ s} : x_B = 5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 10 + 2 = 12 \text{ m.}$$

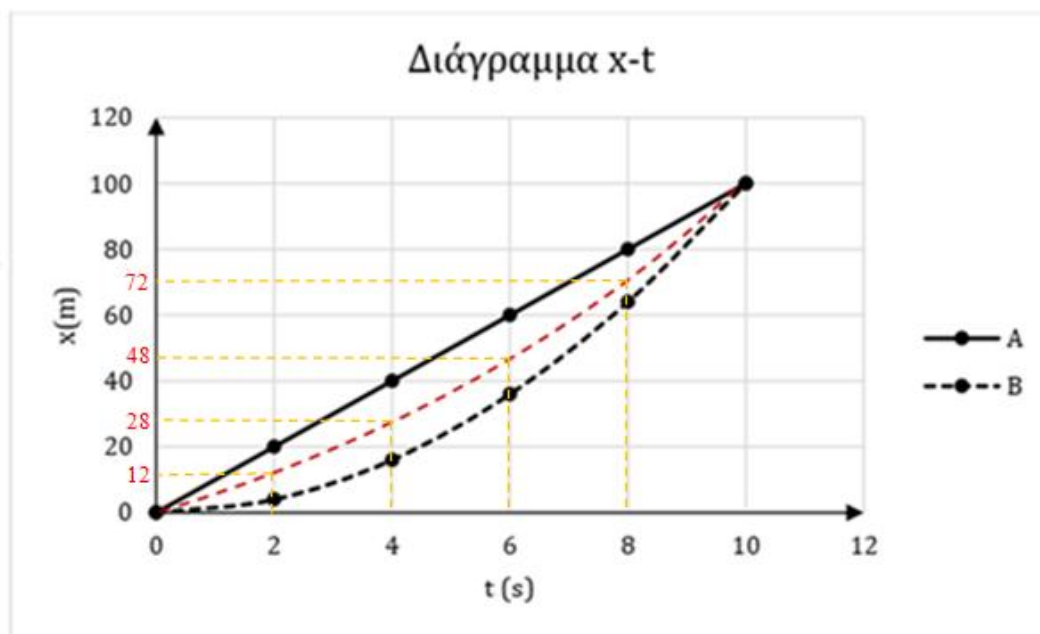
$$t = 4 \text{ s} : x_B = 5 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 = 20 + 8 = 28 \text{ m.}$$

$$t = 6 \text{ s} : x_B = 5 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2 = 30 + 18 = 48 \text{ m.}$$

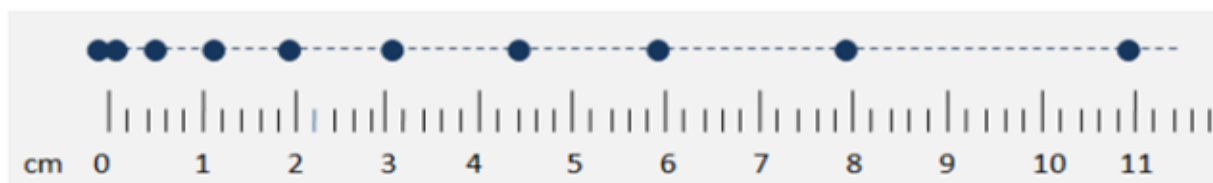
$$t = 8 \text{ s} : x_B = 5 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8^2 = 40 + 32 = 72 \text{ m.}$$

Οι τιμές x_B που υπολογίστηκαν δεν αντιστοιχούν στα σημεία του διαγράμματος που δίνει η εκφώνηση.

Το σωστό διάγραμμα είναι (περίπου) όπως δείχνει η διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη στο επόμενο σχήμα.



31. (13348, B1) Μαθητές μελετούν στο εργαστήριο ευθύγραμμες κινήσεις. Χρησιμοποιούν ένα μικρό αμαξίδιο, το οποίο με νήμα συνδέεται μέσω μιας μικρής τροχαλίας με ένα βαρίδι. Άφησαν το βαρίδι ελεύθερο και καθώς πέφτει προκαλεί μια επιταχυνόμενη κίνηση στο αμαξίδιο. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη και το αμαξίδιο σέρνει πίσω του χαρτοταινία, στην οποία κατάλληλος μηχανισμός αφήνει στίγματα κάθε 0,2 s.



Οι μαθητές πήραν την χαρτοταινία και με τη βοήθεια υποδεκάμετρου σημείωσαν την τροχιά του κινητού, ενώνοντας με διακεκομμένη γραμμή τα στίγματα (κουκίδες), ενώ κάτω από αυτές σημείωσαν τις ενδείξεις του υποδεκάμετρου σε cm, αρχίζοντας με μηδέν στην πρώτη κουκίδα.

Ο καθηγητής τους υπέδειξε ότι η μέση ταχύτητα του κινητού για μετατόπιση μεταξύ τριών διαδοχικών κουκίδων, μπορεί να θεωρηθεί ως η στιγμιαία ταχύτητά του τη στιγμή που βρίσκεται στην μεσαία κουκίδα.

Με βάση την παραπάνω υπόδειξη, αν v_1 το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας στη θέση που αντιστοιχεί στην κουκίδα $x_1 = 3 \text{ cm}$ και v_2 το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας στη θέση που αντιστοιχεί στην κουκίδα $x_2 = 8 \text{ cm}$ του υποδεκάμετρου, ποια από τις παρακάτω σχέσεις, αποδίδει τον λόγο των μέτρων των δύο αυτών ταχυτήτων;

Α) Να επιλέξετε τη σωστή σχέση

α) $\frac{v_1}{v_2} = 1$

β) $\frac{v_1}{v_2} = 0,48$

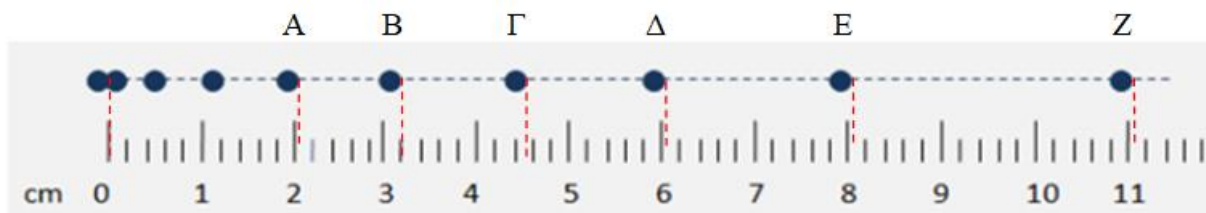
γ) $\frac{v_1}{v_2} = 0,2$

Μονάδες 4

Β) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση



Η στιγμιαία ταχύτητα v_1 του κινητού στη θέση $x_1 = 3,2 \text{ cm}$ (και όχι 3 cm σύμφωνα με την εκφώνηση) είναι η μέση ταχύτητα μεταξύ των θέσεων Α, Γ :

$$v_1 = \frac{s_{AG}}{\Delta t_{AG}} = \frac{2,5 \text{ cm}}{0,4 \text{ s}} \Rightarrow v_1 = 6,25 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Η στιγμιαία ταχύτητα v_2 του κινητού στη θέση $x_2 = 8 \text{ cm}$ (περίπου) είναι η μέση ταχύτητα μεταξύ των θέσεων Δ, Ζ :

$$v_2 = \frac{s_{AZ}}{\Delta t_{AZ}} = \frac{5 \text{ cm}}{0,4 \text{ s}} \Rightarrow v_2 = 12,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Το πηλίκο των ταχυτήτων είναι :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{6,25 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{12,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}} = 0,5.$$

Δεν υπάρχει σωστή απάντηση. Η απάντηση που προσεγγίζει τη σωστή είναι η β).

Σχόλιο :

Η βαθμονόμηση δεν είναι ακριβής.

Οι «κουκίδες» δεν είναι σημειακές αλλά έχουν διαστάσεις (η διάμετρος κάθε «κουκίδας» είναι περίπου 2 mm), με αποτέλεσμα να είναι δύσκολος ο καθορισμός των θέσεων τους.

Η 6η κουκίδα βρίσκεται στη θέση $x = 3,2 \text{ cm}$ (όχι 3 cm που αναφέρει η εκφώνηση) και τα διαστήματα δεν είναι ίσα μεταξύ τους.

32. (13543, 2.1) Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση α και αρχική ταχύτητα $v_0 = 0$. Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα (Δt) θα έχει διανύσει διάστημα s και η ταχύτητά του θα είναι ίση με v .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Το διάστημα s και η ταχύτητα v συνδέονται με τη σχέση:

$$(\alpha) \quad s = \frac{2v^2}{\alpha}$$

$$(\beta) \quad s = \frac{v^2}{\alpha}$$

$$(\gamma) \quad s = \frac{v^2}{2\alpha}$$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Γράφω την εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$) και την επιλύω ως προς t :

$$v = \alpha t \Leftrightarrow t = \frac{v}{\alpha}. \quad (1)$$

Αντικαθιστώ το t από τη σχέση (1) στην εξίσωση της μετατόπισης :

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \xrightarrow{(1)} \Delta x = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{v}{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{v^2}{2\alpha}. \quad (2)$$

$$\text{Το διάστημα που διανύθηκε είναι : } s = |\Delta x| \xrightarrow{(2)} s = \frac{v^2}{2|\alpha|}.$$

$$\text{Αν } \alpha > 0, \text{ τότε η τελευταία σχέση γράφεται : } s = \frac{v^2}{2\alpha}.$$

Σχόλιο :

Η σχέση $s = \frac{v^2}{2\alpha}$ ισχύει μόνο όταν το σώμα κινείται προς τη θετική φορά ή εφ' όσον το σύμβολο α εκφράζει το μέτρο της επιτάχυνσης.

$$\text{Η γενικότερη σχέση είναι : } s = \frac{v^2}{2|\alpha|}.$$

33. (13546, 2.1) Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_0 . Μετά από χρονικό διάστημα Δt έχει διανύσει διάστημα S και η ταχύτητά του είναι ίση με v_1 .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Το διάστημα S δίδεται από τη σχέση:

$$(\alpha) S = \frac{v_1 + v_0}{4} \Delta t$$

$$(\beta) S = \frac{v_1 + v_0}{2} \Delta t$$

$$(\gamma) S = \frac{v_1 - v_0}{4} \Delta t$$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

1ος τρόπος

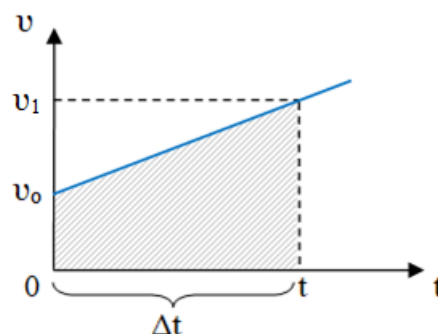
Σχεδιάζουμε το διάγραμμα της σχέσης $v = v_0 + \alpha t$.

Το εμβαδό του τραπεζιού είναι ίσο (αριθμητικά) με την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης :

$$\Delta x = E_{\text{τραπεζιού}} = \frac{v_1 + v_0}{2} (\Delta t). \quad (1)$$

Το διάστημα που διανύθηκε είναι :

$$s = |\Delta x| \xrightarrow{(1)} s = \frac{|v_1 + v_0|}{2} (\Delta t).$$



Αν το σώμα κινείται προς τη θετική φορά, τότε : $s = \Delta x \xrightarrow{(1)} s = \frac{v_1 + v_0}{2} (\Delta t).$

2ος τρόπος

Στην εξίσωση της μετατόπισης $\Delta x = v_0 (\Delta t) + \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2$, αντικαθιστούμε την επιτάχυνση από τη σχέση

$$\alpha = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} :$$

$$\Delta x = v_0 (\Delta t) + \frac{1}{2} \left(\frac{v_1 - v_0}{\Delta t} \right) (\Delta t)^2 = v_0 (\Delta t) + \frac{v_1 - v_0}{2} (\Delta t) = \frac{2v_0 + v_1 - v_0}{2} (\Delta t) \Leftrightarrow$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_0}{2} (\Delta t). \quad (1)$$

Το διάστημα που διανύθηκε είναι : $s = |\Delta x| \xrightarrow{(1)} s = \frac{|v_1 + v_0|}{2} (\Delta t).$

Αν το σώμα κινείται προς τη θετική φορά, τότε : $s = \Delta x \xrightarrow{(1)} s = \frac{v_1 + v_0}{2} (\Delta t).$

Σχόλιο :

Η σχέση : $s = \frac{v_1 + v_0}{2} (\Delta t)$ ισχύει μόνο όταν το σώμα κινείται προς τη θετική φορά ή εφ' όσον τα σύμβολα v_0, v_1 είναι τα μέτρα των ταχυτήτων.

Η γενικότερη σχέση είναι : $s = \frac{|v_1 + v_0|}{2} (\Delta t).$

34. (13549, 2.2) Ένα κινητό βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $a = 4 \text{ m/s}^2$.

A) Να συμπληρωθεί ο διπλανός πίνακας:

Μονάδες 4

B) Να γίνει η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμονομημένους άξονες για το παραπάνω κινητό.

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των αξόνων a , t και της ευθείας που παριστά την επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 6 \text{ s}$, και να συγκριθεί με ένα από τα μεγέθη του πίνακα του ερωτήματος (A).

Μονάδες 9

Απάντηση

Η επιτάχυνση είναι σταθερή : $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

A) Η εξίσωση της ταχύτητας είναι :

$$v = at \Rightarrow v = 4t. \text{ (S.I.)}$$

$$\text{Για } t = 2 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 4 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Για } t = 4 \text{ s} \Rightarrow v_4 = 4 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Για } t = 6 \text{ s} \Rightarrow v_6 = 4 \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

B)

Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

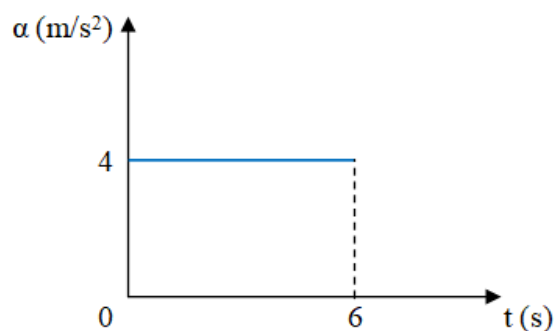
Το εμβαδό του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το διάγραμμα $a - t$, τους δύο άξονες και την κάθετη στον άξονα t τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$, είναι :

$$E_{\text{ορθ.}} = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (6 \text{ s}) = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Διαπιστώνω ότι το εμβαδό στο διάγραμμα $a - t$ είναι ίσο με την τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$.

Αιτιολόγηση : Είναι γνωστό ότι το εμβαδό στο διάγραμμα $a - t$ είναι ίσο (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) μεταβολή της ταχύτητας στην ίδια χρονική διάρκεια : $E_{\text{ορθ}} = \Delta v$.

Επειδή $\Delta v = v_6 - v_0 = v_6 - 0 = v_6$, προκύπτει ότι : $E_{\text{ορθ}} = v_6$.



Σχόλιο : Η διατύπωση : « ... το εμβαδό ... να συγκριθεί με ένα από τα μεγέθη του πίνακα ... » είναι ασαφής.

Η εκφώνηση έπρεπε να ζητά τη σύγκριση του εμβαδού με την τιμή ενός μεγέθους του πίνακα τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$.

35. (13552, 2.1) Στο σχήμα δίδονται τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου για δύο σώματα Α και Β που κινούνται ευθύγραμμα και παράλληλα.

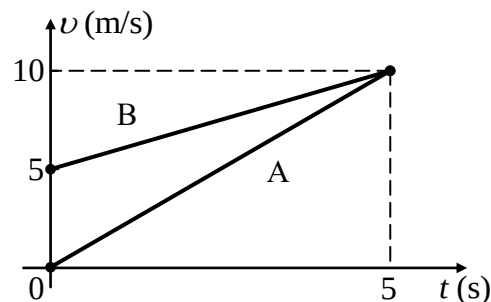
A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων ισχύουν

(α) $v_A = 5$ και $v_B = 5 + 5t$ (v σε $\frac{m}{s}$, t σε s)

(β) $v_A = 5t$ και $v_B = 5 + t$ (v σε $\frac{m}{s}$, t σε s)

(γ) $v_A = 2t$ και $v_B = 5 + t$ (v σε $\frac{m}{s}$, t σε s)



Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Από τις τιμές του διαγράμματος υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης και γράφω την εξίσωση της ταχύτητας κάθε κινητού.

Κινητό Α

$$\alpha_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \frac{(10-0) \frac{m}{s}}{5s} \Rightarrow \alpha_A = 2 \frac{m}{s^2}.$$

$$v_A = v_{o,A} + \alpha_A t \xrightarrow{v_{o,A}=0} v_A = 2t \quad (\text{S.I.})$$

Κινητό Β

$$\alpha_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = \frac{(10-5) \frac{m}{s}}{5s} \Rightarrow \alpha_B = 1 \frac{m}{s^2}.$$

$$v_B = v_{o,B} + \alpha_B t \xrightarrow{v_{o,B}=5m/s} v_B = 5 + t \quad (\text{S.I.})$$

36. (13553, 2.1) Στο σχήμα δίνονται τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου για δύο σώματα Α και Β που κινούνται παράλληλα και ευθύγραμμα.

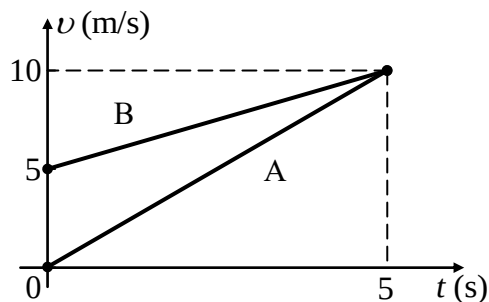
Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων ισχύουν:

(α) $\alpha_A = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $\alpha_B = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(β) $\alpha_A = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $\alpha_B = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(γ) $\alpha_A = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $\alpha_B = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



Μονάδες 4

Β) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Από τις τιμές του διαγράμματος υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης κάθε κινητού.

Κινητό Α

$$\alpha_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \frac{(10-0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_A = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Κινητό Β

$$\alpha_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = \frac{(10-5) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_B = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

37. (13554, 2.1) Στο σχήμα δίδονται τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου για δύο σώματα Α και Β που κινούνται ευθύγραμμα και παράλληλα.

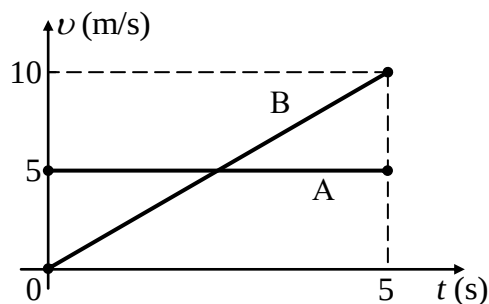
Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για τις μετατοπίσεις των δύο σωμάτων ισχύουν :

(α) $\Delta x_A = 5\Delta t$ και $\Delta x_B = \Delta t^2$

(β) $\Delta x_A = 5\Delta t$ και $\Delta x_B = 2\Delta t^2$

(γ) $\Delta x_A = 2\Delta t$ και $\Delta x_B = 5\Delta t + 2\Delta t^2$



Μονάδες 4

Β) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κινητό Α

Το Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα, μέτρου $v_A = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η εξίσωση της μετατόπισης είναι :

$$\Delta x_A = v_A t \Rightarrow \Delta x_A = 5t \quad (\text{S.I.})$$

Κινητό Β

Το Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα ($v_{0,B} = 0$) με σταθερή

επιτάχυνση, μέτρου : $\alpha_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = \frac{(10-0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(5-0)\text{s}} \Rightarrow \alpha_B = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

Η εξίσωση της μετατόπισης είναι :

$$\Delta x_B = \frac{1}{2} \alpha_B t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 \Rightarrow \Delta x_B = t^2 \quad (\text{S.I.})$$

Σχόλιο :

Αφού $t_0 = 0$, στις σχέσεις το Δx πρέπει να εκφράζεται σε συνάρτηση με το χρόνο t και όχι με τη χρονική διάρκεια Δt (όπως δίνεται στην εκφώνηση).

38. (13616, 2.2) Να αποδείξετε τη σχέση $v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta x}$ στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, όπου:

v είναι η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κινητού τη χρονική στιγμή t , v_0 είναι η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κινητού τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, α η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης του κινητού και Δx η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης του κινητού από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t ,

Μονάδες 13

Απάντηση

Γράφω την εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και την επιλύω ως προς t :

$$v = v_0 + \alpha t \Leftrightarrow v - v_0 = \alpha t \Leftrightarrow t = \frac{v - v_0}{\alpha}. \quad (1)$$

Αντικαθιστώ το t από τη σχέση (1) στην εξίσωση της μετατόπισης:

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \xrightarrow{(1)} \Delta x = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{v - v_0}{\alpha} \right)^2 = \frac{v_0 v - v_0^2}{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{(v - v_0)^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\Delta x = \frac{v_0 v - v_0^2}{\alpha} + \frac{v^2 - 2 v v_0 + v_0^2}{2\alpha} = \frac{2 v_0 v - 2 v_0^2 + v^2 - 2 v v_0 + v_0^2}{2\alpha} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha(\Delta x) = v^2 - v_0^2 \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 + 2\alpha(\Delta x) \Leftrightarrow v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2\alpha(\Delta x)}.$$

39. (13620, 2.1) Δύο σημειακά κινητά Α και Β κινούνται στην ίδια ευθεία, με την ίδια, σταθερή επιτάχυνση α^2 . Από τα διαγράμματα θέσης - χρόνου 1 και 2, ένα αντιστοιχεί στο σημειακό κινητό Α και ένα στο σημειακό κινητό Β. Από τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου 3 και 4, ένα αντιστοιχεί στο σημειακό κινητό Α και ένα στο σημειακό κινητό Β.

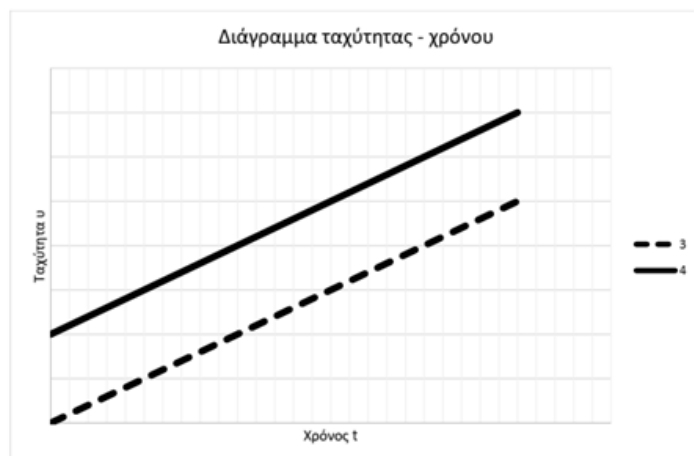
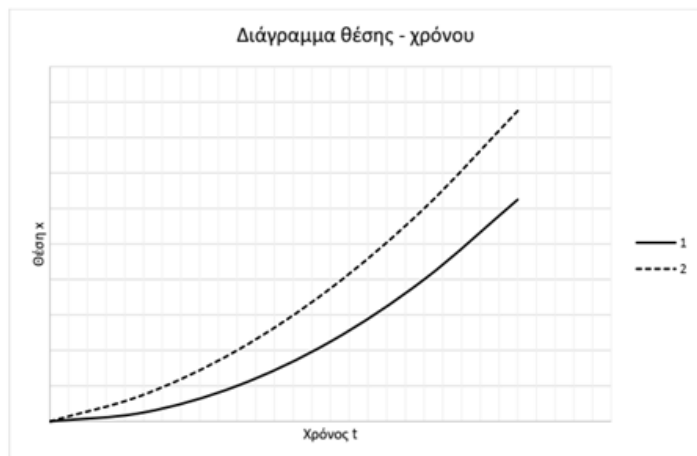
Α. Αν στο σημειακό κινητό Α αντιστοιχεί το διάγραμμα θέσης - χρόνου 1, τότε στο κινητό αυτό θα αντιστοιχεί το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου:

α) 3 β) 4

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Τα δύο κινητά εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με την ίδια σταθερή επιτάχυνση, μέτρου α , και εξισώσεις θέσης: $x_A = v_{o(A)}t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $x_B = v_{o(B)}t + \frac{1}{2}\alpha t^2$.

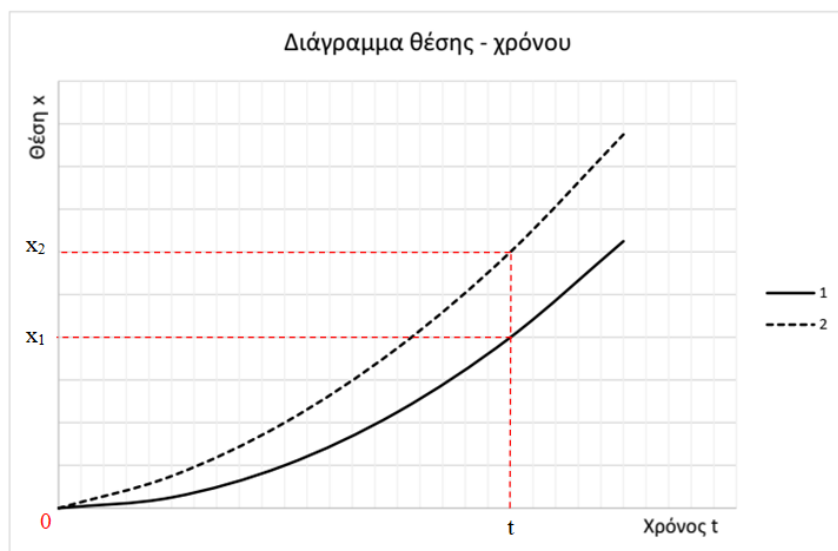
Με βάση το διάγραμμα $x - t$, σε κάθε χρονική στιγμή η μετατόπιση του κινητού Β είναι μεγαλύτερη από του Α. Άρα: $x_B > x_A \Leftrightarrow v_{o(B)}t + \frac{1}{2}\alpha t^2 > v_{o(A)}t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Leftrightarrow v_{o(B)} > v_{o(A)}$.

Επομένως, το διάγραμμα 3 αντιστοιχεί στο κινητό Α και το διάγραμμα 4 στο κινητό Β.

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ τα κινητά βρίσκονται στην αρχή του άξονα x ($x_{o,A} = x_{o,B} = 0$).

Στα διαγράμματα $x - t$ και $v - t$ δεν έχει σημειωθεί η τιμή μηδέν στην αρχή των αξόνων.



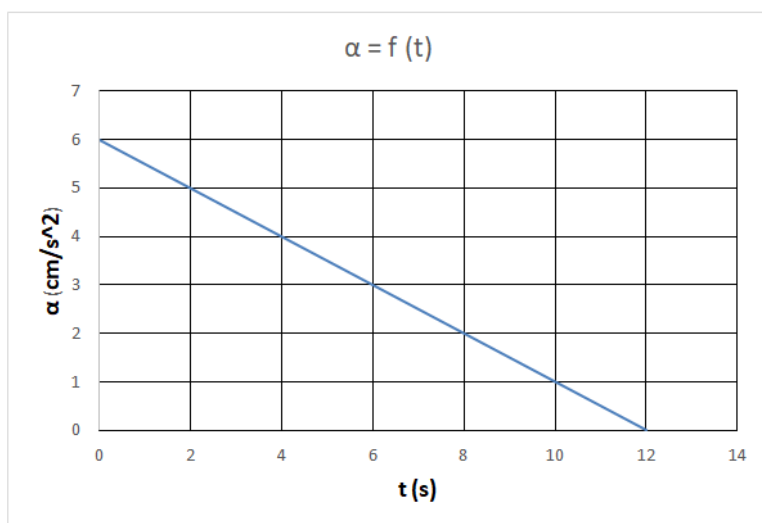
40. (13772, 2.1)

Η γραφική παράσταση περιγράφει τη μεταβολή της επιτάχυνσης ενός σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η μεταβολή της ταχύτητας του σώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 12\text{s}$ είναι:

- α) 36 m/s , β) 72 m/s ,
γ) $0,36\text{ m/s}$.



Μονάδες 4

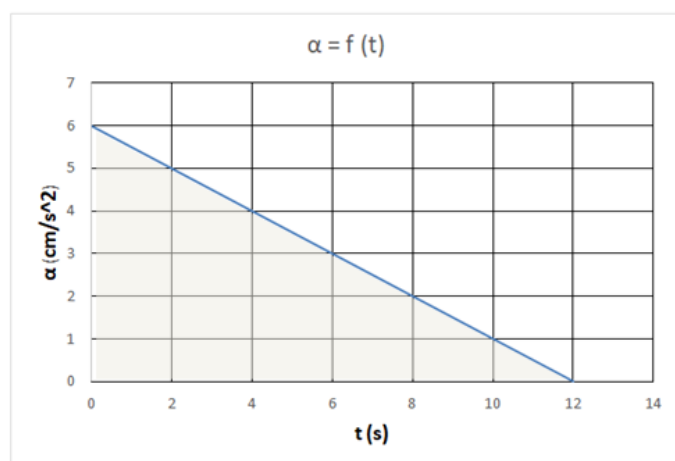
B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

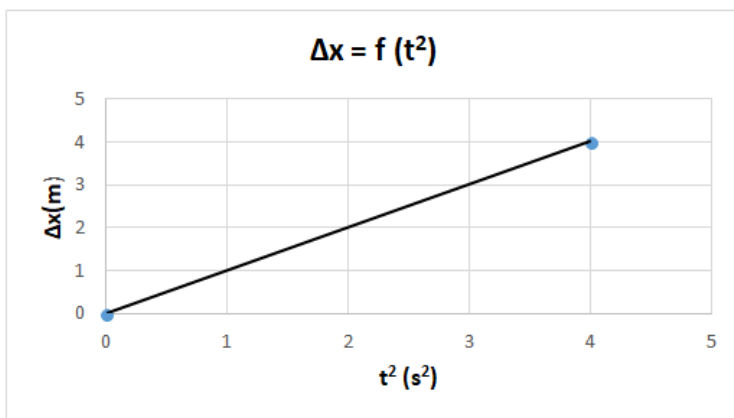
Απάντηση

Στο διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου, η (αλγεβρική) μεταβολή της ταχύτητας Δv , από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 12\text{ s}$, είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από το διάγραμμα και τους δύο άξονες :

$$\Delta v = E_{\text{τριγ}} = \frac{1}{2} \left(0,06 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (12\text{ s}) \Rightarrow \Delta v = 0,36 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



41. (13782, 2.2) Έστω σώμα μικρών διαστάσεων που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η γραφική παράσταση του σχήματος αναπαριστά τη μεταβολή της τιμής της μετατόπισής του σε συνάρτηση του τετραγώνου του χρόνου στον οποίο συμβαίνει.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η τιμή της επιτάχυνσης του σώματος είναι:

α) $+2 \text{ m/s}^2$,

β) $+1 \text{ m/s}^2$,

γ) $+4 \text{ m/s}^2$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα ($v_0 = 0$).

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης υπολογίζεται από την εξίσωση $\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t^2$.

Για $\Delta x = 1 \text{ m}$ και $t^2 = 1 \text{ s}^2$, προκύπτει :

$$1 = \frac{1}{2} \alpha \cdot 1 \Leftrightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Σχόλιο :

Το διάγραμμα έπρεπε να αναπαριστά τη μεταβολή της θέσης x ως προς το t^2 και όχι της μετατόπισης Δx .

42. (14833, 2.1) Αθλητής κινείται διατηρώντας σταθερή την κατεύθυνση της κίνησής του. Με τη βοήθεια ενός συστήματος χρονοφωτογράφισης μεγάλης ακριβείας καταγράφεται η ταχύτητα του αθλητή.

Το σύστημα τίθεται σε λειτουργία τη χρονική στιγμή $t = 0$ s και καταγράφει τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s ταχύτητα μέτρου $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και τη στιγμή $t_2 = 6$ s ταχύτητα μέτρου $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Από τα παραπάνω δεδομένα μπορείτε να συμπεράνετε ότι η κίνηση του αθλητή είναι:

(α) ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(β) ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(γ) ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Από τα δεδομένα φαίνεται ότι το μέτρο της ταχύτητας του αθλητή αυξάνεται, άρα η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη**.

Δεν γνωρίζουμε όμως αν η επιτάχυνση είναι σταθερή, επομένως δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη.

Αν ο αθλητής έχει σταθερή επιτάχυνση μέτρου α , τότε ισχύει :

$$\alpha = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \alpha = \frac{(12 - 4) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(6 - 2)\text{s}} = \frac{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\text{s}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Επομένως, αν η επιτάχυνση του αθλητή είναι σταθερή, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι ο αθλητής έχει σταθερή επιτάχυνση.

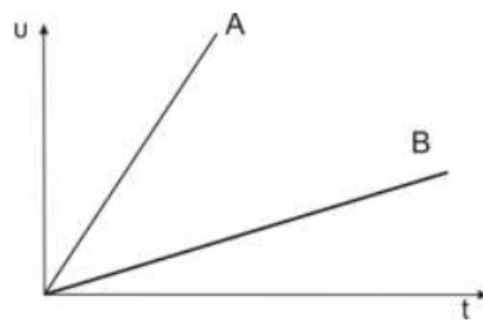
Τα δεδομένα δεν επαρκούν ώστε να απαντηθεί η ερώτηση.

43. (14835, 2.1) Στη διπλανή εικόνα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο δυο κινητών Α και Β τα οποία κινούνται ευθύγραμμα.

Α. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Τα δυο κινητά διανύουν το ίδιο διάστημα σε χρόνους t_A και t_B αντίστοιχα για τους οποίους ισχύει

(α) $t_A > t_B$ (β) $t_A = t_B$ (γ) $t_A < t_B$



Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

1ος τρόπος

Έστω v_A , v_B οι ταχύτητες των δύο κινητών τις χρονικές στιγμές t_A , t_B αντίστοιχα.

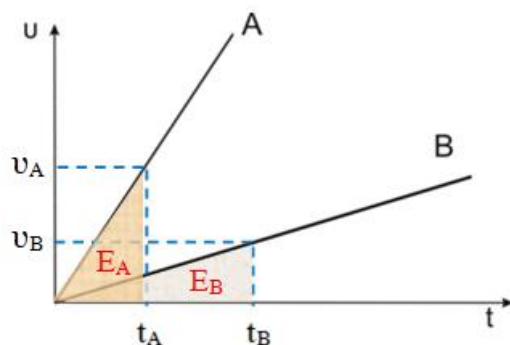
Στο διάγραμμα $v - t$ το εμβαδό είναι ίσο (αριθμητικά) με το διάστημα που διάνυσε το κινητό.

$$s_A = E_A = \frac{1}{2} v_A t_A \quad (1)$$

$$s_B = E_B = \frac{1}{2} v_B t_B \quad (2)$$

Ισχύει :

$$s_A = s_B \xrightarrow{(1), (2)} \frac{1}{2} v_A t_A = \frac{1}{2} v_B t_B \xrightarrow{v_A > v_B} t_A < t_B.$$



2ος τρόπος

Στο διάγραμμα $v - t$ η ευθεία του Α έχει μεγαλύτερη κλίση από του Β, άρα το κινητό Α έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση από το Β : $\alpha_A > \alpha_B$.

Κάθε κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (χωρίς αρχική ταχύτητα).

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$s_A = \frac{1}{2} \alpha_A t_A^2 \quad (3), \quad s_B = \frac{1}{2} \alpha_B t_B^2 \quad (4).$$

$$\text{Ισχύει : } s_A = s_B \xrightarrow{(3), (4)} \frac{1}{2} \alpha_A t_A^2 = \frac{1}{2} \alpha_B t_B^2 \xrightarrow{\alpha_A > \alpha_B} t_A^2 < t_B^2 \Leftrightarrow t_A < t_B.$$

Επιβραδυνόμενη κίνηση

44. (7998, B2) Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο. Στο διπλανό διάγραμμα παριστάνεται γραφικά η τιμή της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

Α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

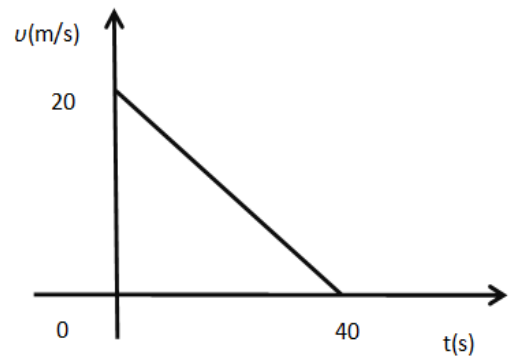
Αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι :

α) Το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 2 \text{ m/s}^2$.

β) Η μετατόπιση του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 40 \text{ s}$ είναι ίση με 800 m .

γ) Η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 40 \text{ s}$ είναι ίση με 10 m/s .

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας



Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

α) Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης του αυτοκινήτου είναι :

$$\alpha = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0 - 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(40 - 0) \text{s}} = \frac{-20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{40 \text{s}} \Rightarrow \alpha = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

άρα η πρόταση είναι λανθασμένη.

β) Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης του αυτοκινήτου στο διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 40 \text{ s}$ είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του τριγώνου :

$$\Delta x = E_{\text{τριγ}} = \frac{20 \cdot 40}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 400 \text{ m},$$

άρα η πρόταση είναι λανθασμένη.

γ) Το διάστημα που διάνυσε το κινητό στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 40 \text{ s}$ είναι :

$$s = |\Delta x| = 400 \text{ m}.$$

Το μέτρο της μέσης ταχύτητας του αυτοκινήτου στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 40 \text{ s}$ είναι :

$$v_{\mu} = \frac{s}{\Delta t} \Rightarrow v_{\mu} = \frac{400 \text{ m}}{40 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

άρα η πρόταση είναι σωστή.

45. (8002, B2) Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 και επιβράδυνση μέτρου a .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Το κινητό μετά από χρόνο t έχει μετατόπιση Δx και η ταχύτητά του έχει μέτρο ίσο με v . Το μέτρο της ταχύτητας v μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

α) $v^2 = v_0^2 - 2a \cdot \Delta x$

β) $v^2 = v_0^2 - a \cdot \Delta x$

γ) $v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Γράφω την εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και την επιλύω ως προς t :

$$v = v_0 - at \Leftrightarrow at = v_0 - v \Leftrightarrow t = \frac{v_0 - v}{a}. \quad (1)$$

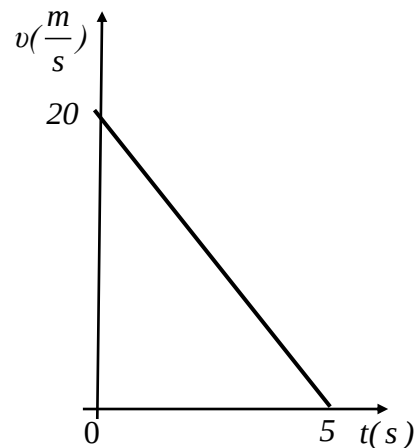
Αντικαθιστώ το t από τη σχέση (1) στην εξίσωση της μετατόπισης:

$$\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 \xrightarrow{(1)} \Delta x = v_0 \cdot \frac{v_0 - v}{a} - \frac{1}{2} a \left(\frac{v_0 - v}{a} \right)^2 = \frac{v_0^2 - v_0 v}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \frac{(v_0 - v)^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Delta x = \frac{v_0^2 - v_0 v}{a} - \frac{v_0^2 - 2v_0 v + v^2}{2a} = \frac{2v_0^2 - 2v_0 v - v_0^2 + 2v_0 v - v^2}{2a} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} \Leftrightarrow$$

$$2a(\Delta x) = v_0^2 - v^2 \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 - 2a(\Delta x).$$

46. (8006, B1) Ένα κινητό κινείται ευθύγραμμα και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Κατά την κίνηση του κινητού, από τη χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι να σταματήσει, το κινητό κινείται με:

- α) επιτάχυνση ίση με 4 m/s^2 και μετατοπίζεται κατά 50 m .
- β) επιτάχυνση ίση με -4 m/s^2 και μετατοπίζεται κατά 100 m .
- γ) επιτάχυνση ίση με -4 m/s^2 και μετατοπίζεται κατά 50 m .

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται γραμμικά με το χρόνο, άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.

Για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} - 5 \text{ s}$

Σύμφωνα με τον ορισμό, η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι :

$$\alpha = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0 - 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(5 - 0) \text{s}} = \frac{-20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{s}} \Rightarrow \alpha = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του τριγώνου στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου :

$$\Delta x = E_{\text{τριγ}} = \frac{20 \cdot 5}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 50 \text{ m}.$$

[Σωστή απάντηση : γ]

Εναλλακτικά, η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης υπολογίζεται

i) από τη σχέση $\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$, με $v = 0$, $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και $t = 5 \text{ s}$:

$$\Delta x = \frac{0 + 20}{2} \cdot 5 \text{ m} = 50 \text{ m}.$$

ii) από την εξίσωση $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$, με $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\alpha = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $t = 5 \text{ s}$:

$$\Delta x = \left[20 \cdot 5 + \frac{1}{2} (-4) \cdot 5^2 \right] \text{ m} = (100 - 50) \text{ m} = 50 \text{ m}.$$

47. (8017, B2) Σε αυτοκίνητο που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με ταχύτητα μέτρου v_1 , ο οδηγός του φρενάρει οπότε το αυτοκίνητο διανύει διάστημα d_1 μέχρι να σταματήσει. Αν το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα διπλάσιου μέτρου, δηλαδή $v_2 = 2v_1$, τότε για να σταματήσει πρέπει να διανύσει διάστημα d_2 .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν το αυτοκίνητο σε κάθε φρενάρισμα επιβραδύνεται με την ίδια επιβράδυνση, τότε ισχύει :

(α) $d_2 = 2d_1$

(β) $d_2 = 3d_1$

(γ) $d_2 = 4d_1$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ισχύουν οι εξισώσεις :

$$v = v_0 - \alpha t \quad (1), \quad \Delta x = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (2). \quad [\alpha : \text{το μέτρο της επιβράδυνσης}]$$

Τη στιγμή που σταματά το αυτοκίνητο, είναι :

$$v = 0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_0 - \alpha t \Leftrightarrow \alpha t = v_0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{\alpha} \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \Delta x = v_0 \frac{v_0}{\alpha} - \frac{1}{2} \alpha \frac{v_0^2}{\alpha^2} = \frac{v_0^2}{\alpha} - \frac{v_0^2}{2\alpha} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{v_0^2}{2\alpha} . \quad (4)$$

Με βάση τη σχέση (4) :

i) όταν το αυτοκίνητο έχει αρχική ταχύτητα μέτρου v_1 , μέχρι να σταματήσει θα διανύσει απόσταση

$$d_1 = \frac{v_1^2}{2\alpha} . \quad (5)$$

ii) όταν το αυτοκίνητο έχει αρχική ταχύτητα μέτρου $2v_1$, μέχρι να σταματήσει θα διανύσει απόσταση

$$d_2 = \frac{(2v_1)^2}{2\alpha} = 4 \cdot \frac{v_1^2}{2\alpha} \xrightarrow{(5)} d_2 = 4d_1 .$$

48. (12004, B2) Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση a και αρχική ταχύτητα v_0 . Όταν η ταχύτητα του κινητού υποδιπλασιαστεί θα έχει διανύσει διάστημα ίσο με:

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

(α) $s = \frac{3v_0^2}{4a}$

(β) $s = \frac{3v_0^2}{8a}$

(γ) $s = \frac{2v_0^2}{3a}$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με επιβράδυνση **μέτρου** a .

Στην εξίσωση της ταχύτητας $v = v_0 - at$, αντικαθιστώ $v = \frac{v_0}{2}$ και την επιλύω ως προς t :

$$\frac{v_0}{2} = v_0 - at \Leftrightarrow at = v_0 - \frac{v_0}{2} \Leftrightarrow at = \frac{v_0}{2} \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{2a}. \quad (1)$$

Στην εξίσωση του διαστήματος $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$, αντικαθιστώ το t από τη σχέση (1):

$$s = v_0 \frac{v_0}{2a} - \frac{1}{2}a \left(\frac{v_0}{2a} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2a} - \frac{1}{2}a \frac{v_0^2}{4a^2} = \frac{v_0^2}{2a} - \frac{v_0^2}{8a} = \frac{4v_0^2}{8a} - \frac{v_0^2}{8a} \Leftrightarrow s = \frac{3v_0^2}{8a}.$$

49. (13621, 2.1) Δύο σημειακά κινητά Α και Β κινούνται ευθύγραμμα, με την ίδια, σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$. Από τα διαγράμματα θέσης - χρόνου 1 και 2, ένα αντιστοιχεί στο σημειακό κινητό Α και ένα στο σημειακό κινητό Β. Από τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου 3 και 4, ένα αντιστοιχεί στο σημειακό κινητό Α και ένα στο σημειακό κινητό Β.

A. Αν στο σημειακό κινητό Α αντιστοιχεί το διάγραμμα θέσης - χρόνου 1, τότε, στο ίδιο κινητό θα αντιστοιχεί το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου:

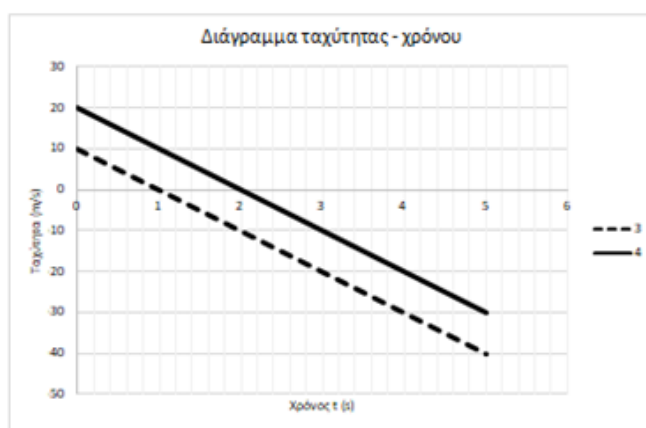
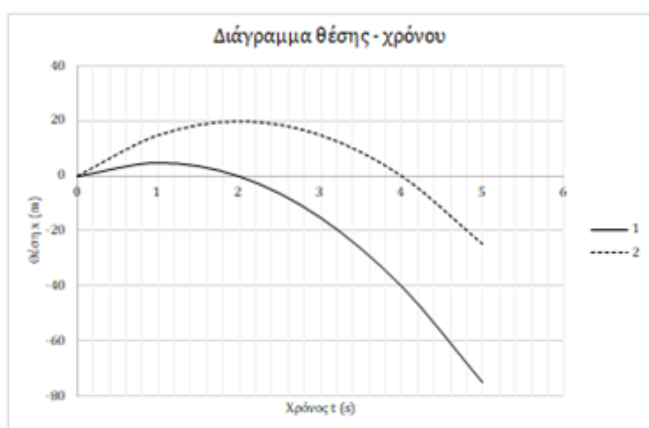
α) 3

β) 4

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Τα κινητά Α, Β εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με την ίδια επιτάχυνση α (αλγεβρική τιμή).

Από το διάγραμμα $x - t$ φαίνεται ότι : $x_{0,A} = x_{0,B} = 0$.

Αν οι αρχικές ταχύτητες των δύο κινητών είναι $v_{0,A}$ και $v_{0,B}$ αντίστοιχα, τότε οι εξισώσεις της μετατόπισης (θέσης) είναι :

$$x_A = v_{0,A}t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (1),$$

$$x_B = v_{0,B}t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (2).$$

Από το διάγραμμα $x - t$ διαπιστώνω ότι σε κάθε χρονική στιγμή η μετατόπιση του κινητού Α (διάγραμμα 1) είναι μικρότερη από του Β (διάγραμμα 2).

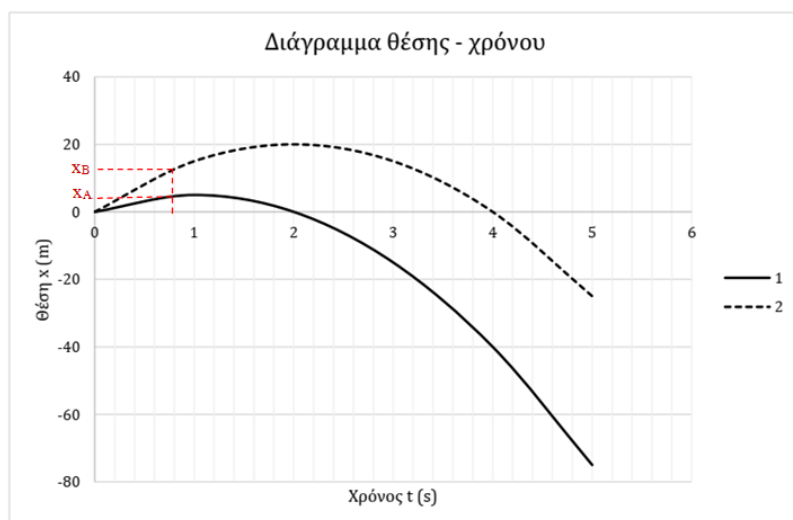
$$\text{Άρα : } x_A < x_B \xrightarrow{(1),(2)}$$

$$v_{0,A}t + \frac{1}{2}\alpha t^2 < v_{0,B}t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Leftrightarrow$$

$$v_{0,A}t < v_{0,B}t \Leftrightarrow v_{0,A} < v_{0,B},$$

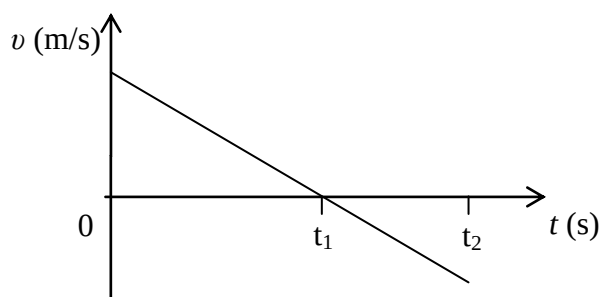
δηλαδή η αρχική ταχύτητα του Α είναι μικρότερη από του Β.

Επομένως, για το κινητό Α το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου είναι το 3.



Συνδυασμοί κινήσεων – Ερωτήσεις με δύο κινητά

50. (7983, B1) Ένα κινητό κινείται ευθύγραμμα και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για το είδος της κίνησης του κινητού ισχύει:

(α) Σε όλο το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_2$ το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

(β) Στο χρονικό διάστημα από $t_1 \rightarrow t_2$ το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

(γ) Στο χρονικό διάστημα από $t_1 \rightarrow t_2$ το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου έχει σταθερή κλίση, άρα η επιτάχυνση είναι σταθερή για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_2$.

Στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ η τιμή της ταχύτητας είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται, άρα στο διάστημα αυτό η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, άρα στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη (προς τη θετική φορά).

Στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$ η τιμή της ταχύτητας είναι αρνητική και το μέτρο της αυξάνεται, άρα στο διάστημα αυτό η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, άρα στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$ η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη (προς την αρνητική φορά).

Σωστή απάντηση : γ.

51. (7990, B1) Ένα όχημα ξεκινά από την ηρεμία και κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο. Στη διπλανή εικόνα παριστάνεται το διάγραμμα της τιμής της επιτάχυνσης του οχήματος σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή $t_1 = 6 \text{ s}$.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

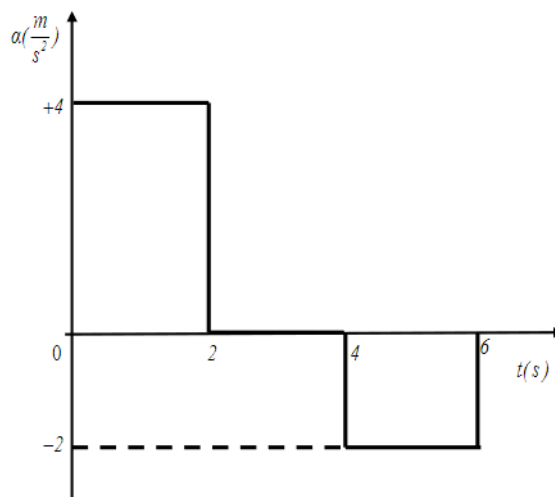
Τη χρονική στιγμή $t_1 = 6 \text{ s}$ η τιμή της ταχύτητας του οχήματος είναι ίση με:

- α)** $+4 \text{ m/s}$
- β)** $+12 \text{ m/s}$
- γ)** -4 m/s

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8



Απάντηση

Στο διάγραμμα $a - t$ το εμβαδό μεταξύ του διαγράμματος και του άξονα t είναι ίσο (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) μεταβολή της ταχύτητας Δv . Επομένως :

$$\Delta v = E_1 + E_2 = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2\text{s}) + \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2\text{s}) = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

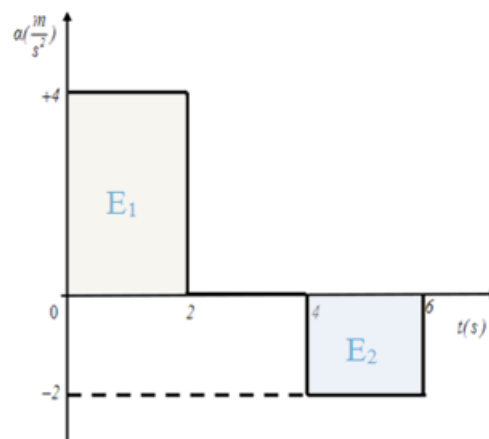
$$\Rightarrow \Delta v = +4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ισχύει :

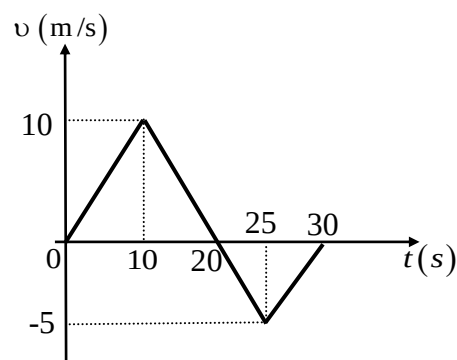
$$\Delta v = v - v_0 \Leftrightarrow v = \Delta v + v_0 \xrightarrow{v_0=0}$$

$$v = \Delta v = +4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα, τη στιγμή $t_1 = 6 \text{ s}$ η ταχύτητα έχει τιμή $v = +4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



52. (7994, B2) Μία μπίλια τη χρονική στιγμή $t = 0$ s, βρίσκεται αρχικά ακίνητη στην θέση $x = 0$ ~~m~~ του οριζόντιου άξονα $x'x$. Η μπίλια τη χρονική στιγμή $t = 0$ s, αρχίζει να κινείται και η τιμή της ταχύτητας της σε συνάρτηση με το χρόνο παριστάνεται στο διπλανό διάγραμμα. Με s και Δx συμβολίζουμε αντίστοιχα το διάστημα που διανύει η μπίλια και τη μετατόπιση της στο χρονικό διάστημα 0 s – 30 s.



A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Για τις τιμές των μεγεθών s και Δx ισχύει:

α) $s = \Delta x = 125$ m

β) $s = 30$ m και $\Delta x = 10$ m

γ) $s = 125$ m και $\Delta x = 75$ m.

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Στο διάγραμμα $v - t$, η (αλγεβρική) τιμή της μετατόπισης Δx είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό μεταξύ του διαγράμματος και του άξονα του χρόνου.

Το διάστημα s είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της μετατόπισης, εφ' όσον δεν αλλάξει η φορά κίνησης.

$$0 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s} : \Delta x_1 = E_1 = \frac{20 \cdot 10}{2} \text{ m} = 100 \text{ m}.$$

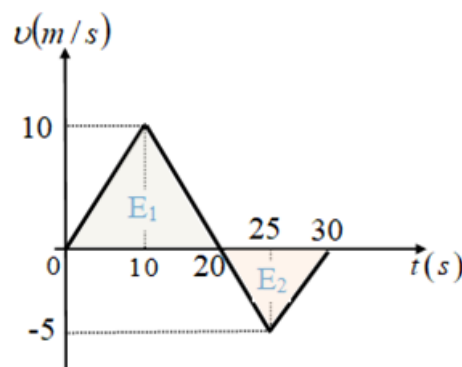
$$s_1 = |\Delta x_1| = 100 \text{ m}.$$

$$20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \Delta x_2 = E_2 = \frac{10 \cdot (-5)}{2} \text{ m} = -25 \text{ m}.$$

$$s_2 = |\Delta x_2| = 25 \text{ m}.$$

$$0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 100 \text{ m} - 25 \text{ m} = 75 \text{ m}.$$

$$s = s_1 + s_2 = 100 \text{ m} + 25 \text{ m} \Rightarrow s = 125 \text{ m}.$$



53. (8010, B1) Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η τιμή της ταχύτητας ενός μικρού σώματος που μετακινείται ευθύγραμμα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

α) το διάστημα που διανύει το σώμα συνεχώς αυξάνεται

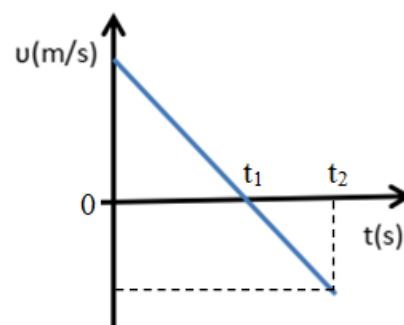
β) το διάστημα που διανύει το σώμα συνεχώς μειώνεται

γ) η μετατόπιση του σώματος συνεχώς αυξάνεται

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8



Απάντηση

Στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$ η ταχύτητα είναι θετική, άρα το σώμα κινείται προς τη θετική φορά.

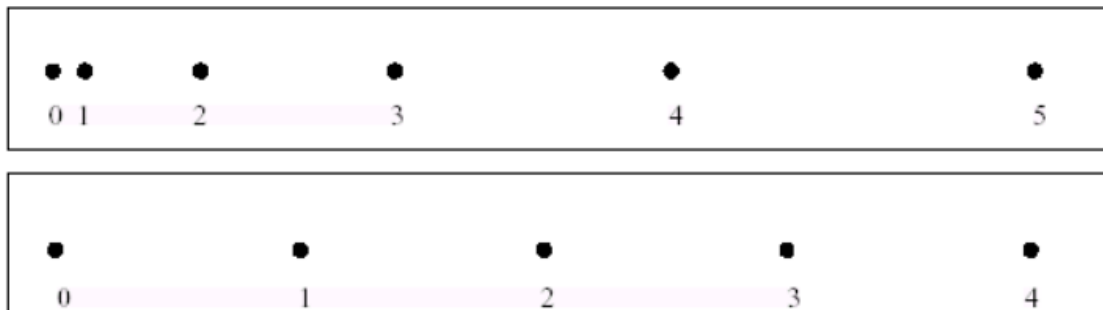
Στη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$ η ταχύτητα είναι αρνητική, άρα το σώμα κινείται προς την αρνητική φορά.

Επομένως, η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης αυξάνεται μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 και στη συνέχεια ελαττώνεται, αφού το σώμα επιστρέφει.

Το διάστημα (το μήκος της διαδρομής) είναι μονόμετρο μέγεθος και αυξάνεται συνεχώς, ανεξάρτητα από τη φορά κίνησης.

Σωστή απάντηση : α.

54. (8011, B1) Μία ομάδα μαθητών της Α΄ Λυκείου στο εργαστήριο Φυσικής μελέτησε δύο ευθύγραμμες κινήσεις με χρήση χρονομετρητή και πήραν τις αντίστοιχες χαρτοταινίες που παριστάνονται στη παρακάτω εικόνα. Η «πάνω» χαρτοταινία αντιστοιχεί στην κίνηση *I* και η «κάτω» στη κίνηση *II*. Το χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί μεταξύ δύο διαδοχικών κουκίδων είναι ίδιο και ίσο με ένα δευτερόλεπτο. Κάτω από κάθε κουκίδα που αντιστοιχεί στη θέση του κινητού, φαίνεται η ένδειξη του χρονομέτρου σε δευτερόλεπτα.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Αν v_1 και v_2 είναι οι μέσες ταχύτητες που αντιστοιχούν στις κινήσεις *I* και *II* κατά το χρονικό διάστημα από 2 s μέχρι 3 s τότε ισχύει:

α) $v_1 = v_2$

β) $v_1 > v_2$

γ) $v_1 < v_2$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

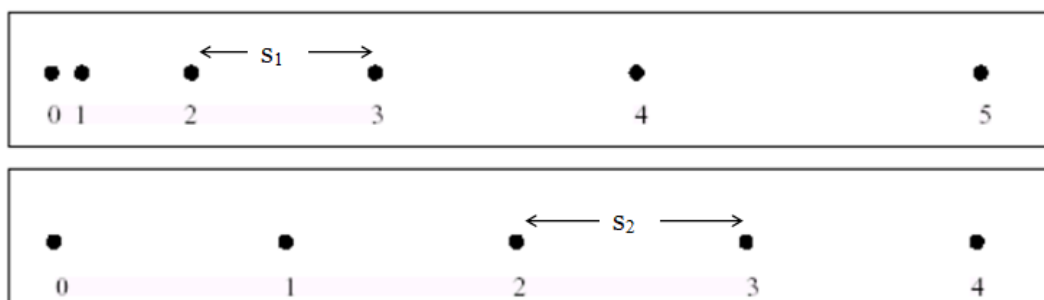
Μονάδες 8

Απάντηση

Η μέση ταχύτητα κάθε κινητού σε χρονική διάρκεια Δt υπολογίζεται από τις σχέσεις :

$$v_1 = \frac{s_1}{\Delta t} \quad (1)$$

$$v_2 = \frac{s_2}{\Delta t} \quad (2)$$



Από τις χαρτοταινίες φαίνεται ότι στην ίδια χρονική διάρκεια $\Delta t = 3 \text{ s} - 2 \text{ s} = 1 \text{ s}$, το κινητό 1 διανύει μικρότερη απόσταση από το κινητό 2, επομένως :

$$s_1 < s_2 \xrightarrow{(1),(2)} v_1 < v_2.$$

55. (8015, B1) Μία μπίλια κινείται πάνω στον άξονα $x'x$ και τη στιγμή $t = 0$ s βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ m. Η τιμή της ταχύτητας της μπίλιας σε συνάρτηση με το χρόνο παριστάνεται στο διπλανό διάγραμμα.

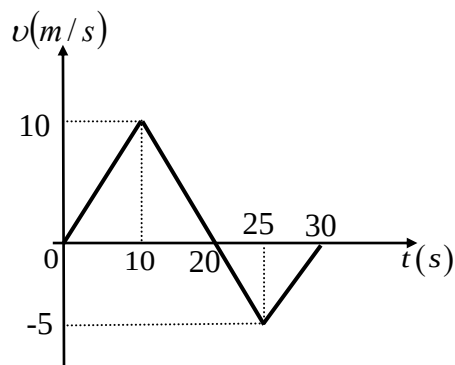
A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Η μπίλια τη χρονική στιγμή $t = 30$ s βρίσκεται στη θέση

- α)** 125 m **β)** 100 m **γ)** 75 m

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας



Μονάδες 8

Απάντηση

Στο διάγραμμα $v - t$, η (αλγεβρική) τιμή της μετατόπισης Δx είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό μεταξύ του διαγράμματος και του άξονα t .

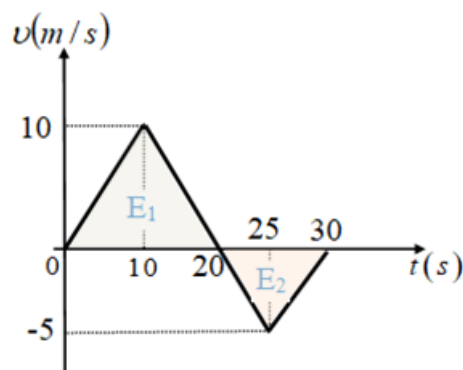
Άρα :

$$\Delta x = E_1 + E_2 = \frac{20 \cdot 10}{2} \text{ m} + \frac{10 \cdot (-5)}{2} \text{ m} = 100 \text{ m} - 25 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Delta x = 75 \text{ m}.$$

Ισχύει :

$$\Delta x = x - x_0 \xrightarrow{x_0 = 0} x = \Delta x \Rightarrow x = 75 \text{ m}.$$



56. (8021, B1) Αυτοκίνητο είναι αρχικά ακίνητο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ο οδηγός του αυτοκινήτου, πατάει το γκάζι οπότε το αυτοκίνητο αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$. Τη χρονική στιγμή t_1 , το μέτρο της επιτάχυνσης αρχίζει να ελαττώνεται μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 οπότε και μηδενίζεται.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

(α) Το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου την χρονική στιγμή t_2 είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή t_1 .

(β) Το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου την χρονική στιγμή t_2 είναι ίσο με μηδέν.

(γ) Στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ το αυτοκίνητο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ενώ στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$ εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κατά τη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$ το αυτοκίνητο έχει σταθερή επιτάχυνση και το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται, δηλαδή το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη **ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση.

Κατά τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$ το αυτοκίνητο έχει επιτάχυνση ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα, άρα εκτελεί ευθύγραμμη (όχι ομαλά) **επιταχυνόμενη** κίνηση. Αφού επιταχύνεται, άρα αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητας.

Επομένως, **το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_2 είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1 .**

57. (8028, B2) Αυτοκίνητο κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο. Στη διπλανή εικόνα παριστάνεται η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με το χρόνο.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

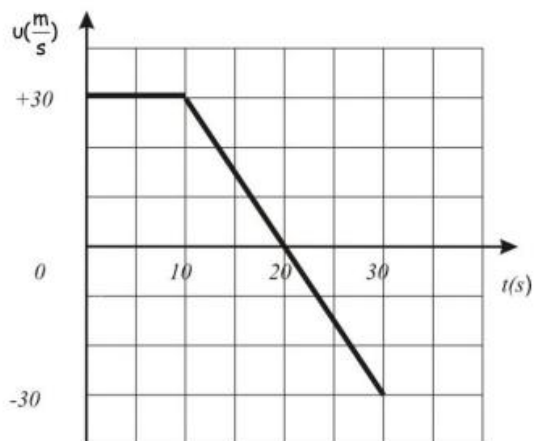
Η μετατόπιση του αυτοκινήτου κατά το χρονικό διάστημα από 0 s - 30 s είναι:

α) +300 m **β)** +600 m **γ)** -300 m

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9



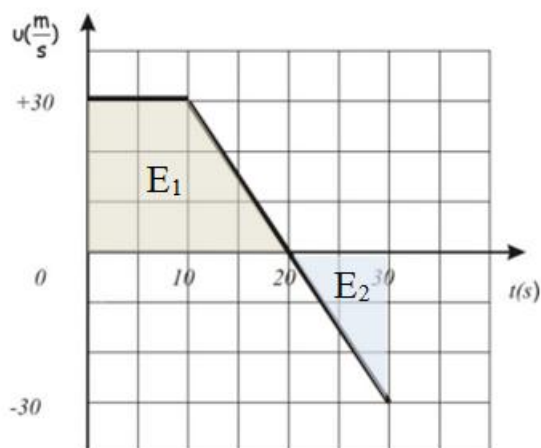
Απάντηση

Το εμβαδό στο διάγραμμα $v - t$ είναι ίσο (αριθμητικά) με την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx .

$$0 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s} : \Delta x_1 = E_1 = \frac{(20+10) \cdot 30}{2} \text{ m} = 450 \text{ m}.$$

$$20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \Delta x_2 = E_2 = \frac{10 \cdot (-30)}{2} \text{ m} = -150 \text{ m}.$$

$$0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 450 \text{ m} - 150 \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 300 \text{ m}.$$



Εναλλακτική απάντηση

0 s $\rightarrow$ 10 s : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

$$\Delta x_1 = v_0(\Delta t_1) = (30 \cdot 10) \text{ m} = 300 \text{ m}.$$

10 s $\rightarrow$ 30 s : ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

$$\text{Εφαρμόζω τη σχέση } \Delta x = \frac{v + v_0}{2} \cdot (\Delta t).$$

$$\Delta x_2 = \frac{(-30 + 30) \cdot 20}{2} \text{ m} = 0 \text{ m}.$$

$$0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 300 \text{ m} + 0 \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 300 \text{ m}.$$

58. (8039, B2) Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα ομαλά. Ένα ακίνητο περιπολικό, μόλις περνά το αυτοκίνητο από μπροστά του, αρχίζει να το καταδιώκει με σταθερή επιτάχυνση.

A) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Τη στιγμή που το περιπολικό φθάνει το αυτοκίνητο:

- α) η ταχύτητα του περιπολικού είναι ίση με την ταχύτητα του αυτοκινήτου
- β) η ταχύτητα του περιπολικού είναι διπλάσια από την ταχύτητα του αυτοκινήτου
- γ) η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι τριπλάσια από την ταχύτητα του περιπολικού.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του περιπολικού τη στιγμή που συναντώνται και s_1, s_2 τα διαστήματα που διάνυσαν τα δύο οχήματα μέχρι να συναντηθούν.

Για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του αυτοκινήτου ισχύει η εξίσωση : $s_1 = v_1 t$. (1)

Το περιπολικό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το διάστημα που διανύει το περιπολικό σε χρόνο t υπολογίζεται από τη σχέση :

$$s_2 = \frac{v_2 + v_0}{2} \cdot t \Rightarrow s_2 = \frac{1}{2} v_2 t. \quad (2)$$

Τη στιγμή που το περιπολικό φθάνει το αυτοκίνητο, ισχύει :

$$s_2 = s_1 \xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{2} v_2 t = v_1 t \Leftrightarrow \frac{1}{2} v_2 = v_1 \Leftrightarrow v_2 = 2 v_1.$$

Σχόλιο :

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει «μόλις περνά το αυτοκίνητο **δίπλα** από το περιπολικό» και όχι «από μπροστά του».

59. (8052, B2) Μαθητής της Α' Λυκείου παρατηρεί στο σχήμα τη γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου ενός αυτοκινήτου, που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο.

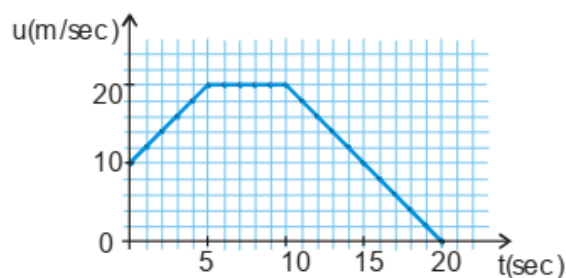
Ο μαθητής κάνει τον παρακάτω συλλογισμό, ερμηνεύοντας τη μορφή του διαγράμματος:

«Η επιταχυνόμενη κίνηση διαρκεί 5 s (από 0 s έως 5 s), ενώ η επιβραδυνόμενη διαρκεί 10 s (από 10 s έως 20 s) .

Αφού λοιπόν το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε η ταχύτητα του αυτοκινήτου να μηδενιστεί είναι μεγαλύτερο από το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να αυξηθεί η ταχύτητά του σε 20 m/s, συμπεραίνω ότι η επιτάχυνση έχει μεγαλύτερο μέτρο από την επιβράδυνση»

Να επιβεβαιώσετε ή να διαψεύσετε τον παραπάνω συλλογισμό, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 13



Απάντηση

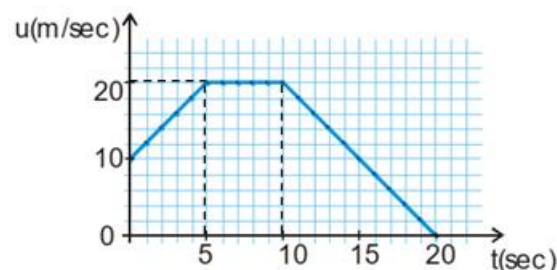
Υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης στα ζητούμενα χρονικά διαστήματα.

0 s → 5 s

$$\alpha_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{(20 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(5 - 0) \text{s}} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{s}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

10 s → 20 s

$$\alpha_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{(0 - 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(20 - 10) \text{s}} = \frac{-20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{s}} \Rightarrow \alpha_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Επομένως, το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ίσο με το μέτρο της επιβράδυνσης : $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος.

60. (12016, B2) Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Κάποια χρονική στιγμή ($t_0 = 0$), ο οδηγός του αυτοκινήτου αντιλαμβάνεται ένα εμπόδιο.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού (το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη χρονική στιγμή που ο οδηγός αντιλαμβάνεται το εμπόδιο, μέχρι τη χρονική στιγμή που

ενεργοποιεί το σύστημα πέδησης του αυτοκινήτου) είναι $t_{\text{αντ.}} = 1 \text{ s}$ και η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιβράδυνσης που μπορεί να αναπτύξει το αυτοκίνητο είναι $\alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, το μέτρο της ελάχιστης μετατόπισης Δx που απαιτείται για να ακινητοποιηθεί το αυτοκίνητο είναι:

- α) $\Delta x = 60 \text{ m}$, β) $\Delta x = 100 \text{ m}$, γ) $\Delta x = 80 \text{ m}$.

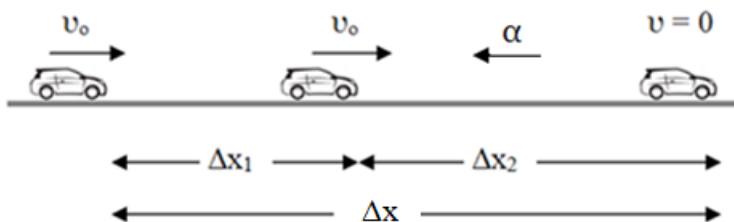
Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Από τη στιγμή που ο οδηγός είδε το εμπόδιο μέχρι να πατήσει το φρένο (για χρονική διάρκεια $t_{\text{αντ}} = 1 \text{ s}$), το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Το μέτρο της μετατόπισης σε αυτό το

διάστημα είναι : $\Delta x_1 = v_0 t_{\text{αντ}} = \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(1\text{s}) \Rightarrow \Delta x_1 = 20 \text{ m}$.

Στη συνέχεια το αυτοκίνητο επιβραδύνεται μέχρι να σταματήσει.

Αν η επιβράδυνση του αυτοκινήτου έχει σταθερό μέτρο α , τότε η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.

Στην εξίσωση της ταχύτητας $v_2 = v_0 - \alpha(\Delta t_2)$, αντικαθιστώ $v_2 = 0$ και την επιλύω ως προς Δt_2 :

$$0 = v_0 - \alpha(\Delta t_2) \Leftrightarrow \alpha(\Delta t_2) = v_0 \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{v_0}{\alpha} \quad (1)$$

Στην εξίσωση της μετατόπισης $\Delta x_2 = v_0(\Delta t_2) - \frac{1}{2}\alpha(\Delta t_2)^2$, αντικαθιστώ το Δt_2 από τη σχέση (1) :

$$\Delta x_2 = v_0 \frac{v_0}{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha \frac{v_0^2}{\alpha^2} = \frac{v_0^2}{\alpha} - \frac{v_0^2}{2\alpha} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{v_0^2}{2\alpha} \quad (2)$$

Όταν η επιβράδυνση έχει μέγιστο μέτρο (α_{max}), τότε η μετατόπιση του αυτοκινήτου μέχρι να σταματήσει είναι ελάχιστη [$\Delta x_{2(\text{min})}$].

Για $\alpha = \alpha_{\text{max}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η ελάχιστη μετατόπιση του αυτοκινήτου μέχρι να

σταματήσει έχει μέτρο : $\Delta x_{2(\text{min})} = \frac{v_0^2}{2\alpha_{\text{max}}} = \frac{20^2}{2 \cdot 5} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{2(\text{min})} = 40 \text{ m}$.

Επομένως, η ελάχιστη συνολική μετατόπιση έχει μέτρο :

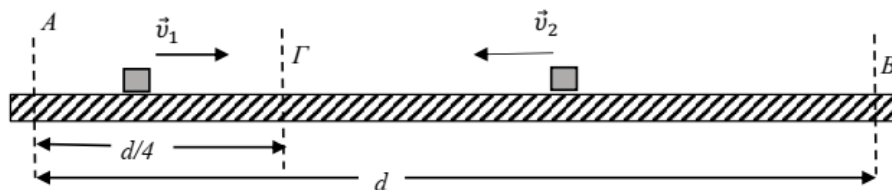
$$\Delta x_{\text{min}} = \Delta x_1 + \Delta x_{2(\text{min})} = (20 + 40) \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{min}} = 60 \text{ m}.$$

Σχόλιο :

Η εκφώνηση αναφέρει ότι «η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιβράδυνσης που μπορεί να αναπτύξει το αυτοκίνητο είναι $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ».

Αυτό όμως δεν εξασφαλίζει ότι η επιβράδυνση έχει σταθερό μέτρο $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης.

61. (12317, B2) Δύο αθλητές ποδηλασίας προπονούνται στο ποδηλατοδρόμιο κινούμενοι αντίθετα. Στο ευθύγραμμο και οριζόντιο τμήμα της πίστας $(AB) = d$ του σχήματος τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο ποδηλάτης (1) διέρχεται από το σημείο Α με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_1 , ενώ ο ποδηλάτης (2) διέρχεται από το σημείο Β με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_2 .



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν οι δύο ποδηλάτες συναντώνται στο σημείο Γ που απέχει $d/4$ από το σημείο Α για τα μέτρα των ταχυτήτων τους, τα οποία παραμένουν συνεχώς σταθερά κατά τη διάρκεια της κίνησης, ισχύει:

- α) $v_2 = 4 \cdot v_1$, β) $v_2 = 3 \cdot v_1$, γ) $v_2 = 2 \cdot v_1$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κάθε ποδηλάτης εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Τα διαστήματα που διανύουν οι ποδηλάτες σε χρόνο t υπολογίζονται από τις σχέσεις :

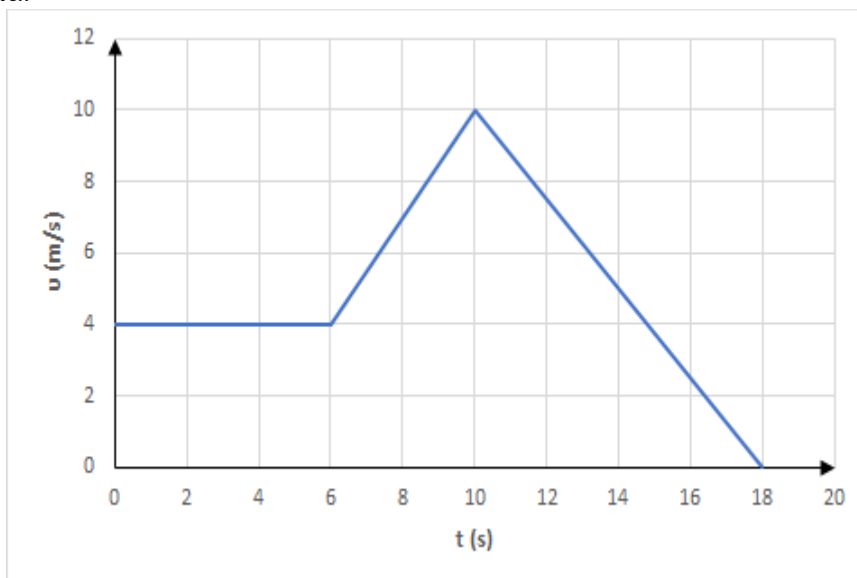
$$s_1 = v_1 t \quad (1), \quad s_2 = v_2 t \quad (2).$$

(v_1, v_2 είναι τα μέτρα των ταχυτήτων τους)

Σύμφωνα με την εκφώνηση, τη στιγμή που συναντώνται ισχύει :

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = \frac{d}{4} \\ s_2 = \frac{3d}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow s_2 = 3s_1 \xrightarrow{(1),(2)} v_2 t = 3v_1 t \Rightarrow v_2 = 3v_1.$$

62. (12855, B2) Σώμα κινείται ευθύγραμμα και το μέτρο v της ταχύτητάς του μεταβάλλεται χρονικά όπως στο διάγραμμα.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος έχουν την ίδια κατεύθυνση στο χρονικό διάστημα:

α) (0 , 6 s) β) (6 s , 10 s) γ) (10 s , 18 s)

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια κατεύθυνση μόνο στην ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση,

Επιταχυνόμενη είναι η κίνηση στο χρονικό διάστημα (6 s, 10 s), αφού το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται.

Σωστή απάντηση : β).

63. (13106, B1) Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα μέτρου $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ σε περιοχή με κακή ορατότητα λόγω ομίχλης.

Βγαίνοντας ξαφνικά από την ομίχλη, ο οδηγός αντιλαμβάνεται ακίνητο εμπόδιο μπροστά του και φυσικά αποφασίζει να φρενάρει. Τη στιγμή που αντιλαμβάνεται το εμπόδιο (έστω $t_0 = 0$), η απόστασή του από αυτό είναι 60 m και ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού 0,5 s.

Κατά το φρενάρισμα το όχημα επιβραδύνεται, με επιβράδυνση σταθερού μέτρου.

Με τη βοήθεια του διαγράμματος, όπου αποδίδεται το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου ως προς το χρόνο:

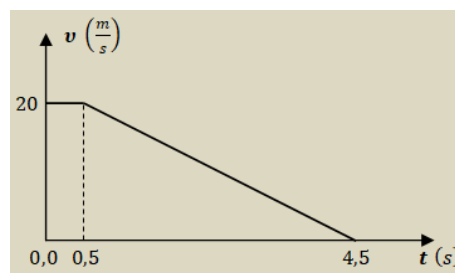
A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την τελική απόσταση d του αυτοκινήτου από το εμπόδιο, όταν έχει σταματήσει:

- i. $d = 50 \text{ m}$, ii. $d = 10 \text{ m}$, iii. $d = 20 \text{ m}$.

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8



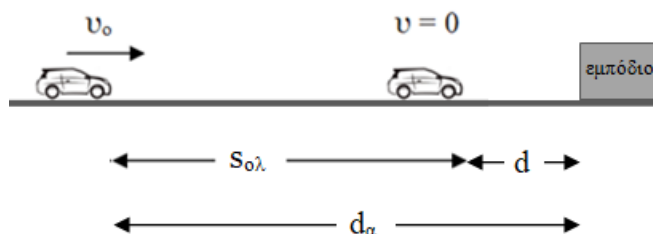
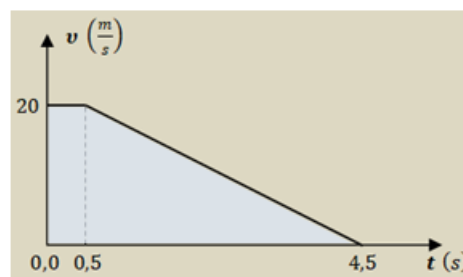
Απάντηση

Το συνολικό διάστημα που διανύει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει, είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραπεζίου που σχηματίζεται στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

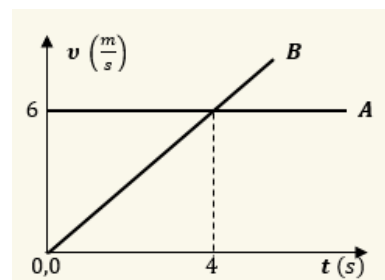
$$s_{\text{ολ}} = E_{\text{τραπ}} = \frac{(4,5 + 0,5) \cdot 20}{2} \text{ m} = 50 \text{ m}.$$

Αν $d_a = 60 \text{ m}$ η αρχική απόσταση από το εμπόδιο, η απόσταση d από το εμπόδιο τη στιγμή που σταματά, είναι :

$$d = d_a - s_{\text{ολ}} = 60 \text{ m} - 50 \text{ m} \Rightarrow d = 10 \text{ m}.$$



64. (13107, 2.1) Δύο κινητά, το Α και το Β, κινούνται ευθύγραμμα, σε παράλληλες τροχιές, προς την ίδια κατεύθυνση. Στο διπλανό διάγραμμα αποδίδονται τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο κινητών, σε συνάρτηση με το χρόνο, από μια χρονική στιγμή $t_0 = 0$, κατά την οποία τα δύο κινητά ήταν δίπλα-δίπλα.



A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Με τη βοήθεια του διαγράμματος, μπορούμε να συμπεράνουμε, ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s

- i. τα δύο κινητά είναι και πάλι δίπλα-δίπλα
- ii. το κινητό Α προπορεύεται του κινητού Β κατά 12 m
- iii. το κινητό Β προπορεύεται του κινητού Α κατά 12 m

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Υπολογίζω το διάστημα που διάνυσε κάθε κινητό κατά τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$, από το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα $v - t$:

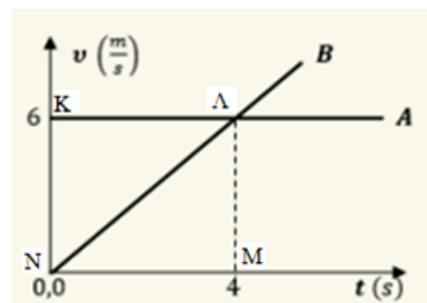
$$s_A = E_{K\Lambda MN} = 6 \cdot 4 \text{ m} = 24 \text{ m}.$$

$$s_B = E_{\Lambda MN} = \frac{6 \cdot 4}{2} \text{ m} = 12 \text{ m}.$$

Διαπιστώνω ότι :

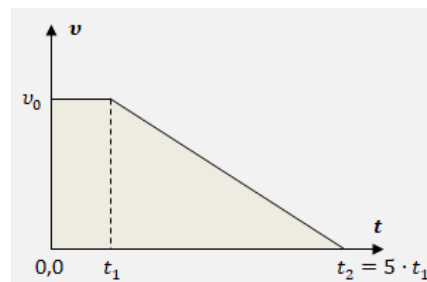
$$s_A - s_B = 24 \text{ m} - 12 \text{ m} \Rightarrow s_A - s_B = 12 \text{ m}.$$

Αφού τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ήταν δίπλα-δίπλα, άρα τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το κινητό Α προπορεύεται του Β κατά 12 m.



65. (13347, 2.1) Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_0 σε περιοχή με κακή ορατότητα λόγω ομίχλης. Βγαίνοντας από την ομίχλη, ο οδηγός αντιλαμβάνεται ξαφνικά μπροστά του ακίνητο εμπόδιο και φυσικά αποφασίζει να φρενάρει.

Ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού είναι t_1 . Στο διπλανό διάγραμμα αποδίδεται το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη στιγμή που ο οδηγός αντιλαμβάνεται το εμπόδιο ($t_0 = 0$), μέχρι να σταματήσει ($t_2 = 5 \cdot t_1$).



Το μέτρο v_μ της μέσης ταχύτητας του οχήματος, για το χρονικό διάστημα $[0, t_2]$ είναι:

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

i. $v_\mu = \frac{1}{2} \cdot v_0$,

ii. $v_\mu = \frac{1}{5} \cdot v_0$,

iii. $v_\mu = \frac{3}{5} \cdot v_0$.

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήστε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το διάστημα s που διάνυσε το αυτοκίνητο στη χρονική διάρκεια $[0, t_2]$ είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραpezίου στο διάγραμμα $v - t$:

$$s = E_{\text{trap}} = \frac{(t_2 + t_1)v_0}{2} = \frac{(5t_1 + t_1)v_0}{2} = \frac{6t_1v_0}{2} = 3t_1v_0.$$

Η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$v_\mu = \frac{s}{t_2} = \frac{3t_1v_0}{5t_1} \Rightarrow v_\mu = \frac{3}{5}v_0.$$

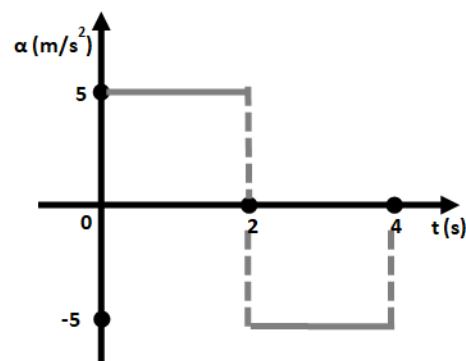
66. (13465, B1) Κινητό ξεκινά από την ηρεμία και κινείται για χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$. Η επιτάχυνσή του σε σχέση με τον χρόνο μεταβάλλεται σύμφωνα με το διπλανό διάγραμμα. Την χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κινητού θα είναι:

Α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. $v = -10 \text{ m/s}$

β. $v = 0 \text{ m/s}$

γ. $v = +20 \text{ m/s}$



Μονάδες 4

Β. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

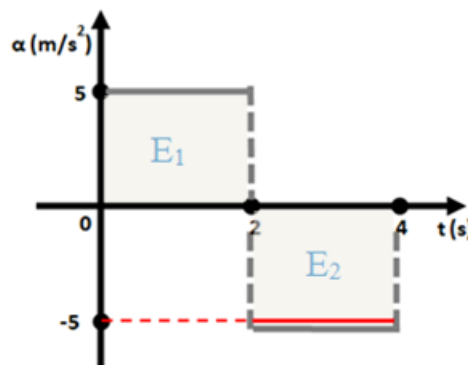
Υποθέτω ότι το σώμα κινείται ευθύγραμμα στον άξονα x' .

Στο διάγραμμα $a - t$, το εμβαδό είναι ίσο (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) μεταβολή της ταχύτητας Δv :

$$\Delta v = E_1 + E_2 = (5 \cdot 2 - 5 \cdot 2) \text{ m/s} \Rightarrow \Delta v = 0 \text{ m/s}.$$

$$\text{Ισχύει: } \Delta v = v - v_0 \Leftrightarrow v = v_0 + \Delta v \xrightarrow{v_0=0}$$

$$v = 0 \text{ m/s}.$$



Σχόλια :

1) Η εκφώνηση **δεν αναφέρει ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη**.

Οι προηγούμενοι υπολογισμοί ισχύουν μόνο στην περίπτωση που η κίνηση είναι ευθύγραμμη.

2) Το τμήμα του διαγράμματος στη χρονική διάρκεια $2 \text{ s} - 4 \text{ s}$ δεν έχει σχεδιαστεί με ακρίβεια.

67. (13467, B1) Κινητό, του οποίου το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου είναι το επόμενο, αρχίζει να κινείται την χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ κατά την θετική φορά του άξονα xx' .

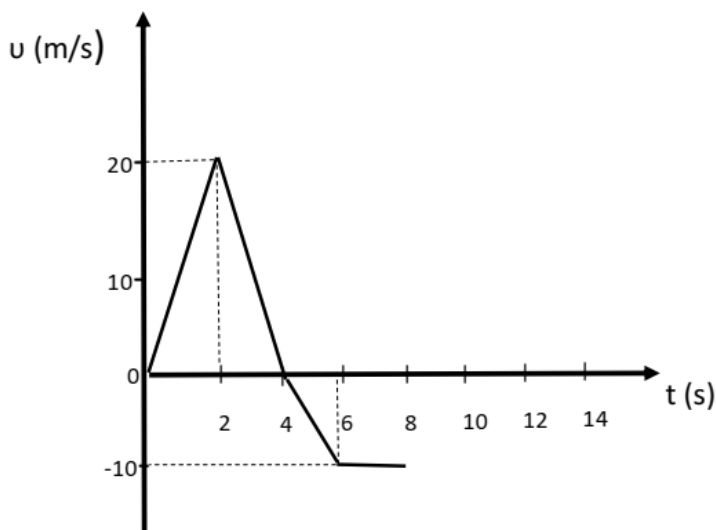
A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

- Το κινητό επιστρέφει για πρώτη φορά στη θέση από την οποία ξεκίνησε την χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$.
- Το κινητό επιστρέφει για πρώτη φορά στη θέση από την οποία ξεκίνησε την χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$.
- Το κινητό επιστρέφει για πρώτη φορά στη θέση από την οποία ξεκίνησε μετά την χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$.

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Όταν το κινητό επιστρέφει στην αρχική του θέση, είναι : $x_{\text{τελ}} = x_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta x = 0$.

Στο διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$ το σώμα κινείται προς τη θετική φορά του άξονα ($v > 0$).

Η τιμή της μετατόπισης είναι :

$$\Delta x_1 = E_{AB\Gamma} = \frac{20 \cdot 4}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 40 \text{ m} .$$

Στο διάστημα $4 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$ το σώμα κινείται προς την αρνητική φορά του άξονα ($v < 0$).

Η τιμή της μετατόπισης είναι :

$$\Delta x_2 = E_{\Gamma\Delta E Z} = \frac{(4+2)(-10)}{2} \text{ m} \Rightarrow$$

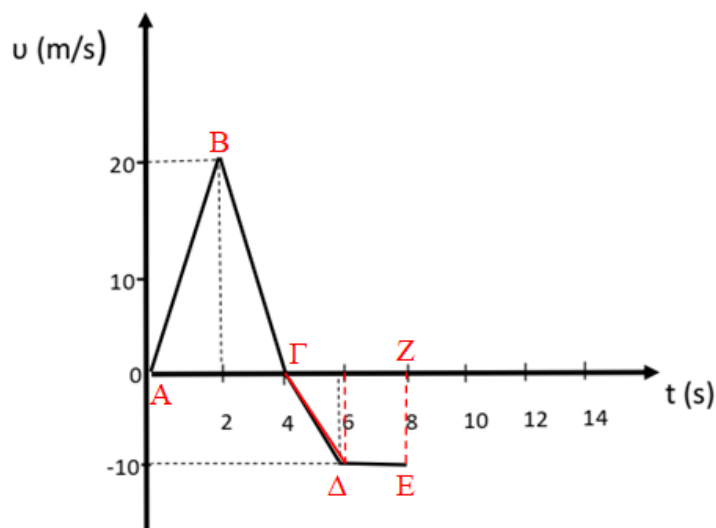
$$\Delta x_2 = -30 \text{ m} .$$

Η συνολική μετατόπιση για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$ έχει τιμή :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 40 \text{ m} - 30 \text{ m} = 10 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} > 0 .$$

Συμπέρασμα

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$ το κινητό δεν έχει επιστρέψει στην αρχική του θέση, επομένως θα επιστρέψει μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$.



Σχόλιο

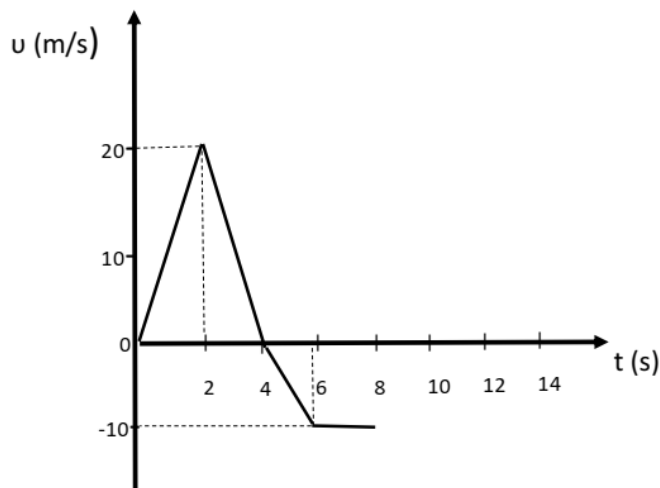
Τα τμήματα του διαγράμματος στις χρονικές διάρκειες $4 \text{ s} \rightarrow 6 \text{ s}$, $6 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$ δεν έχουν σχεδιαστεί με ακρίβεια.

68. (13468, B1)

Το επόμενο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου αντιστοιχεί σε ένα κινητό, το οποίο αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα, την χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ κατά την θετική φορά του άξονα $x'x$.

A. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Μονάδες 4



Χρονικό Διάστημα (Δt) (s)	Είδος και φορά κίνησης	Επιτάχυνση (α) $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$
0-2		
2-4		
4-6		
6-8		

B. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

0 s $\rightarrow$ 2 s

Η ταχύτητα έχει θετικές τιμές και το μέτρο της αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη προς τη θετική φορά.

$$\text{Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι : } \alpha_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{(20-0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(2-0) \text{s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

2 s $\rightarrow$ 4 s

Η ταχύτητα έχει θετικές τιμές και το μέτρο της μειώνεται με σταθερό ρυθμό, άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη προς τη θετική φορά.

$$\text{Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι : } \alpha_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{(0-20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(4-2) \text{s}} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4 s $\rightarrow$ 6 s

Η ταχύτητα έχει αρνητικές τιμές και το μέτρο της αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη προς την αρνητική φορά.

$$\text{Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι : } \alpha_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} = \frac{(-10-0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(6-4) \text{s}} = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

6 s $\rightarrow$ 8 s

Η ταχύτητα έχει αρνητικές τιμές και το μέτρο της είναι σταθερό, άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή προς την αρνητική φορά.

Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι :
$$\alpha_4 = \frac{\Delta v_4}{\Delta t_4} = \frac{[-10 - (-10)] \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(8-6)\text{s}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Σχόλιο

Τα τμήματα του διαγράμματος στις χρονικές διάρκειες 4 s $\rightarrow$ 6 s, 6 s $\rightarrow$ 8 s δεν έχουν σχεδιαστεί με ακρίβεια.

69. (13469, B1) Το διπλανό διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου αντιστοιχεί σε ένα κινητό, το οποίο αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα, την χρονική στιγμή $t = 0$ κατά την θετική φορά του άξονα $x'x$. Την χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$:

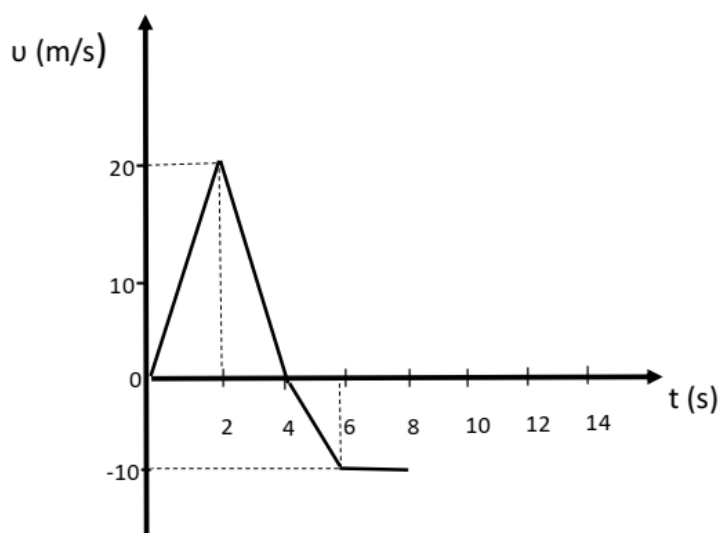
A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

- Το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό είναι $s = 70 \text{ m}$ και η τιμή της μετατόπισής του $\Delta x = +70 \text{ m}$.
- Το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό είναι $s = 70 \text{ m}$ και η τιμή της μετατόπισής του $\Delta x = +10 \text{ m}$.
- Το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό είναι $s = 10 \text{ m}$ και η τιμή της μετατόπισής του $\Delta x = +70 \text{ m}$.

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου, η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό μεταξύ διαγράμματος και άξονα χρόνου, ενώ το διάστημα είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της μετατόπισης (εφόσον δεν αλλάζει η φορά κίνησης).

0 s $\rightarrow$ 4 s : κίνηση προς τη θετική φορά.

$$\Delta x_1 = E_{AB\Gamma} = \frac{20 \cdot 4}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 40 \text{ m}.$$

$$s_1 = |\Delta x_1| = 40 \text{ m}.$$

4 s $\rightarrow$ 8 s : κίνηση προς την αρνητική φορά.

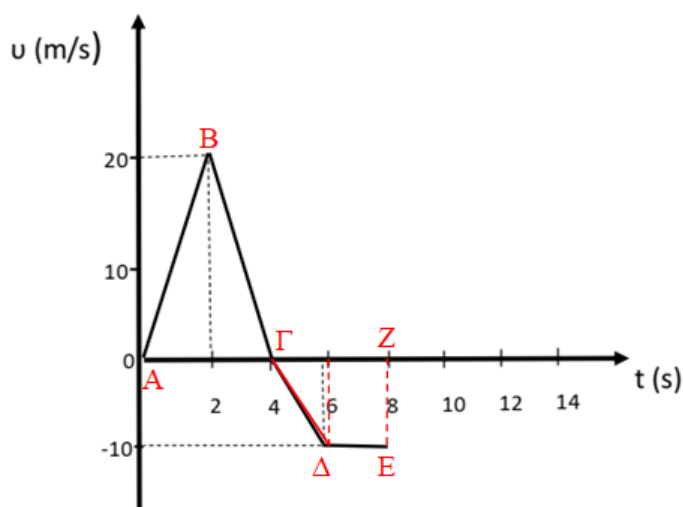
$$\Delta x_2 = E_{\Gamma\Delta E Z} = \frac{(4+2) \cdot (-10)}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = -30 \text{ m}.$$

$$s_2 = |\Delta x_2| = 30 \text{ m}.$$

0 s $\rightarrow$ 8 s :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 40 \text{ m} - 30 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 10 \text{ m}.$$

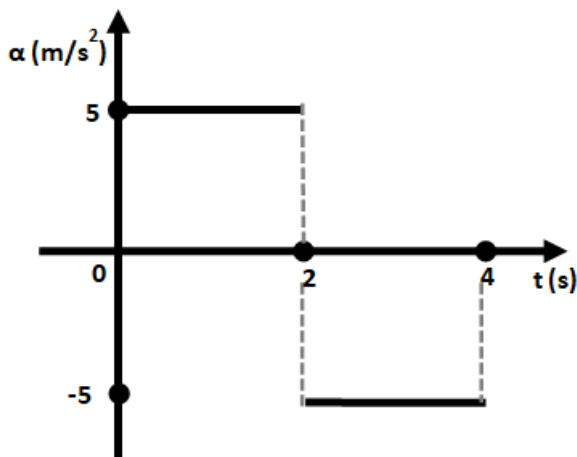
$$s_{\text{ολ}} = s_1 + s_2 = 40 \text{ m} + 30 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 70 \text{ m}.$$



Σχόλιο

Τα τμήματα του διαγράμματος στις χρονικές διάρκειες $4 \text{ s} \rightarrow 6 \text{ s}$, $6 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$ δεν έχουν σχεδιαστεί με ακρίβεια.

70. (13510, 2.1) Η επιτάχυνση ενός κινητού, που κινείται ευθύγραμμα κατά την θετική φορά του άξονα $x'x$, μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο, σύμφωνα με το διπλανό διάγραμμα. Την χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$, η τιμή της ταχύτητας του κινητού είναι $v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Η τιμή της ταχύτητας του κινητού την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ είναι:



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. $v_0 \neq 0 \text{ m/s}$

β. $v_0 = 0 \text{ m/s}$

γ. Τα δεδομένα δεν είναι αρκετά ώστε να απαντήσουμε.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

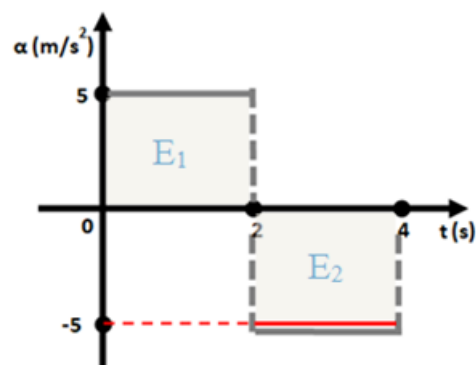
Μονάδες 8

Απάντηση

Στο διάγραμμα $a - t$ το εμβαδό είναι ίσο (αριθμητικά) με την (αλγεβρική) μεταβολή της ταχύτητας Δv :

$$\Delta v = E_1 + E_2 = (5 \cdot 2 - 5 \cdot 2) \text{ m/s} \Rightarrow \Delta v = 0 \text{ m/s}.$$

$$\text{Ισχύει: } \Delta v = v - v_0 \Leftrightarrow v_0 = v - \Delta v \xrightarrow{v=0} v_0 = 0 \text{ m/s}.$$

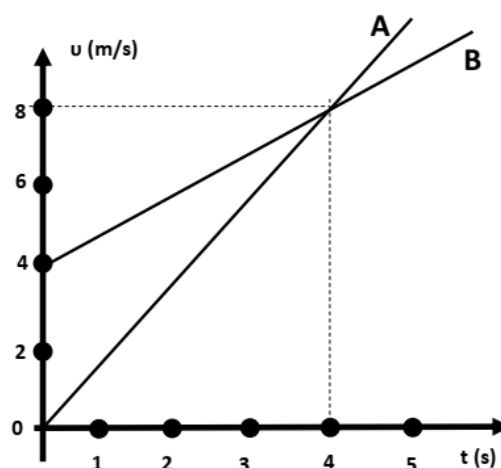


Σχόλια

1) Στην ερώτηση «η τιμή της ταχύτητας του κινητού την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ είναι . . . », δεν μπορεί να δοθεί απάντηση: «τα δεδομένα δεν είναι αρκετά ώστε να απαντήσουμε».

2) Το τμήμα του διαγράμματος στη χρονική διάρκεια $2 \text{ s} - 4 \text{ s}$ δεν έχει σχεδιαστεί με ακρίβεια.

71. (13513, 2.1) Τα κινητά Α και Β κινούνται ευθύγραμμα κατά μήκος του οριζοντίου ημιάξονα Οx του άξονα xx'. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ και τα δύο κινητά βρίσκονται στη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$. Στο διάγραμμα φαίνεται πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα κάθε κινητού σε σχέση με τον χρόνο.



Α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- α. Οι επιταχύνσεις των κινητών είναι αντίστοιχα: $\alpha_A = 1 \text{ m/s}^2, \alpha_B = 2 \text{ m/s}^2$ και την χρον. στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το κινητό Β προηγείται του Α κατά 8 m .
- β. Οι επιταχύνσεις των κινητών είναι αντίστοιχα: $\alpha_A = 2 \text{ m/s}^2, \alpha_B = 1 \text{ m/s}^2$ και την χρον. στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το κινητό Β προηγείται του Α κατά 8 m .
- γ. Οι επιταχύνσεις των κινητών είναι αντίστοιχα: $\alpha_A = 1 \text{ m/s}^2, \alpha_B = 2 \text{ m/s}^2$ και την χρον. στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ τα δύο κινητά βρίσκονται στην ίδια θέση.

Μονάδες 4

Β. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Υπολογίζω την τιμή της επιτάχυνσης και της μετατόπισης κάθε κινητού κατά τη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 4 \text{ s}$.

κινητό Α

$$\alpha_A = \frac{v_A - v_{0,A}}{t - 0} = \frac{(8 - 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(4 - 0) \text{s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Delta x_A = \text{Εμβαδό}(\Gamma \Delta \text{H}) = \frac{8 \cdot 4}{2} \text{ m} = 16 \text{ m}.$$

κινητό Β

$$\alpha_B = \frac{v_B - v_{0,B}}{t - 0} = \frac{(8 - 4) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(4 - 0) \text{s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Delta x_B = \text{Εμβαδό}(\Gamma \text{Z} \Delta \text{H}) = \frac{(8 + 4) \cdot 4}{2} \text{ m} = 24 \text{ m}.$$

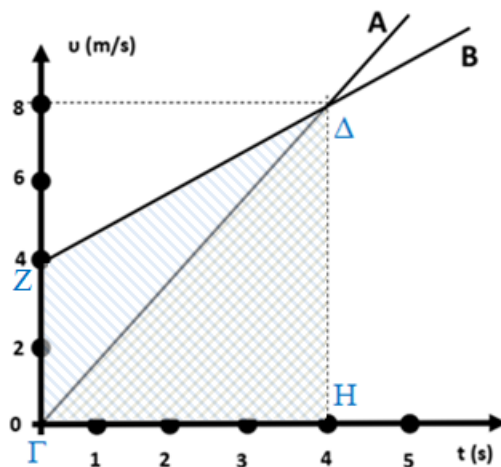
Τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$, οι θέσεις των κινητών είναι :

$$x_A = x_{0,A} + \Delta x_A \Rightarrow x_A = \Delta x_A = 16 \text{ m}.$$

$$x_B = x_{0,B} + \Delta x_B \Rightarrow x_B = \Delta x_B = 24 \text{ m}.$$

$$\text{Ισχύει : } x_B - x_A = 24 \text{ m} - 16 \text{ m} \Rightarrow x_B - x_A = 8 \text{ m}.$$

Άρα, οι επιταχύνσεις των κινητών είναι αντίστοιχα: $\alpha_A = 2 \text{ m/s}^2, \alpha_B = 1 \text{ m/s}^2$ και τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το κινητό Β προηγείται του Α κατά 8 m .



Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού των μετατοπίσεων – θέσεων x_A, x_B

Το κινητό Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_{0,A} = 0$).

Η τιμή της θέσης του τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$x_A = \frac{1}{2} \alpha_A t_1^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 \right) \text{m} = 16 \text{m}.$$

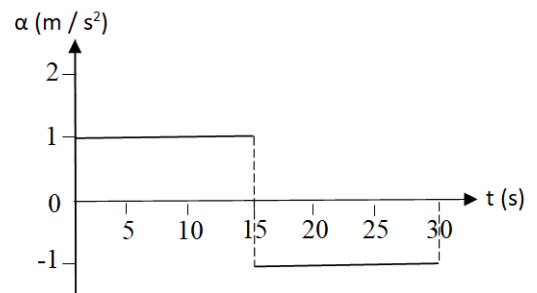
Το κινητό Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Η τιμή της θέσης του τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

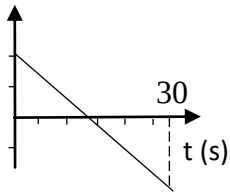
$$x_B = v_{0,B} t_1 + \frac{1}{2} \alpha_B t_1^2 = \left(4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 \right) \text{m} = 24 \text{m}.$$

72. (13570, 2.1) Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε τη μεταβολή της επιτάχυνσης ενός σώματος ως προς το χρόνο κίνησης.

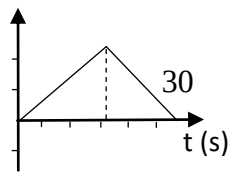
Α. Επιλέξτε ποιο από τα διαγράμματα παριστάνει την τιμή της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο:



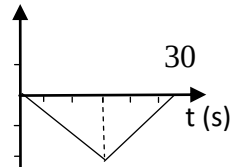
α)
υ (m/s)



β)
υ (m/s)



γ)
υ (m/s)



Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Υποθέτω ότι το σώμα κινείται ευθύγραμμα στον άξονα x'x.

Με βάση το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου, στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 15$ s η μεταβολή της ταχύτητας είναι $\Delta v_1 = a_1 \Delta t_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} > 0$, ενώ στη χρονική διάρκεια $15 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$ η μεταβολή της

ταχύτητας είναι $\Delta v_2 = a_2 \Delta t_2 = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}} < 0$.

Από τα διαγράμματα υ – t που δίνονται, θετική μεταβολή της ταχύτητας στο 1ο διάστημα και αρνητική στο 2ο συμβαίνουν μόνο στο διάγραμμα β.

Όμως τα διαγράμματα υ – t δεν έχουν σχεδιαστεί με ακρίβεια.

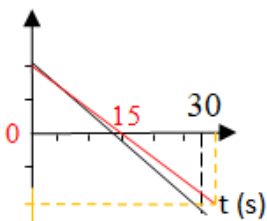
π.χ. στα διαγράμματα α, β το 1ο και το 2ο χρονικό διάστημα δεν είναι ίσα με 15 s.

Επίσης, τα διαγράμματα υ – t δεν έχουν τιμές, οπότε δεν μπορούμε να διαπιστώσουμε π.χ. αν η μεταβολή της ταχύτητας στο 1ο διάστημα είναι ίση με $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

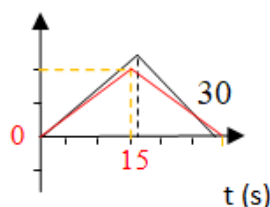
Άρα δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι το διάγραμμα β είναι το σωστό.

Η απάντηση είναι : το διάγραμμα β είναι πιθανό να παριστάνει την τιμή της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

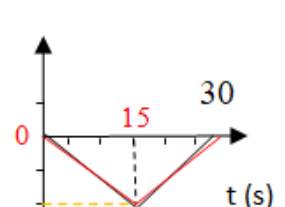
υ (m/s)



υ (m/s)



υ (m/s)



Σχόλιο :

Η εκφώνηση δεν αναφέρει αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη. Τα προηγούμενα συμπεράσματα ισχύουν μόνο στην ευθύγραμμη κίνηση.

73. (14836, 2.2) Δυο αυτοκίνητα Α και Β κινούνται σε ευθύγραμμο δρόμο σε αντίθετες κατευθύνσεις. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s απέχουν απόσταση 800m και κινούνται με ταχύτητες ίσων μέτρων με το Α να βρίσκεται σε σημείο Ο ευθύγραμμου δρόμου και να διατηρεί σταθερή την ταχύτητα του ενώ το Β κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Τα δυο αυτοκίνητα θα συναντηθούν όταν το Α θα έχει διανύσει απόσταση s_A , για την οποία ισχύει:

(α) $s_A < 400$ m

(β) $s_A = 400$ m

(γ) $s_A > 400$ m

A. Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Υποθέτουμε ότι τα αυτοκίνητα κινούνται αντίρροπα, ώστε να πλησιάζουν μεταξύ τους.

Έστω ότι τα αυτοκίνητα θα συναντηθούν μετά από χρόνο t .

Το διάστημα που θα διανύσει το Α υπολογίζεται από τη σχέση : $s_A = v_0 t$. (1)

Το διάστημα που θα διανύσει το Β στον ίδιο χρόνο t

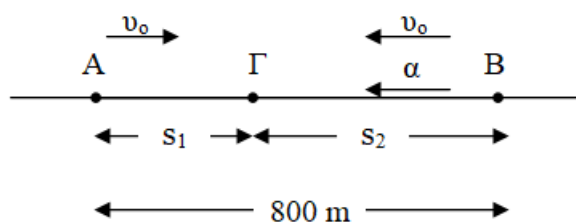
υπολογίζεται από τη σχέση : $s_B = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι : $s_A < s_B$. (3)

Ισχύει επίσης : $s_A + s_B = 800$ m. (4)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (3), (4) :

$$s_A + s_A + s_B < s_B + 800 \text{ m} \Leftrightarrow 2s_A < 800 \text{ m} \Leftrightarrow s_A < 400 \text{ m}.$$



74. (14837, 2.2) Σε αγώνα της formula 1 ένα αυτοκίνητο Α εισέρχεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ σε ευθύγραμμο τμήμα της πίστας με ταχύτητα $50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Εκείνη τη στιγμή ο οδηγός του ενεργοποιεί σύστημα που προσδίδει στο αυτοκίνητο σταθερή επιτάχυνση $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ για όλη την ευθύγραμμη διαδρομή πριν την επόμενη στροφή. Την ίδια στιγμή σε απόσταση 400m από το Α προπορεύεται αυτοκίνητο Β το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Αν το ευθύγραμμο τμήμα της διαδρομής είναι 1000 m και τα δυο αυτοκίνητα μπορούν να θεωρηθούν υλικά σημεία τότε το Α

- (α) δεν προσπερνά το Β μέχρι την επόμενη στροφή
 (β) θα προσπεράσει το Β μετά από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος
 (γ) θα προσπεράσει το Β στο τέλος του ευθύγραμμου τμήματος
 Α. Να επιλέξετε την σωστή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

1ος τρόπος

Το αυτοκίνητο Β θα διανύσει διάστημα $s_B = 600 \text{ m}$ μέχρι να φτάσει στροφή.

Το Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, με εξίσωση : $s_B = v_B t$.

Μέχρι να φτάσει στη στροφή, χρειάζεται χρόνο : $t = \frac{s_B}{v_B} = \frac{600}{50} \text{ s} \Rightarrow t = 12 \text{ s}$.

Το αυτοκίνητο Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Το διάστημα που θα διανύσει σε χρόνο t υπολογίζεται από τη σχέση : $s_A = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Για $t = 12 \text{ s}$, προκύπτει : $s_A = \left(50 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12^2 \right) \text{ m} = (600 + 144) \text{ m} \Rightarrow s_A = 744 \text{ m}$.

Αφού $s_A < 1000 \text{ m}$, άρα το Α δεν θα προλάβει το Β μέχρι τη στροφή.

2ος τρόπος

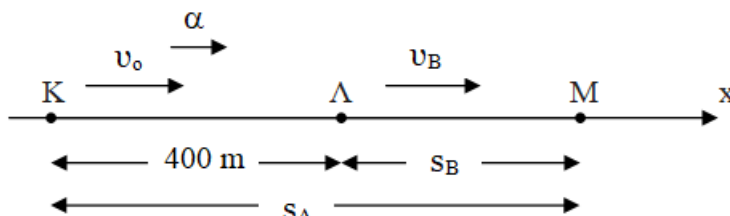
Έστω ότι τα αυτοκίνητα θα συναντηθούν μετά από χρόνο t .

Το διάστημα που θα διανύσει το Α υπολογίζεται από τη σχέση :

$$s_A = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow s_A = 50t + t^2. \quad (1)$$

Το διάστημα που θα διανύσει το Β στον ίδιο χρόνο t υπολογίζεται από τη σχέση :

$$s_B = v_B t \Rightarrow s_B = 50t. \quad (2)$$



$$\text{Ισχύει : } s_A - s_B = 400 \text{ m} \xrightarrow{(1),(2)} 50t + t^2 - 50t = 400 \Leftrightarrow t^2 = 400 \Leftrightarrow t = 20 \text{ s.}$$

$$(1) \Rightarrow s_A = 1400 \text{ m, δηλαδή } s_A > 1000 \text{ m.}$$

Επομένως το Α δεν θα προσπεράσει το Β μέχρι την επόμενη στροφή.

75. (14838, 2.2) Σε έναν αγώνα δρόμου των 800 m αθλητής Α εισέρχεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s στο τελευταίο ευθύγραμμο τμήμα της διαδρομής που έχει μήκος 85 m με ταχύτητα $6 \frac{m}{s}$ και επιταχύνει κινούμενος με σταθερή επιτάχυνση $0,5 \frac{m}{s^2}$ μέχρι τον τερματισμό. Την ίδια στιγμή σε απόσταση 25 m προπορεύεται αθλητής Β κινούμενος μέχρι τον τερματισμό με σταθερή ταχύτητα $6 \frac{m}{s}$.

Από τα δεδομένα αυτά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

(α) ο Α θα τερματίσει πριν από τον Β

(β) οι δυο αθλητές θα τερματίσουν συγχρόνως και ο νικητής θα αναδειχθεί στο photo finish

(γ) ο Α θα τερματίσει μετά από τον Β

Α. Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

1ος τρόπος

Ο αθλητής Β θα διανύσει διάστημα $s_B = 60$ m μέχρι να τερματίσει.

Ο Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, με εξίσωση : $s_B = v_B t$.

Μέχρι να τερματίσει, χρειάζεται χρόνο : $t = \frac{s_B}{v_B} = \frac{60}{6} s \Rightarrow t = 10 s$.

Ο αθλητής Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Το διάστημα που θα διανύσει σε χρόνο t υπολογίζεται από τη σχέση : $s_A = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Για $t = 10$ s, προκύπτει : $s_A = 6 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 10^2 = (60 + 25) m \Rightarrow s_A = 85 m$.

Άρα ο Α θα φτάσει τον Β τη στιγμή του τερματισμού.

2ος τρόπος

Έστω ότι οι αθλητές θα συναντηθούν μετά από χρόνο t .

Το διάστημα που θα διανύσει ο Α υπολογίζεται από τη σχέση :

$$s_A = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow s_A = 6t + 0,25t^2. \quad (1)$$

Το διάστημα που θα διανύσει ο Β στον ίδιο χρόνο t υπολογίζεται από τη σχέση :

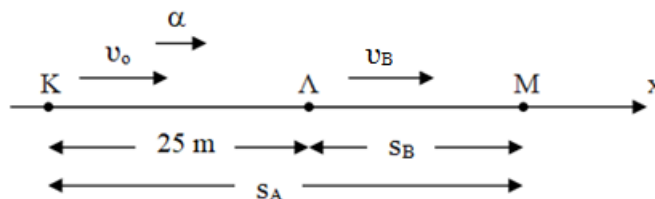
$$s_B = v_B t \Rightarrow s_B = 6t. \quad (2)$$

Τη στιγμή που συναντώνται ισχύει :

$$s_A - s_B = 25 m \xrightarrow{(1), (2)} 6t + 0,25t^2 - 6t = 25 \Leftrightarrow 0,25t^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10 s.$$

$$(1) \Rightarrow s_A = 85 m.$$

Επομένως ο Α θα φτάσει τον Β τη στιγμή του τερματισμού.



76. (14839, 2.2) Σε αγώνα δρόμου των 100 m, αθλητής ξεκινά από την ηρεμία, κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση για χρονικό διάστημα 4 s και αποκτά ταχύτητα $v = 10 \frac{m}{s}$. Στη συνέχεια κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, διατηρώντας την ταχύτητα που απέκτησε τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s μέχρι τον τερματισμό της κούρσας. Η επίδοση (ρεκόρ) του αθλητή, δηλαδή το συνολικό χρονικό διάστημα που απαιτήθηκε για να διανύσει την απόσταση των 100 m, είναι:

- (α) 12s (β) 10s (γ) 15s

A. Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

1ος τρόπος

Ο αθλητής διανύει το 1ο τμήμα της διαδρομής με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α , σε χρόνο $t_1 = 4$ s.

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι :

$$\alpha = \frac{v - 0}{t_1} = \frac{10}{4} \text{ s} \Rightarrow \alpha = 2,5 \frac{m}{s^2}.$$

Στη χρονική διάρκεια 0 s – 4 s διανύει διάστημα :

$$s_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4^2 \text{ m} \Rightarrow s_1 = 20 \text{ m}.$$

Το 2ο τμήμα της διαδρομής έχει μήκος $s_2 = 100 \text{ m} - 20 \text{ m} = 80 \text{ m}$ και το διανύει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 10 \frac{m}{s}$ σε χρονική διάρκεια Δt_2 . Ισχύει :

$$s_2 = v \Delta t_2 \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{s_2}{v} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{80}{10} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_2 = 8 \text{ s}.$$

Η συνολική διάρκεια της διαδρομής είναι : $t_{ολ} = t_1 + \Delta t_2 = 4 \text{ s} + 8 \text{ s} \Rightarrow t_{ολ} = 12 \text{ s}.$

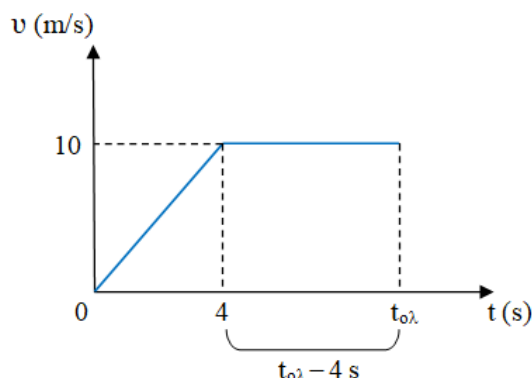
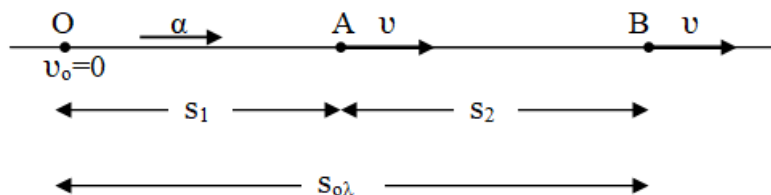
2ος τρόπος

Σχεδιάζω το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε ο αθλητής ($s_{ολ} = 100 \text{ m}$) είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραπεζίου στο διάγραμμα $v - t$, δηλαδή :

$$s_{ολ} = E_{\text{τραπ}} \Leftrightarrow 100 = \frac{[t_{ολ} + (t_{ολ} - 4)] \cdot 10}{2} \Leftrightarrow$$

$$20 = 2t_{ολ} - 4 \Leftrightarrow 2t_{ολ} = 24 \Leftrightarrow t_{ολ} = 12 \text{ s}.$$



77. (14840, 2.2) Δυο αυτοκίνητα Α και Β κινούνται σε ευθύγραμμο δρόμο προς αντίθετες κατευθύνσεις. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ απέχουν απόσταση 800 m. Το Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ενώ το Β ξεκινά από την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση, πλησιάζοντας το Α. Τα δυο αυτοκίνητα συναντώνται τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$.

Α. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Το αυτοκίνητο Β κινείται με επιτάχυνση:

(α) $\alpha = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(β) $\alpha = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

(γ) $\alpha = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Έστω ότι τα αυτοκίνητα θα συναντηθούν στο σημείο Γ μετά από χρόνο $t = 10 \text{ s}$.

Το Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, άρα σε χρονική διάρκεια $t = 10 \text{ s}$ θα διανύσει διάστημα :

$$s_A = v_A t \Rightarrow s_A = 30 \cdot 10 \text{ m} = 300 \text{ m}.$$

Το διάστημα που θα διανύσει το Β στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$s_B = 800 \text{ m} - 300 \text{ m} \Rightarrow s_B = 500 \text{ m}.$$

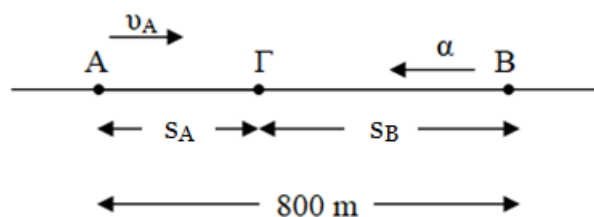
Το Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Αν α είναι το **μέτρο** της επιτάχυνσης του Β, το διάστημα που θα διανύσει σε χρονική διάρκεια $t = 10 \text{ s}$

υπολογίζεται από τη σχέση : $s_B = \frac{1}{2} \alpha t^2$.

Επομένως :

$$\alpha = \frac{2s_B}{t^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 500 \text{ m}}{100 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



79. (14847, 2.2) Ένα αυτοκίνητο αρχικά είναι ακίνητο μπροστά σε ένα φωτεινό σηματοδότη κόκκινου χρώματος. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ο φωτεινός σηματοδότης γίνεται πράσινος και το αυτοκίνητο αρχίζει να κινείται για χρονικό διάστημα 5 s με σταθερή επιτάχυνση οπότε αποκτά ταχύτητα $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Στη συνέχεια κινείται με την ταχύτητα που απέκτησε για χρονικό διάστημα 5 s . Τότε ο οδηγός αντιλαμβάνεται έναν άλλο φωτεινό σηματοδότη να αποκτά πορτοκαλί χρώμα, οπότε πατάει το φρένο και το αυτοκίνητο αρχίζει να επιβραδύνεται για τα επόμενα 6 s , στο τέλος των οποίων ακινητοποιείται.

Αν η κίνηση του αυτοκινήτου είναι ευθύγραμμη και η απόσταση μεταξύ των δυο φωτεινών σηματοδοτών είναι 200 m τότε το αυτοκίνητο σταματά:

(α) πριν από τον σηματοδότη.

(β) ακριβώς δίπλα στον σηματοδότη.

(γ) μετά τον σηματοδότη.

A. Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Υποθέτω ότι η επιβράδυνση του αυτοκινήτου είναι σταθερή.

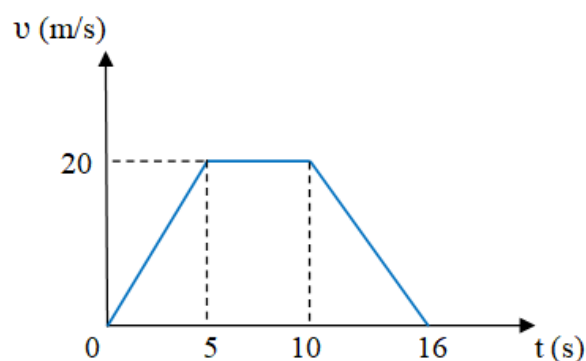
1ος τρόπος

Σχεδιάζω το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

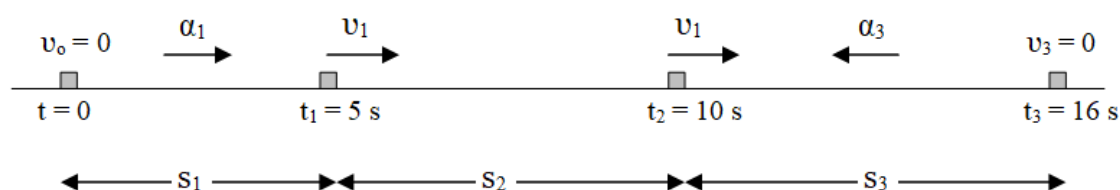
Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραpezίου στο διάγραμμα $v - t$:

$$s_{\text{ολ}} = E_{\text{τραπ}} = \frac{(16+5) \cdot 20}{2} \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 210 \text{ m}.$$

Αφού $s_{\text{ολ}} > 200 \text{ m}$, το αυτοκίνητο σταματά μετά τον 2ο σηματοδότη.



2ος τρόπος



0 s → 5 s: ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

$$s_1 = \frac{(v_0 + v_1)t_1}{2} \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5 \text{ m} \Rightarrow s_1 = 50 \text{ m}.$$

5 s → 10 s: ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

$$s_2 = v_1(\Delta t_2) \Rightarrow s_2 = 20 \cdot 5 \text{ m} \Rightarrow s_2 = 100 \text{ m}.$$

10 s → 16 s: ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου α_3 ($v_3 = 0$).

$$s_3 = \frac{(v_1 + v_3)(\Delta t_3)}{2} \Rightarrow s_3 = \frac{20 \cdot 6}{2} \text{ m} \Rightarrow s_3 = 60 \text{ m}.$$

$$\text{Ισχύει : } s_{\text{ολ}} = s_1 + s_2 + s_3 \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 50 \text{ m} + 100 \text{ m} + 60 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 210 \text{ m}.$$

Αφού $s_{\text{ολ}} > 200 \text{ m}$, το αυτοκίνητο σταματά μετά τον 2ο σηματοδότη.

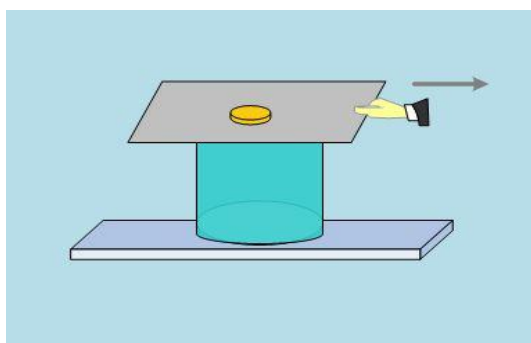
Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι το μέτρο της επιβράδυνσης είναι σταθερό.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Ερωτήσεις Τράπεζας Θεμάτων

Δυνάμεις – Αδράνεια – 1ος νόμος του Newton

1. (12005, B1)



Εικόνα 1



Εικόνα 2

Στο πλαίσιο του μαθήματος της Φυσικής Α Λυκείου, δύο μαθητές ο Α και ο Β εκτελούν τις εξής δραστηριότητες: Ο μαθητής Α τραβά απότομα το γυαλιστερό χαρτόνι, που σκεπάζει ένα ποτήρι, επάνω στο οποίο ισορροπεί ένα νόμισμα (Εικόνα 1). Ο μαθητής Β τραβά απότομα το γυαλιστερό χαρτόνι, το οποίο βρίσκεται επάνω σ' ένα οριζόντιο δάπεδο και επάνω στο χαρτόνι ισορροπεί ένα νόμισμα (Εικόνα 2). Τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων των δύο μαθητών θα είναι:

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

- α.** Και στις δύο δραστηριότητες το νόμισμα κινείται μαζί με το χαρτόνι.
- β.** Στην δραστηριότητα του μαθητή Α, το νόμισμα πέφτει μέσα στο ποτήρι, ενώ στην δραστηριότητα του μαθητή Β, το νόμισμα ακολουθεί το χαρτόνι.
- γ.** Στην δραστηριότητα του μαθητή Α, το νόμισμα πέφτει μέσα στο ποτήρι, ενώ στην δραστηριότητα του μαθητή Β, το νόμισμα παραμένει ακίνητο στην αρχική του θέση και επάνω στο οριζόντιο δάπεδο.

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας .

Μονάδες 9

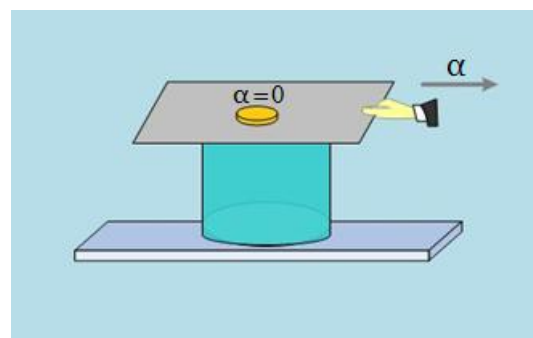
Απάντηση

Αρχικά, κάθε νόμισμα είναι ακίνητο.

Όταν ο μαθητής τραβά απότομα το χαρτόνι, το νόμισμα λόγω αδράνειας τείνει να παραμείνει ακίνητο.

Το χαρτόνι είναι λείο, άρα δεν υπάρχει οριζόντια δύναμη η οποία να επιταχύνει το νόμισμα ώστε να ακολουθήσει την κίνηση του χαρτονιού.

Αφού το χαρτόνι έφυγε από τη θέση του, το νόμισμα Α θα πέσει λόγω της βαρύτητας στο ποτήρι ενώ το Β θα μείνει ακίνητο στο δάπεδο.

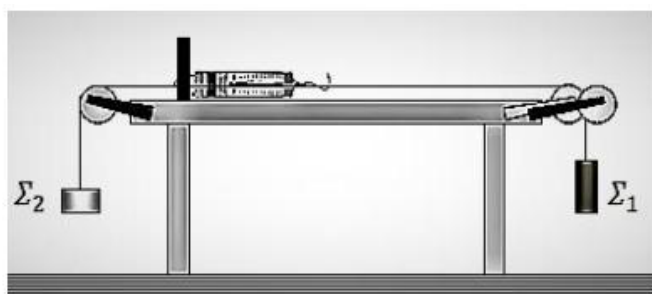
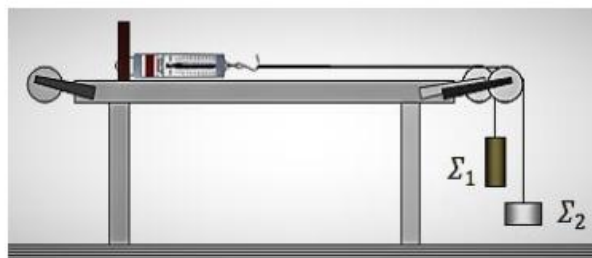


Επισημάνση :

Με την έκφραση «γυαλιστερό χαρτόνι» ο συγγραφέας εννοεί λείο χαρτόνι, δηλαδή μηδενικής τριβής.

2. (13347, 2.2) Μαθητές προσπαθούν να επιβεβαιώσουν πειραματικά, όσα έμαθαν για τη σύνθεση συγγραμμικών δυνάμεων. Στερέωσαν το ένα άκρο ενός δυναμόμετρου σε ακλόνητο σημείο πάνω σε οριζόντιο πάγκο και στα άκρα του πάγκου στερέωσαν τροχαλίες σε κατάλληλες θέσεις. Στον γάντζο του δυναμόμετρου έδεσαν τα άκρα δύο αβαρών και ανελαστικών νημάτων, στα άλλα άκρα των οποίων στερέωσαν δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 . Τα βάρη των δύο σωμάτων είναι $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ αντίστοιχα, για τα μέτρα των οποίων ισχύει $B_1 > B_2$.

Όταν πέρασαν τα δύο νήματα οριζόντια και παράλληλα, στα αυλάκια δύο ιδανικών τροχαλιών, ώστε τα σώματα να τραβούν το δυναμόμετρο προς την ίδια κατεύθυνση, όπως στο διπλανό σχήμα, τότε τα σώματα ισορρόπησαν και το δυναμόμετρο έδειχνε 16 N με το ελατήριό του σε επιμήκυνση.



Όταν πέρασαν τα δύο νήματα οριζόντια και παράλληλα, στα αυλάκια δύο ιδανικών τροχαλιών, ώστε τα δύο σώματα να τραβούν το δυναμόμετρο προς αντίθετες κατευθύνσεις, όπως στο διπλανό σχήμα, τότε τα σώματα ισορρόπησαν και το δυναμόμετρο έδειχνε 4 N, με το ελατήριό του σε μικρότερη επιμήκυνση.

Τα μέτρα των βαρών των δύο σωμάτων είναι:

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

i. $B_1 = 10 \text{ N}, B_2 = 6 \text{ N}.$

ii. $B_1 = 16 \text{ N}, B_2 = 4 \text{ N}.$

iii. $B_1 = 20 \text{ N}, B_2 = 4 \text{ N}.$

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Τα σώματα Σ_1, Σ_2 ισορροπούν, άρα ισχύει :

$$T_1 = B_1, T_2 = B_2.$$

Αφού η μάζα των νημάτων είναι ασήμαντη και οι τροχαλίες είναι ιδανικές, άρα οι δυνάμεις που ασκεί κάθε νήμα στα σώματα που έχουν δεθεί στα άκρα του έχουν ίσα μέτρα : $T_1' = T_1, T_2' = T_2$.

Στην 1η περίπτωση οι δυνάμεις $\vec{T}_1', \vec{T}_2'$ που ασκούνται στο δυναμόμετρο έχουν ίδια κατεύθυνση, άρα :

$$T_1' + T_2' = 16 \text{ N}.$$

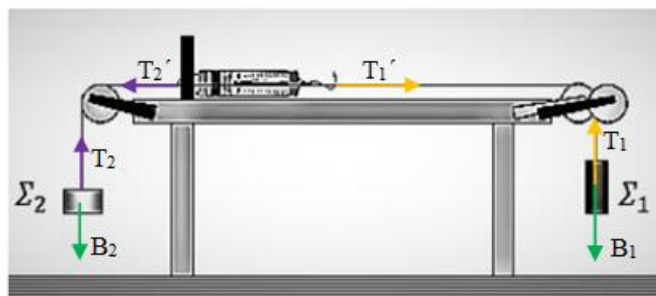
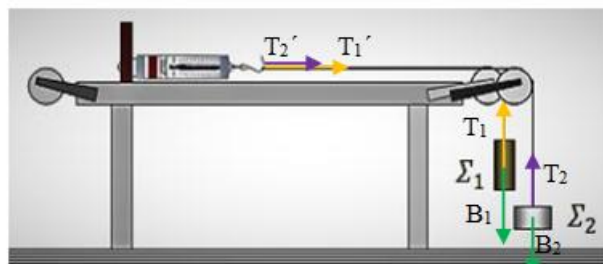
Στη 2η περίπτωση οι δυνάμεις $\vec{T}_1', \vec{T}_2'$ έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, άρα :

$$T_1' - T_2' = 4 \text{ N}.$$

Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε ότι :

$$T_1 = T_1' = 10 \text{ N}, T_2 = T_2' = 6 \text{ N}.$$

Επομένως : $B_1 = 10 \text{ N}, B_2 = 6 \text{ N}.$



Επισημάνση : Η έκφραση «ιδανική τροχαλία» σημαίνει τροχαλία αμελητέας μάζας που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονά της.

3. (14836, 2.1) Ένας αφηρημένος επιβάτης αεροπλάνου ξεχνάει να δέσει τη ζώνη του και η αεροσυνοδός δεν το αντιλαμβάνεται.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Αν η τριβή που ασκεί το κάθισμα στον επιβάτη θεωρηθεί αμελητέα, τότε ο επιβάτης κινδυνεύει περισσότερο:

(α) κατά την απογείωση του αεροπλάνου

(β) κατά την προσγείωση του αεροπλάνου

(γ) εξίσου κατά την απογείωση και την προσγείωση του αεροπλάνου

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια της απογείωσης, το αεροπλάνο αποκτά επιτάχυνση (προς τα εμπρός). Σύμφωνα τον 1ο νόμο του Newton το σώμα του επιβάτη τείνει να παραμείνει ακίνητο. Αφού το αεροπλάνο επιταχύνεται, η πλάτη του καθίσματος έρχεται σε επαφή με το σώμα του επιβάτη, με αποτέλεσμα να του ασκεί δύναμη προς τα εμπρός και το επιταχύνει.

Κατά τη διάρκεια της προσγείωσης, το αεροπλάνο αποκτά επιβράδυνση (προς τα πίσω). Σύμφωνα τον 1ο νόμο του Newton το σώμα του επιβάτη τείνει να διατηρήσει σταθερή την ταχύτητά του κινούμενο προς τα εμπρός (σε σχέση με το αεροπλάνο) με αποτέλεσμα να κινδυνεύει να χτυπήσει στο μπροστινό κάθισμα (εφ' όσον δεν φορά τη ζώνη ασφαλείας).

Σωστή απάντηση : (β).

4. (14838, 2.1) Σώμα Α είναι ακίνητο. Από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκούνται σε αυτό μόνο δυο δυνάμεις ίσων μέτρων και αντίθετων κατευθύνσεων.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Το σώμα Α

(α) παραμένει ακίνητο

(β) κινείται ευθύγραμμα και ομαλά

(γ) κινείται με σταθερή επιτάχυνση

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Οι δύο δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα ($F_1 = F_2 = F$) και αντίθετες κατευθύνσεις.

Θεωρώντας σαν θετική τη φορά της $\vec{F}_1$, η συνισταμένη δύναμη είναι :

$$\Sigma F = F_1 - F_2 = F - F \Rightarrow \Sigma F = 0.$$

Σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton, αφού το σώμα ήταν ακίνητο αρχικά, θα παραμείνει ακίνητο.



5. (14837, 2.1) Διαστημικό σκάφος προσεγγίζει την επιφάνεια της σελήνης. Είναι γνωστό ότι η Σελήνη δεν έχει αμόσφαιρα. Θεωρούμε ότι στο σκάφος ασκείται σταθερή βαρυτική δύναμη από τη σελήνη (το σεληνιακό βάρος) ενώ οι βαρυτικές δυνάμεις που ασκούνται από άλλα ουράνια σώματα θεωρούνται αμελητέες.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Προκειμένου το σκάφος να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, οι αστροναύτες ενεργοποιούν βοηθητικούς πυραύλους, οι οποίοι ασκούν στο σκάφος πρόσθετη δύναμη. Αυτή, σε σύγκριση με το βάρος του σκάφους έχει:

- (α) το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση
- (β) το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση
- (γ) διπλάσιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού το σκάφος κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική.

Στο σκάφος ασκούνται δύο δυνάμεις : το (σεληνιακό) βάρος $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{F}$ από τους βοηθητικούς πυραύλους. Αφού η συνισταμένη τους είναι μηδενική, οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες.

Επομένως, η δύναμη $\vec{F}$ έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από το βάρος του σκάφους.

Ο 2ος νόμος του Newton

6. (7970, B2) Κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δάπεδο και η τιμή της ταχύτητας του μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $v = 5t$ (S.I.). Στη διπλανή εικόνα παριστάνονται τρία διαγράμματα, τα Α, Β και Γ, που το καθένα μπορεί παριστάνει την τιμή της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο κιβώτιο σε συνάρτηση με το χρόνο.

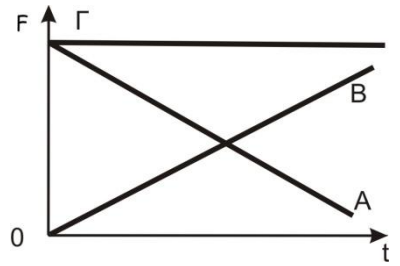
A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Το διάγραμμα που παριστάνει σωστά την τιμή της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο κιβώτιο είναι:

α) το Α

β) το Γ

γ) το Β



Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η σχέση $v = 5t$ (S.I.) περιγράφει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με εξίσωση ταχύτητας $v = \alpha t$.

Άρα η επιτάχυνση του σώματος είναι σταθερή: $\alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $F_{\text{ολ}} = m\alpha$, η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή.

Άρα, το σωστό διάγραμμα είναι το Γ.

7. (7971, 2.2) Κιβώτιο βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στο κιβώτιο οριζόντια δύναμη η τιμή της οποίας μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα που παριστάνεται στη διπλανή εικόνα.

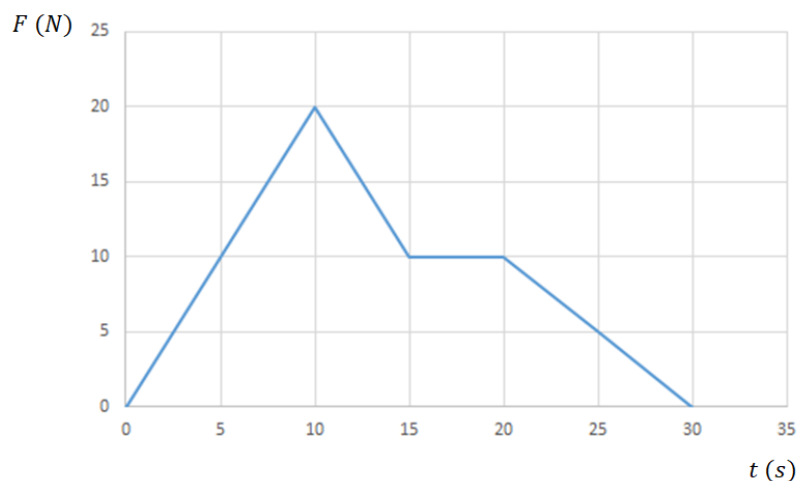
Το κιβώτιο αποκτά τη μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα:

α) τη χρονική στιγμή 10 s

β) τη χρονική στιγμή 15 s

γ) τη χρονική στιγμή 30 s

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.



Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το δάπεδο είναι λείο, άρα : $F_{ολ} = F$.

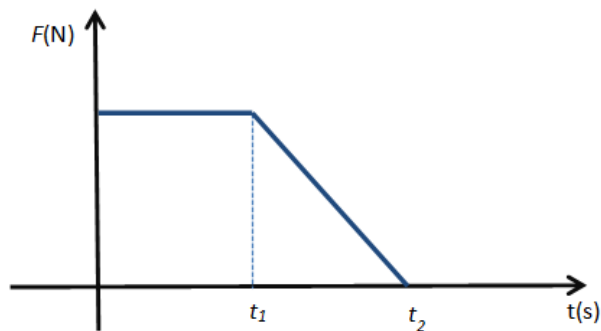
Αφού το κιβώτιο είναι ακίνητο αρχικά, με την επίδραση της δύναμης επιταχύνεται προς τη θετική φορά.

Η δύναμη έχει θετική φορά στο χρονικό διάστημα 0 s – 30 s, άρα και η επιτάχυνση έχει θετική φορά στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Δηλαδή, στο χρονικό διάστημα 0 s – 30 s η επιτάχυνση και η ταχύτητα έχουν την ίδια φορά, άρα το σώμα επιταχύνεται και το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται συνεχώς.

Επομένως το σώμα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα τη χρονική στιγμή 30 s.

9. (7999, B2) Σε ένα κιβώτιο που αρχικά ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να εφαρμόζεται μια οριζόντια δύναμη σταθερής κατεύθυνσης, το μέτρο της οποίας είναι σταθερό μέχρι τη στιγμή t_1 . Στη συνέχεια το μέτρο της δύναμης μειώνεται μέχρι που μηδενίζεται τη χρονική στιγμή t_2 , όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

α) Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

β) Μέχρι την στιγμή t_1 το κιβώτιο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και στην συνέχεια επιβραδυνόμενη κίνηση.

γ) Μετά από τον μηδενισμό της δύναμης το κιβώτιο συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 η συνισταμένη δύναμη έχει θετική φορά ($F > 0$) και είναι σταθερή, άρα το κιβώτιο αποκτά σταθερή επιτάχυνση προς τη θετική φορά.

Αφού το κιβώτιο ήταν ακίνητο αρχικά, άρα εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά.

Τη χρονική στιγμή t_1 το κιβώτιο έχει ταχύτητα $v_1 > 0$.

Από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 η δύναμη είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται, άρα η επιτάχυνση είναι θετική και μειώνεται το μέτρο της.

Αφού $v > 0$ και $a > 0$, η κίνηση είναι **ευθύγραμμη επιταχυνόμενη**.

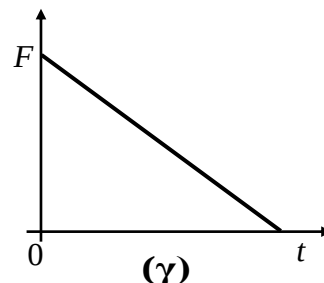
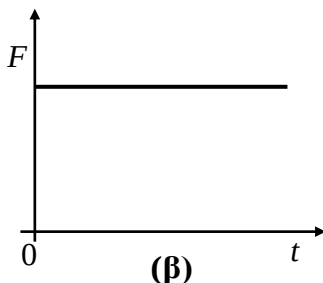
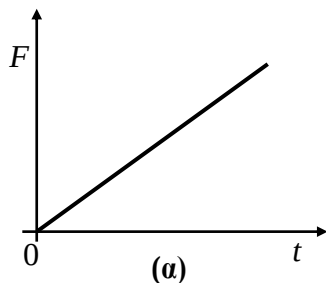
Μετά τον μηδενισμό της δύναμης μηδενίζεται και η επιτάχυνση, οπότε το σώμα εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλή** κίνηση.

Σωστή απάντηση : γ.

10. (8000, B1) Σε ένα κιβώτιο που αρχικά ήταν ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Το κιβώτιο κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα που αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η γραφική παράσταση της τιμής της δύναμης (F) που ασκείται στο κιβώτιο σε συνάρτηση με το χρόνο (t) παριστάνεται σωστά από το διάγραμμα:



Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα και η ταχύτητά του αυξάνεται ανάλογα με τον χρόνο, δηλαδή εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με εξίσωση ταχύτητας $v = at$.

Επομένως, η επιτάχυνσή του είναι σταθερή: $\vec{a} = \text{σταθερή}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $\vec{F} = m\vec{a}$ και η (συνισταμένη) δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή.

Άρα το σωστό διάγραμμα είναι το (β).

11. (8004, B2), (8025 B2), (8026 B2)

Κιβώτιο βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ στο κιβώτιο ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερής διεύθυνσης, η τιμή της οποίας σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από το διάγραμμα που παριστάνεται στη διπλανή εικόνα, οπότε το κιβώτιο αρχίζει να κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα x .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

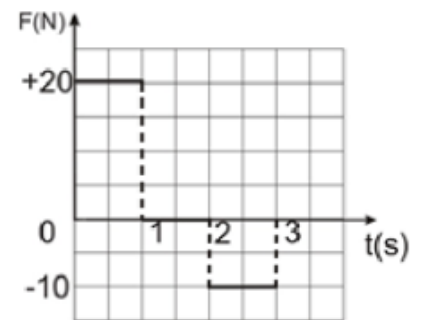
Τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$, το κιβώτιο:

α) εξακολουθεί να κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα x .

β) ηρεμεί.

γ) κινείται κατά την αρνητική φορά του άξονα x .

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας



Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

$0 \text{ s} \rightarrow 1 \text{ s}$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά): $\alpha_1 = \frac{F_1}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{20}{m}$. (S.I.)

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$, είναι: $v_1 = \alpha_1 t_1 \Rightarrow v_1 = \frac{20}{m}$. (S.I.)

$1 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά): $\alpha_2 = \frac{F_2}{m} \Rightarrow \alpha_2 = 0$.

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_2 = 2 \text{ s}$, είναι: $v_2 = v_1 = \frac{20}{m}$. (S.I.)

$2 \text{ s} \rightarrow 3 \text{ s}$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά): $\alpha_3 = \frac{F_3}{m} \Rightarrow \alpha_3 = -\frac{10}{m}$. (S.I.)

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_3 = 3 \text{ s}$, είναι:

$v_3 = v_2 + \alpha_3 (\Delta t_3) \Rightarrow v_3 = \frac{20}{m} - \frac{10}{m} \cdot 1 \Rightarrow v_3 = \frac{10}{m}$. (S.I.)

Άρα, τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$ το κιβώτιο εξακολουθεί να κινείται προς τη θετική φορά.

12. (8020, B1) Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα και στο διπλανό διάγραμμα παριστάνεται η τιμή της ταχύτητας του σε συνάρτηση με το χρόνο.

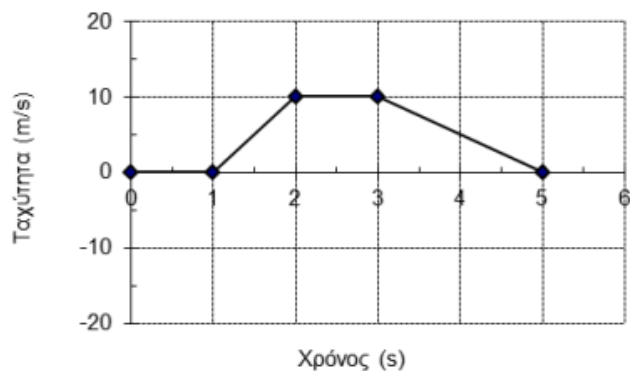
A) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

(α) Στο χρονικό διάστημα (1→2s) η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

(β) Η ολική μετατόπιση του αυτοκινήτου είναι μηδέν.

(γ) Στο χρονικό διάστημα (2→3s) η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο είναι μηδέν.

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4
Μονάδες 8

Απάντηση

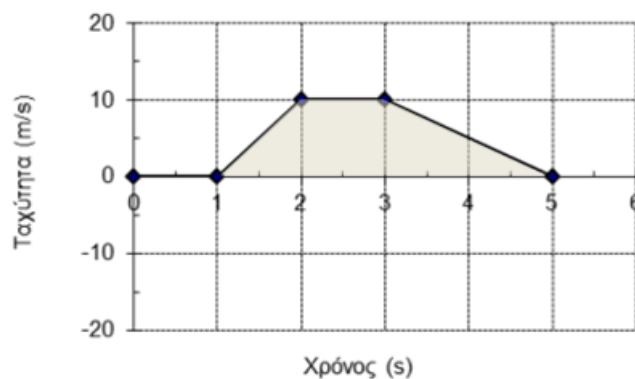
α) Στο χρονικό διάστημα 1 s → 2 s το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

β) Η συνολική μετατόπιση του αυτοκινήτου έχει

$$\text{τιμή: } \Delta x_{\text{ολ}} = E_{\text{τραπ}} = \frac{(4+1) \cdot 10}{2} \text{ m} = 25 \text{ m}.$$

γ) Στο χρονικό διάστημα 2 s → 3 s η ταχύτητα είναι σταθερή, άρα η **συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική**.

Σωστή απάντηση : (γ).



13. (8021, B2) Σε ένα κιβώτιο μάζας m που βρίσκεται ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο ασκείται οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}_1$ και το σώμα κινείται με επιτάχυνση μέτρου α .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν μαζί με την $\vec{F}_1$ ασκούμε στο κιβώτιο και δεύτερη οριζόντια δύναμη $\vec{F}_2$ με μέτρο $F_2 = \frac{F_1}{3}$

και αντίθετης κατεύθυνσης από την $\vec{F}_1$, τότε η επιτάχυνση με την οποία θα κινείται το κιβώτιο θα έχει μέτρο ίσο με:

(α) $\frac{\alpha}{2}$

(β) $\frac{2\alpha}{3}$

(γ) $\frac{\alpha}{3}$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

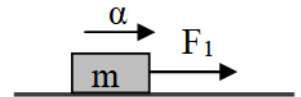
Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε κάθε περίπτωση.

I) Στο σώμα ασκείται μόνο η $\vec{F}_1$.

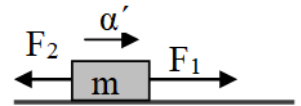
$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F_1 = m\alpha. \quad (1)$$



II) Στο σώμα ασκούνται οι αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$.

$$\Sigma F_x = m\alpha' \Leftrightarrow F_1 - F_2 = m\alpha' \Leftrightarrow F_1 - \frac{F_1}{3} = m\alpha' \Leftrightarrow$$

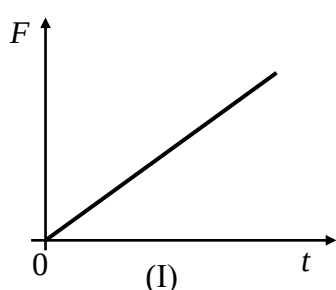
$$\frac{2}{3}F_1 = m\alpha' \xrightarrow{(1)} \frac{2}{3}m\alpha = m\alpha' \Leftrightarrow \alpha' = \frac{2\alpha}{3}.$$



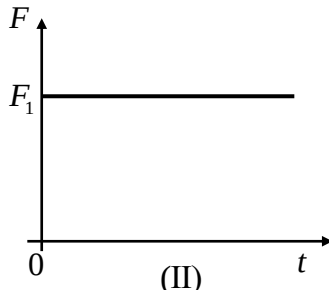
14. (8026, B1) Ένα σώμα κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα. Κάποια στιγμή στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ αντίθετης φοράς προς τη φορά της ταχύτητας και το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται ομαλά.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

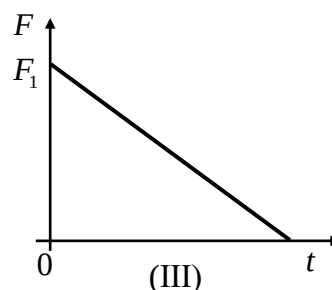
Η γραφική παράσταση του μέτρου F της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο (t) παριστάνεται σωστά από το διάγραμμα:



α) I



β) II



γ) III

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού το σώμα επιβραδύνεται ομαλά, η επιτάχυνση έχει σταθερό μέτρο.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $F_{ολ} = ma$ και η συνισταμένη δύναμη έχει σταθερό μέτρο.

Αφού δεν υπάρχει τριβή, άρα : $F_{ολ} = F$.

Επομένως, η δύναμη $\vec{F}$ έχει σταθερό μέτρο.

Σωστή απάντηση : (β).

15. (8033, B1) Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000 Kg εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές της θέσης x του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με τον χρόνο

t (s)	x (m)
0	0
1	+1
2	+4
3	+9

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Με βάση τις παραπάνω τιμές συμπεραίνουμε ότι

- α) το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου 4 m/s^2
 β) το αυτοκίνητο τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 γ) στο αυτοκίνητο ασκείται σταθερή συνισταμένη δύναμη μέτρου 1000 N

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Από τα δεδομένα του πίνακα προκύπτει ότι :

- για $t = 0 \text{ s} \rightarrow x = 0 \text{ m}$,
 » $t = 1 \text{ s} \rightarrow x = 1^2 \text{ m}$,
 » $t = 2 \text{ s} \rightarrow x = 2^2 \text{ m}$,
 » $t = 3 \text{ s} \rightarrow x = 3^2 \text{ m}$,

δηλαδή η τιμή της θέσης x είναι ανάλογη με το t^2 , άρα ισχύει η σχέση : $x = \frac{1}{2} \alpha t^2$.

Επομένως η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα.

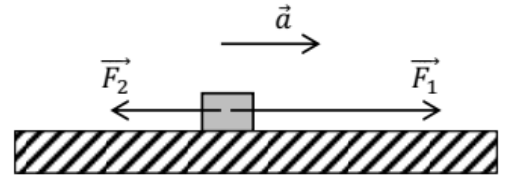
$$\text{Για } t = 1 \text{ s} : 1 = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot 1^2 \Leftrightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad [\alpha) \text{ Λάθος}]$$

$$\text{Για } t = 2 \text{ s} : v = \alpha t = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad [\beta) \text{ Σωστό}]$$

$$F_{\text{ολ}} = m\alpha \Rightarrow F_{\text{ολ}} = (1000 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 2000 \text{ N}. \quad [\gamma) \text{ Λάθος}]$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι «το αυτοκίνητο κινείται **στον άξονα x**».

16. (8035, B1) Ένα κιβώτιο είναι αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Στο κιβώτιο ασκούνται δυο σταθερές οριζόντιες αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με αποτέλεσμα το κιβώτιο να κινείται με επιτάχυνση $\vec{a}$ ομόρροπη της $\vec{F}_1$.



Αν καταργηθεί η $\vec{F}_2$ η επιτάχυνση με την οποία κινείται το κιβώτιο έχει διπλάσιο μέτρο.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ συνδέονται με τη σχέση :

α) $F_1 = 2F_2$ β) $F_2 = 2F_1$ γ) $F_1 = 3F_2$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

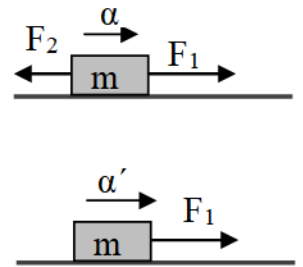
Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε κάθε περίπτωση.

1η περ. : $\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F_1 - F_2 = m\alpha$. (1)

2η περ. : $\Sigma F'_x = m\alpha' \Leftrightarrow F_1 = m\alpha' \xrightarrow{\alpha' = 2\alpha} F_1 = 2m\alpha$. (2)

(1), (2) $\Rightarrow F_1 = 2(F_1 - F_2) \Leftrightarrow F_1 = 2F_1 - 2F_2 \Leftrightarrow$

$F_1 = 2F_2$.



17. (8038, B1) Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου φρενάρει όταν βλέπει το πορτοκαλί φως σε ένα σηματοδότη του ευθύγραμμου και οριζόντιου δρόμου, στον οποίο κινείται, με αποτέλεσμα το αυτοκίνητο να επιβραδύνεται ομαλά μέχρι να σταματήσει.

A) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Κατά τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης:

α) η επιτάχυνση και η ταχύτητα έχουν την ίδια φορά.

β) η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο έχει την ίδια φορά με τη μεταβολή της ταχύτητας.

γ) η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο έχει την ίδια φορά με τη ταχύτητα του αυτοκινήτου.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στην επιβραδυνόμενη κίνηση η επιτάχυνση $\vec{a}$ έχει αντίθετη φορά από την αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$.

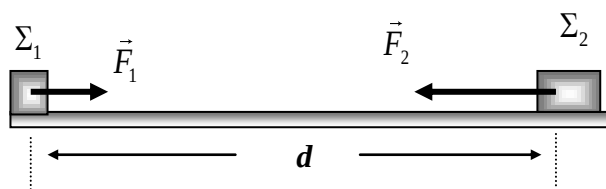
Σύμφωνα με τον ορισμό της επιτάχυνσης $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, η επιτάχυνση $\vec{a}$ έχει την ίδια φορά με τη μεταβολή της ταχύτητας $\Delta \vec{v}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$, η συνισταμένη δύναμη έχει την ίδια φορά με την επιτάχυνση.

Επομένως, η συνισταμένη δύναμη $\Sigma \vec{F}$ έχει την ίδια φορά με τη μεταβολή της ταχύτητας $\Delta \vec{v}$ (και αντίθετη φορά από την αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$).

Σωστή απάντηση : β).

18. (8039, B1) Δύο μικροί κύβοι Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει $m_2 = 2 \cdot m_1$, είναι αρχικά ακίνητοι πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και απέχουν απόσταση d . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε ταυτόχρονα δυο οριζόντιες σταθερές δυνάμεις $\vec{F}_1$ στο κύβο Σ_1 και $\vec{F}_2$ στο κύβο Σ_2 , με αποτέλεσμα αυτοί να κινηθούν πάνω στην ίδια ευθεία και σε αντίθετες κατευθύνσεις.



Α) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Αν οι κύβοι συναντώνται στο μέσο της μεταξύ τους απόστασης, τότε για τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ θα ισχύει:

- α) $F_1 = 2 \cdot F_2$ β) $F_1 = F_2$ γ) $F_2 = 2 \cdot F_1$

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Με την επίδραση των σταθερών δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ οι κύβοι αποκτούν σταθερές επιταχύνσεις $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$.

Αφού είναι αρχικά ακίνητοι, άρα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Στην ίδια χρονική διάρκεια t οι κύβοι διανύουν αποστάσεις s_1 , s_2 που δίνονται από τις εξισώσεις :

$$s_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t^2, \quad s_2 = \frac{1}{2} \alpha_2 t^2, \quad \text{όπου } \alpha_1, \alpha_2 \text{ τα μέτρα των επιταχύνσεων των δύο κύβων.}$$

$$\text{Αφού συναντώνται στη μέση, άρα : } s_1 = s_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \alpha_1 t^2 = \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Τα μέτρα των επιταχύνσεων υπολογίζονται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{F_1}{m_1} \\ \alpha_2 = \frac{F_2}{m_2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\alpha_1 = \alpha_2} \frac{F_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2} \xrightarrow{m_2 = 2m_1} \frac{F_1}{m_1} = \frac{F_2}{2m_1} \Leftrightarrow F_2 = 2F_1.$$

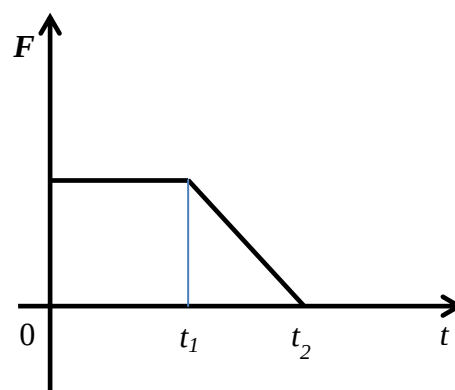
19. (8040, B1) Ένα κιβώτιο είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκείται στο κιβώτιο οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Στο διπλανό διάγραμμα παριστάνεται η γραφική παράσταση της τιμής της δύναμης $\vec{F}$ σε συνάρτηση με το χρόνο.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

α) Μέχρι την χρονική στιγμή t_1 το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και μετά ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

β) Μέχρι την χρονική στιγμή t_1 το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και μετά ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

γ) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος την χρονική στιγμή t_2 είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ταχύτητας την στιγμή t_1 .



Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Υποθέτω ότι η δύναμη έχει τη διεύθυνση του άξονα x.

Αφού το επίπεδο είναι λείο, άρα : $F_{ολ} = F$.

Επομένως η επιτάχυνση έχει (αλγεβρική) τιμή : $\alpha = \frac{F}{m}$.

Κατά το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ η δύναμη είναι σταθερή και έχει θετική φορά ($F > 0$), άρα και η επιτάχυνση είναι σταθερή και έχει θετική φορά. Αφού το σώμα είναι αρχικά ακίνητο, κατά το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τη θετική φορά ($v > 0$).

Κατά το χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$ η τιμή της δύναμης είναι θετική αλλά το μέτρο της μειώνεται άρα και η τιμή της επιτάχυνσης είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται. Η επιτάχυνση και η ταχύτητα έχουν την ίδια φορά ($\alpha > 0, v > 0$), άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση.

Αφού το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται κατά το χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$, άρα **το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή t_2 είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή t_1 .**

Σωστή απάντηση : γ).

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η δύναμη έχει σταθερή διεύθυνση.

20. (8045, B1) Ένας μικρός κύβος βρίσκεται ακίνητος πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Την στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ασκείται στον κύβο οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ σταθερής κατεύθυνσης της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται με το χρόνο όπως παριστάνεται στο διάγραμμα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

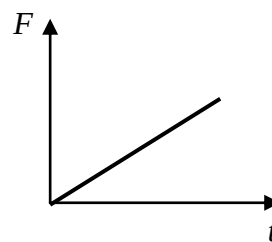
Η επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί ο κύβος θα έχει

α) σταθερό μέτρο και μεταβαλλόμενη κατεύθυνση.

β) μέτρο που αυξάνεται με το χρόνο και σταθερή κατεύθυνση

γ) μέτρο που μειώνεται με το χρόνο και σταθερή κατεύθυνση

Μονάδες 4



B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού το επίπεδο είναι λείο, η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σώμα στη διεύθυνση της κίνησης είναι η δύναμη $\vec{F}$, άρα : $\Sigma \vec{F} = \vec{F}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, για την επιτάχυνση του κύβου ισχύει : $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Η δύναμη $\vec{F}$ έχει σταθερή κατεύθυνση, άρα και **η επιτάχυνση $\vec{a}$ έχει σταθερή κατεύθυνση.**

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το μέτρο της δύναμης αυξάνεται (γραμμικά) με το χρόνο, άρα και **το μέτρο της επιτάχυνσης αυξάνεται (γραμμικά) με το χρόνο.**

Σωστή απάντηση : β).

21. (8046, B2) Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο έχοντας σταθερή ταχύτητα μέτρου v_0 . Ο οδηγός του τη χρονική στιγμή $t = 0$ φρενάρει οπότε το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιβράδυνση. Το αυτοκίνητο σταματά τη χρονική στιγμή t_1 , έχοντας διανύσει διάστημα S_1 . Αν το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα μέτρου $2 \cdot v_0$ σταματά τη χρονική στιγμή t_2 έχοντας διανύσει διάστημα S_2 .

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.:

Αν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο και στις δυο περιπτώσεις είναι ίδια τότε θα ισχύει:

α) $S_2 = 2 \cdot S_1$

β) $t_2 = 2 \cdot t_1$

γ) $t_1 = 2 \cdot t_2$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Ισχύουν οι εξισώσεις :

$$v = v_0 - \alpha t \quad (1) \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (2)$$

όπου α το μέτρο της επιβράδυνσης.

Τη χρονική στιγμή t_1 που σταματά το αυτοκίνητο, είναι :

$$v = 0 \xrightarrow{(1)} v_0 - \alpha t_1 = 0 \Leftrightarrow v_0 = \alpha t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{\alpha}. \quad (3)$$

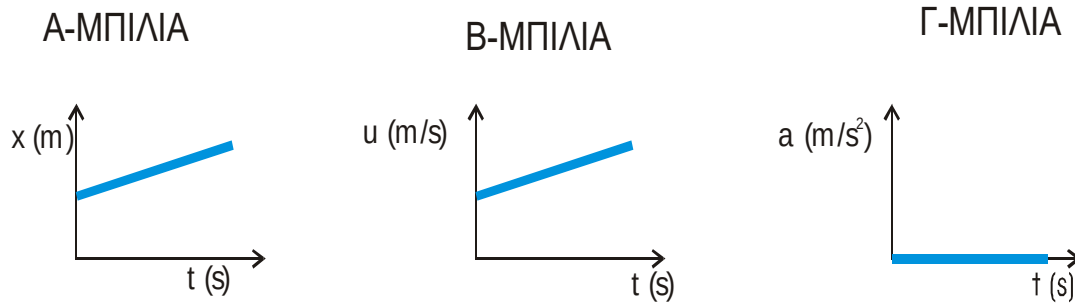
Αφού η συνισταμένη δύναμη είναι ίδια στις δύο περιπτώσεις, άρα η επιβράδυνση έχει το ίδιο μέτρο

στις δύο περιπτώσεις : $\alpha' = \alpha = \frac{F_{\text{ολ}}}{m}$.

Όταν το αυτοκίνητο έχει αρχική ταχύτητα μέτρου $2v_0$, θα σταματήσει μετά από χρόνο $t_2 = \frac{2v_0}{\alpha}$. (4)

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει : $t_2 = 2 t_1$.

22. (8047, B2) Τρεις σκληρές ατσάλινες μπίλιες Α, Β, Γ κινούνται ευθύγραμμα σε λείο δάπεδο. Για κάθε μία από αυτές δίνεται μια γραφική παράσταση ενός μεγέθους που χαρακτηρίζει την κίνησή τους.



Μικρό σώμα Δ κινείται ευθύγραμμα σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η μετατόπισή του είναι ανάλογη του χρόνου.

Α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας τον πίνακα και να συμπληρώσετε στην αντίστοιχη στήλη του «ναι», αν απαιτείται δράση οριζόντιας δύναμης για να προκύψει η κίνηση του σώματος. Διαφορετικά, να συμπληρώσετε «όχι».

ΣΩΜΑ	Απαιτείται δράση δύναμης για να αιτιολογηθεί η κίνηση του σώματος. (ναι/όχι)
Α	
Β	
Γ	
Δ	

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Μπίλια – Α : Το διάγραμμα $x - t$ είναι πλάγια ευθεία με σταθερή κλίση, άρα η ταχύτητα είναι σταθερή και η επιτάχυνση είναι μηδενική.

Επομένως η συνισταμένη δύναμη στη μπίλια Α είναι μηδενική (OXI).

Μπίλια – Β : Το διάγραμμα $u - t$ είναι πλάγια ευθεία με σταθερή κλίση, άρα η επιτάχυνση είναι σταθερή.

Επομένως, στη μπίλια Α ασκείται σταθερή συνισταμένη δύναμη (NAI).

Μπίλια – Γ : Η επιτάχυνση της μπίλιας Γ είναι μηδενική, άρα η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική (OXI).

Σώμα – Δ : Αφού η μετατόπιση του σώματος είναι ανάλογη του χρόνου, άρα η ταχύτητα είναι σταθερή και η επιτάχυνση είναι μηδενική.

Επομένως η συνισταμένη δύναμη στο σώμα Δ είναι μηδενική (OXI).

23. (8048, B1) Μικρός κύβος κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο κύβο ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ κατά τη διεύθυνση της κίνησής του για χρονικό διάστημα 12 s, οπότε αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητας του κύβου κατά $6 \frac{m}{s}$.

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Αν στον ίδιο κύβο ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F'}$ κατά τη διεύθυνση της κίνησής του με μέτρο διπλάσιο της F , τότε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να αλλάξει η ταχύτητά του κύβου από $6 \frac{m}{s}$ σε $8 \frac{m}{s}$ είναι:

α) 12 s β) 6 s γ) 2 s

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

1η περίπτωση

Το μέτρο της επιτάχυνσης του κύβου, είναι :

$$\alpha = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{6 \frac{m}{s}}{12 s} \Rightarrow \alpha = 0,5 \frac{m}{s^2}.$$

Αφού δεν υπάρχει τριβή, είναι $\Sigma F = F$, άρα : $\alpha = \frac{F}{m}$. (1)

2η περίπτωση

Το μέτρο της επιτάχυνσης του κύβου, είναι :

$$\alpha' = \frac{2F}{m} \xrightarrow{(1)} \alpha' = 2\alpha = 1 \frac{m}{s^2}.$$

$$\text{Ισχύει : } \alpha' = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta v_2}{\alpha'} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2 \frac{m}{s}}{1 \frac{m}{s^2}} \Rightarrow \Delta t_2 = 2 s.$$

24. (8051, B2) Παιδικό αμαξάκι έχει μάζα $m = 1 \text{ Kg}$ και κινείται σε οριζόντιο δάπεδο. Στο αμαξάκι ασκείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 8 \text{ N}$ και σταθερής διεύθυνσης. Η γραφική παράσταση της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται στο διπλανό σχήμα.

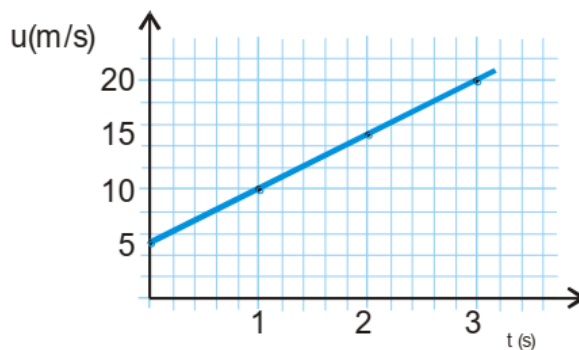
Δυο μαθητές Α και Β συζητούν για τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να υπολογίσουν την επιτάχυνσή του.

Α) Ο Α σκέφτεται να υπολογίσει την επιτάχυνση από την κλίση της γραφικής παράστασης, ενώ ο Β από το λόγο $\frac{F}{m}$. Το σωστό τρόπο υπολογισμού της επιτάχυνσης έχει σκεφθεί

α) ο μαθητής Α

β) ο μαθητής Β

γ) και οι δυο



Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Με βάση το διάγραμμα, ο μαθητής Α υπολογίζει το μέτρο της πραγματικής επιτάχυνσης του αμαξιδίου :

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(20-5) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ s}} \Rightarrow \alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης που υπολογίζει ο μαθητής Β με εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου της

Μηχανικής $\left(\alpha' = \frac{F}{m} = \frac{8 \text{ N}}{1 \text{ kg}} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$ είναι λανθασμένο γιατί δεν λαμβάνει υπ' όψη τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στο αμαξίδιο κατά τη διεύθυνση της κίνησης (π.χ. τριβή ολίσθησης).

25. (8052, B1) Δύο μικρά σώματα A, B διαφορετικών μαζών, βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Το A είναι ακίνητο ενώ το B κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_1 . Κάποια στιγμή ασκούμε την ίδια σταθερή οριζόντια δύναμη (προς την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}_1$) για το ίδιο χρονικό διάστημα και στα δύο σώματα, με αποτέλεσμα αυτά να αποκτήσουν ταχύτητες ίδιου μέτρου.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Για τις μάζες των σωμάτων ισχύει:

α) $m_A < m_B$ β) $m_A > m_B$ γ) $m_A = m_B$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Συνδυάζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής με τον ορισμό της επιτάχυνσης για κάθε σώμα.

Σώμα A

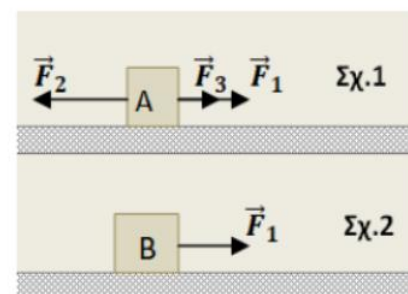
$$\left. \begin{array}{l} F = m_A \alpha_A \\ \alpha_A = \frac{v - 0}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow F = m_A \frac{v}{\Delta t}. \quad (1)$$

Σώμα B

$$\left. \begin{array}{l} F = m_B \alpha_B \\ \alpha_B = \frac{v - v_1}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow F = m_B \frac{v - v_1}{\Delta t}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m_A \frac{v}{\Delta t} = m_B \frac{v - v_1}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{v - v_1}{v} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} < 1 \Leftrightarrow m_A < m_B.$$

26. (13100, B2) Ένας κύβος Α, μάζας $m_A = m$ βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο και ακλόνητο δάπεδο. Ασκούμε στον κύβο Α τρεις οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$.



Οι τρεις αυτές δυνάμεις είναι συγγραμμικές, με τις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$ να έχουν ίδια κατεύθυνση, ενώ η $\vec{F}_2$ αντίθετη κατεύθυνση από αυτές, όπως στο σχήμα. Ο κύβος Α ισορροπεί ακίνητος με την επίδραση αυτών των δυνάμεων.

Αν κάποια στιγμή καταργηθεί μόνο η δύναμη $\vec{F}_1$, ο κύβος Α αποκτά επιτάχυνση μέτρου a_1 .

Αν ασκήσουμε τη δύναμη $\vec{F}_1$ σε ένα άλλο κύβο Β μάζας $m_B = 2 \cdot m$, ο οποίος βρίσκεται επίσης πάνω σε λείο οριζόντιο, ακλόνητο δάπεδο και είναι ακίνητος αλλά ελεύθερος να κινηθεί (Σχ.2), τότε ο κύβος Β θα αποκτήσει επιτάχυνση μέτρου a_2 .

Α) Να επιλέξετε τη σωστή σχέση που ισχύει για τα μέτρα των δύο επιταχύνσεων:

- i. $a_1 = a_2$ ii. $a_1 = 2a_2$ iii. $a_2 = 2a_1$

Β) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4
Μονάδες 9

Απάντηση

Όταν ο κύβος Α ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_1 + F_3 - F_2 = 0 \Leftrightarrow F_1 = F_2 - F_3. \quad (1)$$

Όταν καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$, ο κύβος αποκτά επιτάχυνση $\vec{a}_1$ (προς την κατεύθυνση της $\vec{F}_2$). Ισχύει :

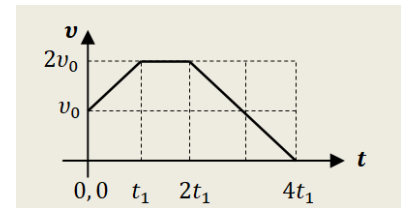
$$\Sigma F_x = m a_1 \Leftrightarrow F_2 - F_3 = m a_1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{F_2 - F_3}{m} \xrightarrow{(1)} a_1 = \frac{F_1}{m}. \quad (2)$$

Όταν ασκηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$ στον κύβο Β, αυτός αποκτά επιτάχυνση $\vec{a}_2$. Ισχύει :

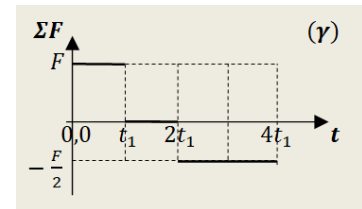
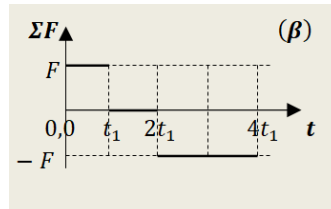
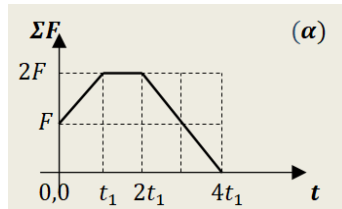
$$\Sigma F_x = 2m a_2 \Leftrightarrow F_1 = 2m a_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{F_1}{2m}. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει : $a_2 = \frac{1}{2} a_1$ ή $a_1 = 2a_2$.

27. (13101, B2) Μικρό σώμα μάζας m κινείται ευθύγραμμα και το διπλανό διάγραμμα, αποδίδει την τιμή της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με το χρόνο της κίνησης.



A) Από τα διαγράμματα (α), (β) και (γ), να επιλέξετε εκείνο, το οποίο αποδίδει σωστά την τιμή της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα στην κίνηση αυτή, σε συνάρτηση με το χρόνο:



- i. το διάγραμμα (α)
- ii. το διάγραμμα (β)
- iii. το διάγραμμα (γ)

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Από το διάγραμμα $v - t$ υπολογίζω τις τιμές της επιτάχυνσης σε κάθε χρονική διάρκεια και στη συνέχεια εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής.

$0 \rightarrow t_1$

$$\alpha_1 = \frac{2v_0 - v_0}{t_1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{v_0}{t_1} = \text{σταθερή.} \quad (1)$$

$$\Sigma F_1 = m\alpha_1 \xrightarrow{(1)} \Sigma F_1 = F = m\alpha_1 = \text{σταθερή.} \quad (2)$$

$t_1 \rightarrow 2t_1$

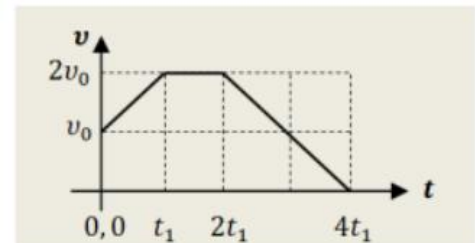
$$\alpha_2 = \frac{2v_0 - 2v_0}{2t_1 - t_1} \Rightarrow \alpha_2 = 0. \quad (3)$$

$$\Sigma F_2 = m\alpha_2 \xrightarrow{(3)} \Sigma F_2 = 0.$$

$2t_1 \rightarrow 4t_1$

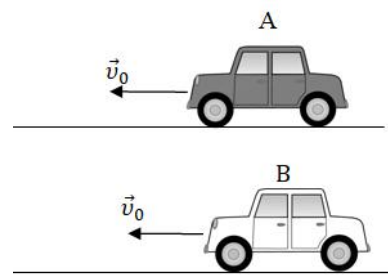
$$\alpha_3 = \frac{0 - 2v_0}{4t_1 - 2t_1} \Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{-2v_0}{2t_1} = -\frac{v_0}{t_1} \xrightarrow{(1)} \alpha_3 = -\alpha_1. \quad (4)$$

$$\Sigma F_3 = m\alpha_3 \xrightarrow{(4)} \Sigma F_3 = -m\alpha_1 \xrightarrow{(2)} \Sigma F_3 = -F = \text{σταθερή.}$$



Το σωστό διάγραμμα είναι το β.

28. (13270, B2) Τα αυτοκίνητα Α και Β της εικόνας έχουν ίσες μάζες και κινούνται ευθύγραμμα, με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_0 .



Α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν το **ελάχιστο χρονικό διάστημα** που απαιτείται για την ακινητοποίηση των αυτοκινήτων Α και Β είναι t_A και t_B αντίστοιχα, με $t_A = 2 \cdot t_B$, τότε για τη **μέγιστη τιμή του μέτρου της επιβραδύνουσας δύναμης**, που μπορεί να αναπτύξει το σύστημα πέδησης των αυτοκινήτων Α και Β (F_A και F_B αντίστοιχα) ισχύει:

α) $F_B = 4 \cdot F_A$, β) $F_B = 2 \cdot F_A$, γ) $F_B = \frac{F_A}{4}$.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αν η επιβραδύνουσα δύναμη που δέχεται κάθε αυτοκίνητο έχει σταθερό μέτρο τότε και η επιβράδυνσή του έχει σταθερό μέτρο, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Γράφω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης για κάθε αυτοκίνητο. Στις σχέσεις αυτές το σύμβολο α είναι το μέτρο της επιβράδυνσης.

Αυτοκίνητο Α

$$\alpha_A = \frac{v_0}{t_A} \xrightarrow{t_A = 2t_B} \alpha_A = \frac{v_0}{2t_B}. \quad (1)$$

Αυτοκίνητο Β

$$\alpha_B = \frac{v_0}{t_B}. \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2), προκύπτει : } \alpha_B = 2\alpha_A. \quad (3)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε αυτοκίνητο :

$$\left. \begin{array}{l} F_A = m\alpha_A \\ F_B = m\alpha_B \end{array} \right\} \xrightarrow{(3)} F_B = 2F_A.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν διευκρινίζει ότι **το μέτρο της επιβραδύνουσας δύναμης παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια της κίνησης.**

Οι εκφράσεις «ελάχιστο χρονικό διάστημα», «μέγιστη τιμή του μέτρου της επιβραδύνουσας δύναμης» είναι παραπλανητικές.

29. (13272, B2) Σημειακό αντικείμενο, μάζας m , κινείται ευθύγραμμα και δέχεται την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης $\Sigma \vec{F}$.

A. Η μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας (Δv) του κινητού σε χρονικό διάστημα Δt δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha) \Delta v = \frac{\Sigma F}{m} \cdot \Delta t, \quad \beta) \Delta v = \frac{\Sigma F}{m \cdot \Delta t}, \quad \gamma) \Delta v = \Sigma F \cdot m \cdot \Delta t.$$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Συνδυάζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής με τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης.

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{F} = m \vec{a} \\ \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{v} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} \cdot \Delta t.$$

Αν η συνισταμένη δύναμη $\Sigma \vec{F}$ και η αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ έχουν την ίδια διεύθυνση, τότε η σχέση ισχύει και αλγεβρικά: $\Delta v = \frac{\Sigma F}{m} \cdot \Delta t$.

Σχόλιο :

Η εκφώνηση δεν αναφέρει αν η συνισταμένη δύναμη έχει την ίδια διεύθυνση με την αρχική ταχύτητα.

Στην περίπτωση που η συνισταμένη έχει διαφορετική διεύθυνση από την αρχική ταχύτητα, τότε η κίνηση δεν είναι ευθύγραμμη και δεν ισχύουν οι αλγεβρικές σχέσεις.

30. (13509, 2.1) Σώμα μάζας m δέχεται την επίδραση συνισταμένης δύναμης μέτρου F . Κόβουμε το σώμα σε δύο κομμάτια ίσων μαζών $m/2$ και στο ένα απ' αυτά ασκούμε δύναμη μέτρου $2F$.

Η επιτάχυνση α' του κομματιού μάζας $m/2$ σε σχέση με την επιτάχυνση α του αρχικού σώματος μάζας m είναι:

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. Αυξημένη κατά 100%

β. Μειωμένη κατά 300%

γ. Αυξημένη κατά 300%

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Με την επίδραση δύναμης μέτρου F , το σώμα μάζας m αποκτά επιτάχυνση μέτρου $\alpha = \frac{F}{m}$. (1)

Με την επίδραση δύναμης μέτρου $F' = 2F$, το κομμάτι μάζας $\frac{m}{2}$ αποκτά επιτάχυνση μέτρου

$$\alpha' = \frac{2F}{\frac{m}{2}} \Leftrightarrow \alpha' = \frac{4F}{m} \xrightarrow{(1)} \alpha' = 4\alpha.$$

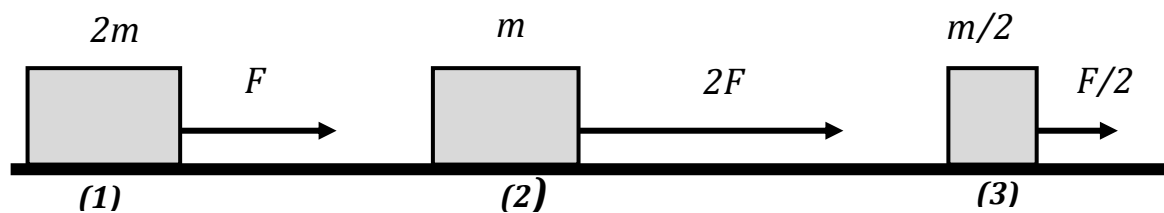
Το ποσοστό μεταβολής του μέτρου της επιτάχυνσης είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha} \cdot 100\% = \frac{4\alpha - \alpha}{\alpha} \cdot 100\% = \frac{3\alpha}{\alpha} \cdot 100\% = 300\%.$$

Άρα, το μέτρο της επιτάχυνσης αυξήθηκε κατά 300%.

31. (13511, 2.1) Τα σώματα (1), (2) και (3) αποκτούν επιταχύνσεις μέτρων α_1, α_2 και α_3 αντίστοιχα.

Για τα μέτρα των επιταχύνσεων ισχύει:



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

α. $\alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1$

β. $\alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_3$

γ. $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το μέτρο της επιτάχυνσης κάθε σώματος υπολογίζεται με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής.

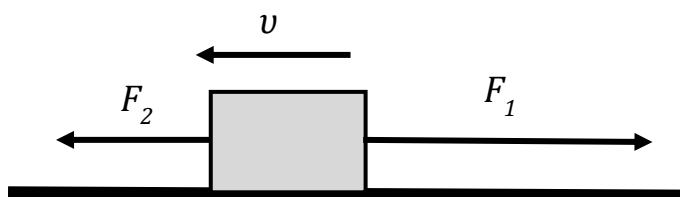
$$\Sigma_1: \alpha_1 = \frac{F}{2m}. \quad (1)$$

$$\Sigma_2: \alpha_2 = \frac{2F}{m}. \quad (2)$$

$$\Sigma_3: \alpha_3 = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{m}{2}} \Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{F}{m}. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι : $\alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1$.

32. (13512, 2.1) Το σώμα του παρακάτω σχήματος κινείται προς τα αριστερά πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v . Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ ασκούνται στο σώμα ταυτόχρονα δύο οριζόντιες δυνάμεις F_1 και F_2 ($F_1 > F_2$).



Κάποια χρονική στιγμή ($t > t_0$) και ενώ το σώμα εξακολουθεί να κινείται προς τα αριστερά καταργούμε τη δύναμη F_2 .

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. Το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά.

β. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα μειώνεται πιο γρήγορα.

γ. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα αρχίσει να αυξάνεται.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού $F_1 > F_2$, άρα η συνισταμένη έχει φορά προς τα δεξιά και το σώμα επιβραδύνεται.

Με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ το σώμα αποκτά επιβράδυνση μέτρου $\alpha = \frac{F_1 - F_2}{m}$. (1)

Όταν καταργηθεί η $\vec{F}_2$ και μέχρι να ακινητοποιηθεί (στιγμιαία), το σώμα κινείται προς τα αριστερά, άρα έχει επιβράδυνση μέτρου $\alpha' = \frac{F_1}{m} \xrightarrow{(1)} \alpha' > \alpha$,

άρα **το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται πιο γρήγορα.**

Αφού σταματήσει, με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}_1$ το σώμα θα κινηθεί προς τα δεξιά και το μέτρο της ταχύτητας θα αυξάνεται.

Επομένως, **για να θεωρηθεί σωστή μόνο η απάντηση β**, έπρεπε να αναφέρει η εκφώνηση :

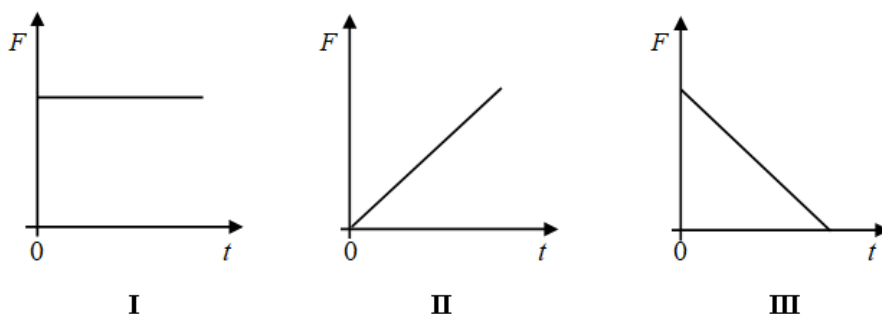
«Αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}_2$

α. το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά.

β. το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα μειώνεται πιο γρήγορα.

γ. το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα αρχίσει να αυξάνεται».

33. (13546, 2.2) Ένα σώμα κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα. Κάποια στιγμή στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F και το σώμα αρχίζει να επιταχύνεται. Το μέτρο της επιτάχυνσης μειώνεται γραμμικά σε σχέση με το χρόνο κίνησης του σώματος.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης (F) που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με τον χρόνο (t) δίδεται από το διάγραμμα:

(α) I (β) II (γ) III

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού το σώμα κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η συνισταμένη είναι ίση με τη δύναμη $\vec{F}$.

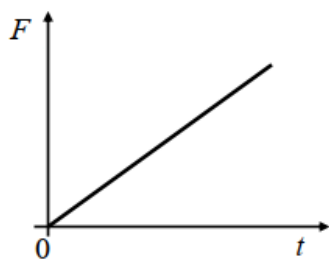
Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $F = ma$, το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ανάλογο με το μέτρο της (συνισταμένης) δύναμης.

Αφού το μέτρο της επιτάχυνσης μειώνεται γραμμικά με το χρόνο άρα και το μέτρο της δύναμης F μειώνεται γραμμικά με το χρόνο, σύμφωνα με το διάγραμμα III.

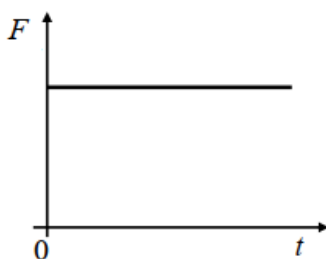
Σωστή απάντηση : (γ).

Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στο σώμα οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ η οποία έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα και το σώμα αρχίζει να επιταχύνεται».

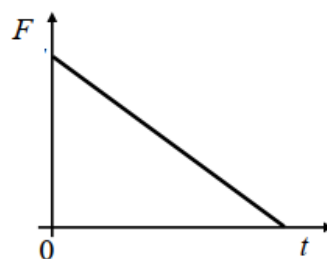
34. (13548, 2.1) Σε κιβώτιο που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ οριζόντια δύναμη F . Η ταχύτητα του κιβωτίου αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο.



(I)



(II)



(III)

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης (F) που ασκείται στο κιβώτιο σε συνάρτηση με το χρόνο (t) δίδεται από το διάγραμμα:

(α) I

(β) II

(γ) III

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Υποθέτω ότι αρχικά το κιβώτιο είναι ακίνητο ($v_0 = 0$).

Από τη στιγμή $t_0 = 0$ (που ασκείται η δύναμη) το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα και η ταχύτητά του αυξάνεται ανάλογα με τον χρόνο, δηλαδή εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με εξίσωση ταχύτητας $v = at$.

Επομένως, η επιτάχυνσή του είναι σταθερή: $\vec{a} = \text{σταθερή}$.

Εφ' όσον το επίπεδο είναι λείο, η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με τη δύναμη $\vec{F}$: $\Sigma \vec{F} = \vec{F}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $\vec{F} = m\vec{a}$ και η (συνισταμένη) δύναμη $\vec{F}$ θα είναι σταθερή.

Άρα το σωστό διάγραμμα είναι το II.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που υπάρχει (σταθερή) τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, ισχύει: $\vec{F} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} - \vec{T}$.

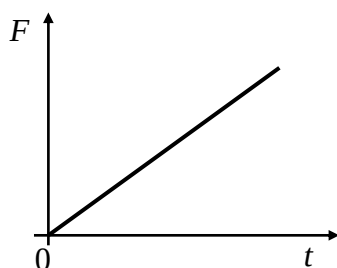
Αφού $\vec{a} = \text{σταθερή}$ και $\vec{T} = \text{σταθερή}$, άρα η δύναμη $\vec{F}$ θα είναι σταθερή.

Επομένως, το σωστό διάγραμμα είναι το II.

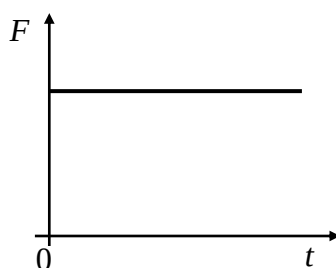
Σχόλιο :

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει: «Κιβώτιο βρίσκεται **ακίνητο** πάνω σε **λείο** οριζόντιο επίπεδο. **Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$** ασκείται στο κιβώτιο οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, σταθερής διεύθυνσης».

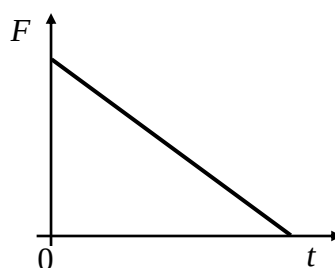
35. (13550, 2.1) Ένα σώμα κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα. Κάποια στιγμή στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F και το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται ομαλά.



(I)



(II)



(III)

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Η γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης (F) που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο (t) δίδεται από το διάγραμμα:

(α) I

(β) II

(γ) III

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού το σώμα επιβραδύνεται ομαλά, η επιτάχυνση είναι σταθερή : $\vec{a} = \text{σταθερή}$.

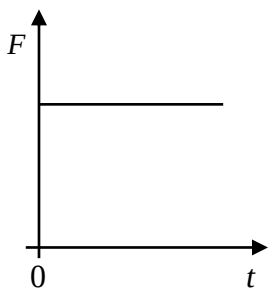
Εφ' όσον το επίπεδο είναι λείο, η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με τη δύναμη $\vec{F}$: $\Sigma \vec{F} = \vec{F}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $\vec{F} = m\vec{a}$ και η (συνισταμένη) δύναμη $\vec{F}$ θα είναι σταθερή.

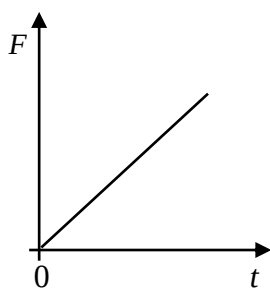
Άρα το σωστό διάγραμμα είναι το II.

Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στο σώμα οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ η οποία έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα και το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται ομαλά».

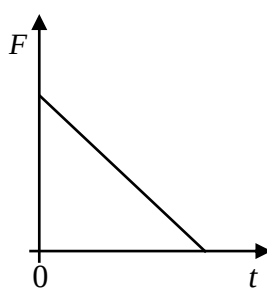
36. (13553, 2.2) Ένα σώμα κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα. Κάποια στιγμή το σώμα δέχεται οριζόντια δύναμη F , οπότε αρχίζει να επιβραδύνεται. Το μέτρο της επιβράδυνσης αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο κίνησης του σώματος.



I



II



III

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης (F) που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο (t) δίνεται από το διάγραμμα:

(α) I

(β) II

(γ) III

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

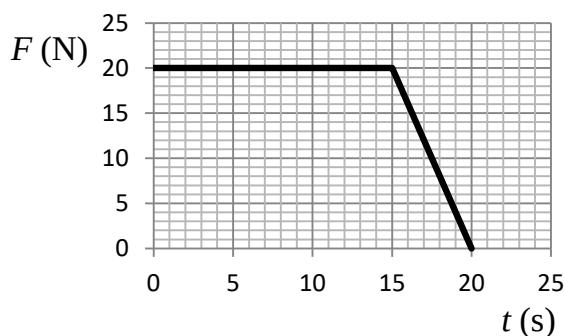
Απάντηση

Το σώμα κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, άρα η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με τη δύναμη $\vec{F}$. Αφού το μέτρο της επιτάχυνσης αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο, σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $F = ma$ και το μέτρο της δύναμης F θα αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο, όπως δείχνει το διάγραμμα II.

Σωστή απάντηση : (β).

Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στο σώμα οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ η οποία έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα, οπότε αρχίζει να επιβραδύνεται».

37. (13552, 2.2) Ένα σώμα βρίσκεται ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή $t = 0$ s ασκείται πάνω του οριζόντια δύναμη. Η αλγεβρική τιμή της δύναμης σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνεται στο διάγραμμα, ενώ η διεύθυνσή της παραμένει σταθερή.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

- (α) Για όλο το χρονικό διάστημα από 0 s έως 20 s το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση.
- (β) Το χρονικό διάστημα από 0 s έως 15 s το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση, ενώ το χρονικό διάστημα από 15 s έως 20 s το σώμα επιβραδύνεται.
- (γ) Για όλο το χρονικό διάστημα από 0 s έως 20 s το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 15$ s η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή και έχει θετική φορά ($F > 0$), άρα το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση προς τη θετική φορά ($a > 0$).

Αφού το σώμα ήταν ακίνητο αρχικά, άρα εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 15$ s, το σώμα έχει ταχύτητα $v_1 > 0$.

Από τη χρονική στιγμή $t_1 = 15$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 20$ s η δύναμη είναι θετική και το μέτρο της μειώνεται. άρα η επιτάχυνση είναι θετική και μειώνεται το μέτρο της. Αφού $v > 0$ και $a > 0$, η κίνηση είναι **ευθύγραμμη (όχι ομαλά) επιταχυνόμενη**.

Επομένως, **από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 20$ s το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση.**

Σωστή απάντηση : α.

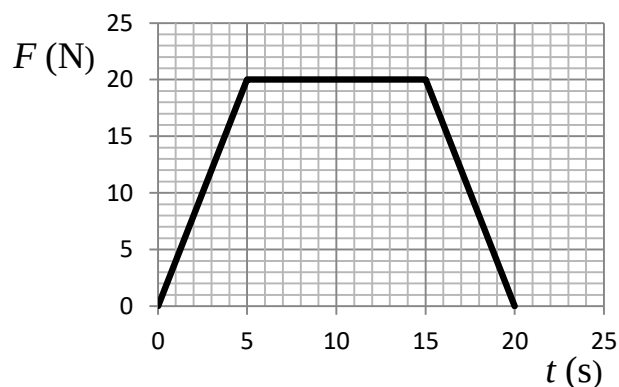
38. (13555, 2.1) Ένα σώμα βρίσκεται ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή $t = 0$ s ασκείται πάνω του οριζόντια δύναμη σταθερής διεύθυνσης. Η αλγεβρική τιμή της δύναμης σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνεται στο διάγραμμα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

(α) Στο χρονικό διάστημα από 15 s έως 20 s το σώμα επιβραδύνεται γιατί η δύναμη που του ασκείται είναι μικρότερη από τη δύναμη το χρονικό διάστημα από 5 s έως 15 s.

(β) Το χρονικό διάστημα από 5 s έως 15 s το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα.

(γ) Για όλο το χρονικό διάστημα από 0 s έως 20 s η ταχύτητα του σώματος συνεχώς αυξάνει.



Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 20$ s η συνισταμένη δύναμη έχει θετική φορά ($F > 0$), άρα το σώμα αποκτά επιτάχυνση προς τη θετική φορά ($a > 0$).

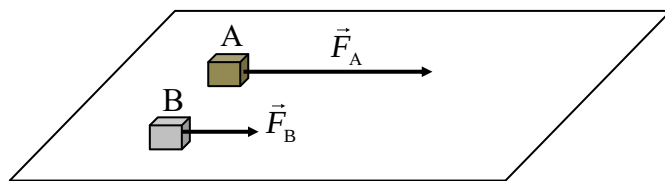
Αφού το σώμα ήταν ακίνητο αρχικά, άρα εκτελεί **ευθύγραμμη επιταχυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά ($v > 0$).

Επομένως, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 20$ s το μέτρο της ταχύτητας του σώματος αυξάνεται συνεχώς.

Σωστή απάντηση : γ.

39. (13566, 2.2) Δυο κιβώτια A και B βρίσκονται δίπλα – δίπλα και ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούνται και στα δύο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$ με μέτρα $F_A = 3 \cdot F_B$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δυο κιβώτια αρχίζουν να κινούνται ευθύγραμμα στο οριζόντιο επίπεδο και η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ η ταχύτητα του κιβωτίου A είναι v . Το κιβώτιο B αποκτά ταχύτητα ίδιου μέτρου (v) τη χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Με βάση τα πιο πάνω δεδομένα, η σύγκριση των δύο μαζών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

$$\alpha) m_A = m_B, \quad \beta) m_A = \frac{2}{3} m_B, \quad \gamma) m_B = \frac{2}{3} m_A.$$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κάθε σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Συνδυάζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής με τον ορισμό της επιτάχυνσης για κάθε σώμα.

Σώμα A

$$\left. \begin{aligned} F_A &= m_A \alpha_A \\ \alpha_A &= \frac{v-0}{t_1-0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_A = m_A \frac{v}{t_1}. \quad (1)$$

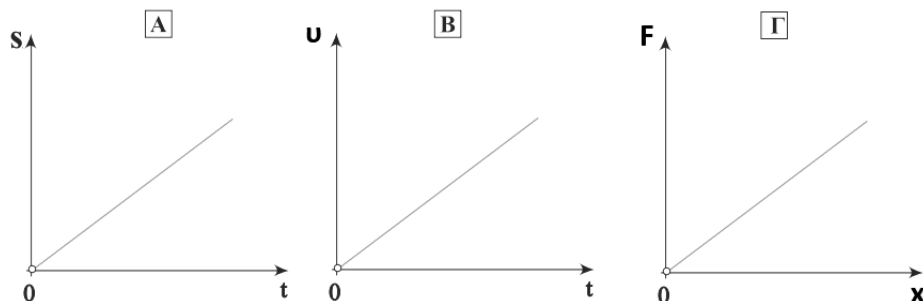
Σώμα B

$$\left. \begin{aligned} F_B &= m_B \alpha_B \\ \alpha_B &= \frac{v-0}{t_2-0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_B = m_B \frac{v}{t_2}. \quad (2)$$

Ισχύει :

$$F_A = 3F_B \xrightarrow{(1),(2)} m_A \frac{v}{t_1} = 3m_B \frac{v}{t_2} \Leftrightarrow \frac{m_A}{t_1} = 3 \frac{m_B}{t_2} \xrightarrow{t_2=2t_1} \frac{m_A}{t_1} = 3 \frac{m_B}{2t_1} \Leftrightarrow m_A = \frac{3}{2} m_B \Leftrightarrow m_B = \frac{2}{3} m_A.$$

40. (13568, 2.1) Τα πιο κάτω διαγράμματα έχουν κοινή μορφή, αλλά αναπαριστούν διαφορετικό φυσικό μέγεθος στον κατακόρυφο άξονα. Στο (Α) παρουσιάζεται το διάστημα που διανύει ένα κινούμενο σώμα σε σχέση με το χρόνο. Στο (Β) περιγράφεται η ταχύτητα με την οποία κινείται ένα δεύτερο σώμα σε σχέση με το χρόνο και στο (Γ) απεικονίζεται η γραφική παράσταση της δύναμης που δέχεται ένα τρίτο σώμα σε σχέση με τη μετατόπισή του.



Α. Το κάθε διάγραμμα είναι κατάλληλο για έναν από τους τέσσερις τρόπους υπολογισμού που περιγράφονται στις πιο κάτω φράσεις:

- 1) Μπορώ να υπολογίσω την ταχύτητα από την κλίση της ευθείας.
- 2) Μπορώ να υπολογίσω την μετατόπιση από το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της ευθείας και του άξονα του χρόνου.
- 3) Μπορώ να υπολογίσω την επιτάχυνση από το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της ευθείας και του άξονα του χρόνου.
- 4) Αν είναι δύναμη που επιμηκύνει ελατήριο μπορώ να υπολογίσω τη σταθερά του από την κλίση της ευθείας.

Στο τετράδιό σας να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:

Γραφική παράσταση	Αριθμός πρότασης
A	
B	
Γ	

Μονάδες 6

Β. Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

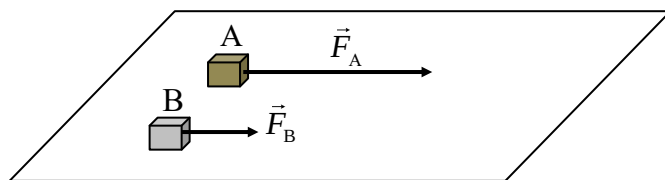
Μονάδες 6

Απάντηση

Η εκφώνηση έχει πολλές ασάφειες.

1. Δεν αναφέρει ότι τα διαγράμματα Α και Β αντιστοιχούν σε ευθύγραμμες κινήσεις.
2. Από την κλίση στο διάγραμμα $s - t$ υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας και όχι «την ταχύτητα» (η οποία είναι διανυσματικό μέγεθος).
3. Από το εμβαδό στο διάγραμμα $v - t$ υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης και όχι «τη μετατόπιση» (η οποία είναι διανυσματικό μέγεθος).
4. Στην 4η φράση έπρεπε να αναφέρει: «Αν F είναι το μέτρο της δύναμης που επιμηκύνει ένα ατσάλινο ελατήριο και x είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου, τότε μπορώ να υπολογίσω τη σταθερά του από την κλίση της ευθείας».

41. (13568, 2.2) Δυο κιβώτια A και B βρίσκονται δίπλα – δίπλα και ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούνται και στα δύο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$ με



μέτρα $F_A = 3 \cdot F_B$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δυο κιβώτια αρχίζουν να κινούνται ευθύγραμμα στο οριζόντιο επίπεδο και η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ η ταχύτητα του κιβωτίου A είναι διπλάσια από την ταχύτητα του κιβωτίου B.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Με βάση τα πιο πάνω δεδομένα, η σύγκριση των δύο μαζών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

$$\alpha) m_A = m_B, \quad \beta) m_A = \frac{2}{3} m_B, \quad \gamma) m_B = \frac{2}{3} m_A.$$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κάθε σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Συνδυάζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής με τον ορισμό της επιτάχυνσης για κάθε σώμα.

Σώμα A

$$\left. \begin{array}{l} F_A = m_A \alpha_A \\ \alpha_A = \frac{v_A - 0}{t_1 - 0} \end{array} \right\} \Rightarrow F_A = m_A \frac{v_A}{t_1}. \quad (1)$$

Σώμα B

$$\left. \begin{array}{l} F_B = m_B \alpha_B \\ \alpha_B = \frac{v_B - 0}{t_1 - 0} \end{array} \right\} \Rightarrow F_B = m_B \frac{v_B}{t_1}. \quad (2)$$

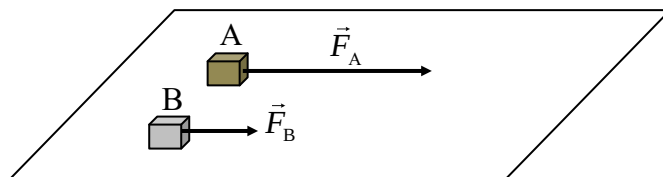
Ισχύει :

$$F_A = 3F_B \xrightarrow{(1), (2)} m_A \frac{v_A}{t_1} = 3m_B \frac{v_B}{t_1} \xrightarrow{v_A = 2v_B} m_A \cdot 2v_B = 3m_B v_B \Leftrightarrow 2m_A = 3m_B \Leftrightarrow$$

$$m_B = \frac{2}{3} m_A.$$

42. (13569, 2.2) Δυο κιβώτια A και B βρίσκονται δίπλα – δίπλα και ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούνται και στα δύο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$ με μέτρα $F_A = 3 \cdot F_B$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δυο κιβώτια αρχίζουν να κινούνται ευθύγραμμα στο οριζόντιο επίπεδο και η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ το κιβώτιο B έχει διανύσει τριπλάσια απόσταση από το κιβώτιο A.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Με βάση τα πιο πάνω δεδομένα, η σύγκριση των δύο μαζών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

α) $m_A = m_B$, β) $m_A = 9 m_B$, γ) $m_B = \frac{1}{3} m_A$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Οι σταθερές δυνάμεις $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ προκαλούν στα κιβώτια σταθερές επιταχύνσεις $\vec{\alpha}_A$, $\vec{\alpha}_B$ αντίστοιχα.

Αφού τα κιβώτια είναι αρχικά ακίνητα, εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Στην ίδια χρονική διάρκεια t διανύουν αποστάσεις s_A , s_B που δίνονται από τις εξισώσεις :

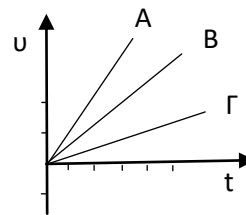
$$s_A = \frac{1}{2} \alpha_A t^2, \quad (1) \quad s_B = \frac{1}{2} \alpha_B t^2. \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει: } s_B = 3s_A \xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{2} \alpha_B t^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \alpha_A t^2 \Leftrightarrow \alpha_B = 3\alpha_A. \quad (3)$$

Τα μέτρα των επιταχύνσεων $\vec{\alpha}_A$, $\vec{\alpha}_B$ υπολογίζονται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_A = \frac{F_A}{m_A} \\ \alpha_B = \frac{F_B}{m_B} \end{array} \right\} \xrightarrow{(3)} \frac{F_B}{m_B} = 3 \cdot \frac{F_A}{m_A} \xrightarrow{F_A = 3F_B} \frac{F_B}{m_B} = 3 \cdot \frac{3F_B}{m_A} \Leftrightarrow m_A = 9m_B.$$

43. (13572, 2.1) Τρία ακίνητα σώματα Α, Β και Γ με διαφορετικές μάζες δέχονται την ίδια συνισταμένη δύναμη F και ξεκινούν να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Το διάγραμμα παρουσιάζει τις μεταβολές των ταχυτήτων τους ως προς το χρόνο για το χρονικό διάστημα που το καθένα δέχεται δύναμη.



A. Επιλέξτε ποια είναι η σωστή σχέση μαζών των σωμάτων:

α) $m_A = m_B = m_\Gamma$, β) $m_A < m_B < m_\Gamma$, γ) $m_A > m_B > m_\Gamma$.

Μονάδες 4

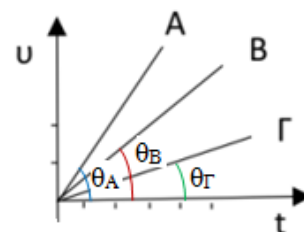
B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου η κλίση είναι ίση (αριθμητικά) με την τιμή της επιτάχυνσης.

Από το σχήμα φαίνεται ότι :

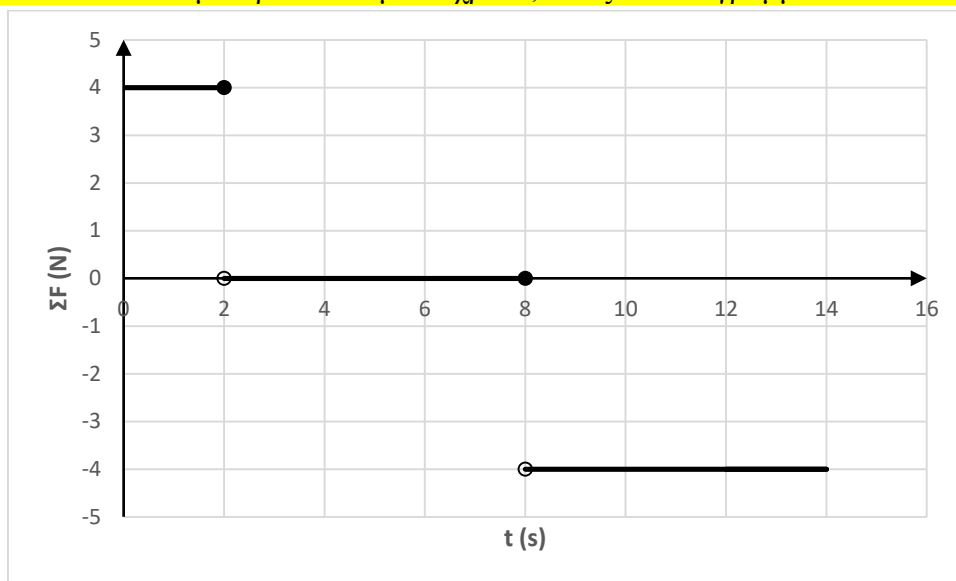


$$\theta_A > \theta_B > \theta_\Gamma \Leftrightarrow \varepsilon\phi\theta_A > \varepsilon\phi\theta_B > \varepsilon\phi\theta_\Gamma \Leftrightarrow \alpha_A > \alpha_B > \alpha_\Gamma. \quad (1)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_A = \frac{F}{m_A} \\ \alpha_B = \frac{F}{m_B} \\ \alpha_\Gamma = \frac{F}{m_\Gamma} \end{array} \right\} \xrightarrow{(1)} \frac{F}{m_A} > \frac{F}{m_B} > \frac{F}{m_\Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{m_A} > \frac{1}{m_B} > \frac{1}{m_\Gamma} \Leftrightarrow m_A < m_B < m_\Gamma.$$

44. (13617, 2.1) Σημειακό αντικείμενο μάζας $m = 1 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα. Η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως στο διάγραμμα που ακολουθεί.



A. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η ταχύτητά του είναι: $v_0 = 0$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$t \text{ (s)}$	2	4	6	8	10	12	14
$v \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$							

Μονάδες 7

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας για τη χρονική στιγμή $t_5 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Απάντηση

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά) και την εξίσωση της ταχύτητας σε κάθε χρονική διάρκεια.

$0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$:

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma F_1}{m} = \frac{4 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$$\underline{t_1 = 2 \text{ s}} : v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$2 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$:

$$\alpha_2 = \frac{\Sigma F_2}{m} = \frac{0 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\text{Άρα : } v = v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{σταθερή.}$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

8 s → 14 s :

$$\alpha_3 = \frac{\Sigma F_3}{m} = \frac{-4 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

$$\underline{t_5 = 10 \text{ s}} : \quad v_5 = v_1 + \alpha_3 (t_5 - t_4) = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 - 8) \text{ s} \Rightarrow v_5 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\underline{t_6 = 12 \text{ s}} : \quad v_6 = \alpha_3 (t_6 - t_5) = - \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (12 - 10) \text{ s} \Rightarrow v_6 = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\underline{t_7 = 14 \text{ s}} : \quad v_7 = \alpha_3 (t_7 - t_5) = - \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (14 - 10) \text{ s} \Rightarrow v_7 = -16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$t \text{ (s)}$	2	4	6	8	10	12	14
$v \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$	8	8	8	8	0	-8	-16

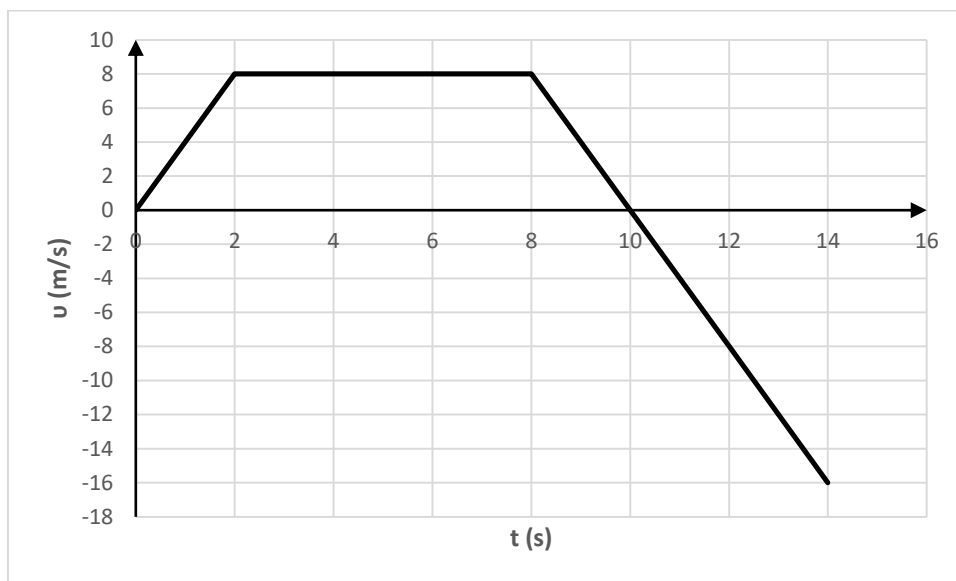
Σχόλιο : Η εκφώνηση αναφέρει αρχικά ότι το σώμα κινείται ευθύγραμμα, ενώ στη συνέχεια δίνει ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι ακίνητο!

Επίσης, δεν αναφέρει ότι **η συνισταμένη δύναμη έχει σταθερή διεύθυνση** και το διάγραμμα δείχνει πως μεταβάλλεται **η αλγεβρική τιμή** της συνισταμένης δύναμης με το χρόνο.

Μία καλύτερη διατύπωση θα ήταν : «Σε σώμα μάζας $m = 1 \text{ Kg}$ που είναι ακίνητο αρχικά πάνω σε οριζόντια επιφάνεια, ασκείται οριζόντια συνισταμένη δύναμη που έχει σταθερή διεύθυνση.

Η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με το επόμενο διάγραμμα».

45. (13618, 2.1) Σημειακό αντικείμενο μάζας $m = 1 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως στο διάγραμμα που ακολουθεί.



A. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$t \text{ (s)}$	2	4	6	10	12	14
$\Sigma F \text{ (N)}$						

Μονάδες 6

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας για τη χρονική στιγμή $t_5 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Απάντηση

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης και τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά), σε κάθε χρονική διάρκεια.

$0 \leq t < 2 \text{ s}$:

$$\alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{8 - 0 \text{ m}}{2 - 0 \text{ s}^2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Sigma F_1 = m\alpha_1 = 4 \text{ N}.$$

$2 \text{ s} < t < 8 \text{ s}$:

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{8 - 8 \text{ m}}{4 - 2 \text{ s}^2} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Sigma F_2 = m\alpha_2 = 0 \text{ N}.$$

$8 \text{ s} < t \leq 14 \text{ s}$:

$$\alpha_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{-16 - 8 \text{ m}}{14 - 8 \text{ s}^2} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Sigma F_3 = m\alpha_3 = -4 \text{ N}.$$

Η χρονική στιγμή $t_5 = 10 \text{ s}$ ανήκει στη χρονική διάρκεια $8 \text{ s} < t \leq 14 \text{ s}$, άρα η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης είναι $\Sigma F_3 = -4 \text{ N}$.

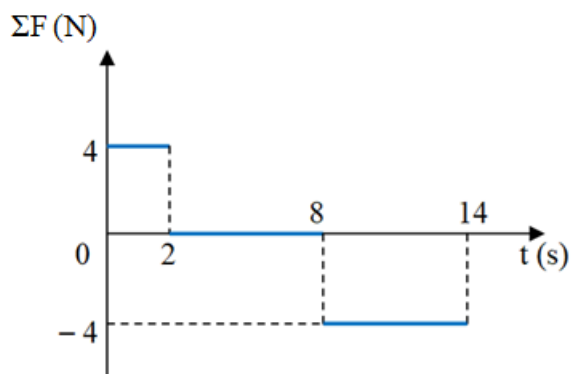
$t \text{ (s)}$	2	4	6	10	12	14
$\Sigma F \text{ (N)}$	;	0	0	-4	-4	-4

Σχόλιο :

Στη χρονική διάρκεια $[0 \text{ s}, 2 \text{ s})$ η συνισταμένη δύναμη έχει τιμή 4 N , ενώ στη χρονική διάρκεια $(2 \text{ s}, 8 \text{ s})$ έχει τιμή 0 N .

Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ η συνισταμένη δύναμη δεν έχει συγκεκριμένη τιμή, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Επομένως **δεν υπάρχει απάντηση** στο ερώτημα :
«Πόση είναι η τιμή της δύναμης τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ ».



46. (13620, 2.2) Σημειακό αντικείμενο A, μάζας m , κινείται ευθύγραμμα με την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης $\Sigma \vec{F}$. Σημειακό αντικείμενο B, μάζας $2 \cdot m$, κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το A, υπό την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης $\Sigma \vec{F}$.

A. Αν $\Delta \vec{v}_A$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου A σε χρονικό διάστημα Δt και $\Delta \vec{v}_B$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου B σε χρονικό διάστημα $2 \cdot \Delta t$, τότε:

$$\alpha) \Delta \vec{v}_A = \Delta \vec{v}_B, \quad \beta) \Delta \vec{v}_A = 2 \cdot \Delta \vec{v}_B, \quad \gamma) \Delta \vec{v}_A = \frac{\Delta \vec{v}_B}{2}$$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Συνδυάζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής με τον ορισμό της επιτάχυνσης για κάθε σώμα.

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_A = m_A \vec{\alpha}_A \\ \vec{\alpha}_A = \frac{\Delta \vec{v}_A}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}_A}{\Delta t}. \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_B = m_B \vec{\alpha}_B \\ \vec{\alpha}_B = \frac{\Delta \vec{v}_B}{2\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = 2m \frac{\Delta \vec{v}_B}{2\Delta t} \Leftrightarrow \Sigma \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}_B}{\Delta t}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m \frac{\Delta \vec{v}_A}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}_B}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{v}_A = \Delta \vec{v}_B.$$

47. (13622, 2.2) Σημειακό αντικείμενο A, μάζας m , κινείται ευθύγραμμα με την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης $\Sigma \vec{F}$. Σημειακό αντικείμενο B, μάζας m , κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το A, υπό την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης $2 \cdot \Sigma \vec{F}$.

A. Αν $\Delta \vec{v}_A$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου A σε χρονικό διάστημα Δt και $\Delta \vec{v}_B$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου B σε χρονικό διάστημα $2 \cdot \Delta t$, τότε:

α) $\Delta \vec{v}_A = \Delta \vec{v}_B$, β) $\Delta \vec{v}_A = 4 \cdot \Delta \vec{v}_B$, γ) $\Delta \vec{v}_A = \frac{\Delta \vec{v}_B}{4}$ **Μονάδες 4**

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 9**

Απάντηση

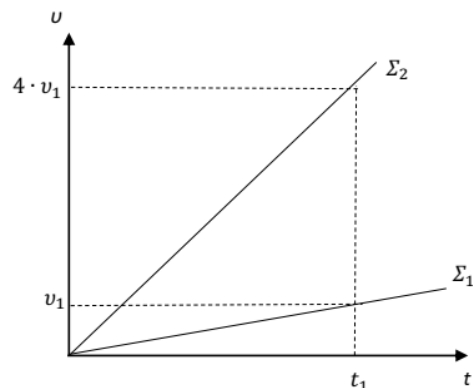
Συνδυάζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής με τον ορισμό της επιτάχυνσης για κάθε σώμα.

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_A = m_A \vec{\alpha}_A \\ \vec{\alpha}_A = \frac{\Delta \vec{v}_A}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}_A}{\Delta t}. \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_B = m_B \vec{\alpha}_B \\ \vec{\alpha}_B = \frac{\Delta \vec{v}_B}{2\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\Sigma \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}_B}{2\Delta t} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}_B}{4\Delta t}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m \frac{\Delta \vec{v}_A}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}_B}{4\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{v}_A = \frac{\Delta \vec{v}_B}{4}.$$

48. (13771, 2.2) Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 , με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, βρίσκονται ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, στα Σ_1 και Σ_2 ασκούνται σταθερές οριζόντιες δυνάμεις οι οποίες έχουν ίσα μέτρα, με αποτέλεσμα τα σώματα να ξεκινήσουν να κινούνται ευθύγραμμα. Στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου, φαίνεται η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας των δύο σωμάτων σε συνάρτηση με το χρόνο.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για τις μάζες των σωμάτων ισχύει η σχέση:

α) $m_1 = \frac{1}{4} \cdot m_2$, **β)** $m_1 = 4 \cdot m_2$, **γ)** $m_1 = m_2$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης και τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα.

Σ_1

$$\alpha_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{v_1 - 0}{t_1 - 0} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{v_1}{t_1}. \quad (1)$$

$$\Sigma F_1 = m_1 \alpha_1 \xrightarrow{(1)} F = m_1 \alpha_1. \quad (2)$$

Σ_2

$$\alpha_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{4v_1 - 0}{t_1 - 0} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{4v_1}{t_1}. \quad (3)$$

$$\Sigma F_1 = m_2 \alpha_2 \xrightarrow{(3)} F = m_2 \alpha_2. \quad (4)$$

$$(1), (3) \Rightarrow \alpha_2 = 4\alpha_1. \quad (5)$$

$$(2), (4) \Rightarrow m_1 \alpha_1 = m_2 \alpha_2 \xrightarrow{(5)} m_1 \alpha_1 = m_2 \cdot 4\alpha_1 \Rightarrow m_1 = 4m_2.$$

49. (14202, 2.2) Σημειακό αντικείμενο Α, μάζας m , κινείται με την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης $\Sigma \vec{F}$. Σημειακό αντικείμενο Β, μάζας $2 \cdot m$, κινείται με την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης $2 \cdot \Sigma \vec{F}$.

Α. Αν $\Delta \vec{v}_A$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου Α σε χρονικό διάστημα Δt και $\Delta \vec{v}_B$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου Β σε χρονικό διάστημα $2 \cdot \Delta t$, τότε:

$$\alpha) \Delta \vec{v}_A = \Delta \vec{v}_B, \quad \beta) \Delta \vec{v}_A = 2 \cdot \Delta \vec{v}_B, \quad \gamma) \Delta \vec{v}_A = \frac{\Delta \vec{v}_B}{2}.$$

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα :

$$\Sigma \vec{F}_A = m_A \vec{a}_A \Rightarrow \Sigma \vec{F} = m \vec{a}_A. \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F}_B = m_B \vec{a}_B \Rightarrow 2 \Sigma \vec{F} = 2m \vec{a}_B \Rightarrow \Sigma \vec{F} = m \vec{a}_B. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m \vec{a}_A = m \vec{a}_B \Leftrightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B \Leftrightarrow \frac{\Delta \vec{v}_A}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_B}{2 \Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{v}_A = \frac{\Delta \vec{v}_B}{2}.$$

50. (14204, 2.2) Σημειακό αντικείμενο Α, μάζας m , κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση σταθερής συνισταμένης οριζόντιας δύναμης $\Sigma \vec{F}$. Σημειακό αντικείμενο Β, μάζας $\frac{m}{2}$, κινείται στο ίδιο δάπεδο, με την επίδραση σταθερής συνισταμένης οριζόντιας δύναμης $\Sigma \vec{F}$.

Α. Αν $\Delta \vec{v}_A$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου Α σε χρονικό διάστημα Δt και $\Delta \vec{v}_B$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σημειακού αντικειμένου Β σε χρονικό διάστημα $2 \cdot \Delta t$, τότε:

$$\alpha) \Delta \vec{v}_A = \Delta \vec{v}_B, \quad \beta) \Delta \vec{v}_A = 4 \cdot \Delta \vec{v}_B, \quad \gamma) \Delta \vec{v}_A = \frac{\Delta \vec{v}_B}{4}$$

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

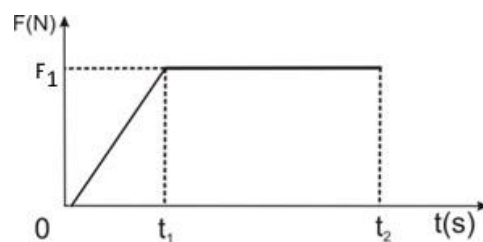
Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα.

$$\Sigma \vec{F}_A = m_A \vec{a}_A \Rightarrow \Sigma \vec{F} = m \vec{a}_A. \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F}_B = m_B \vec{a}_B \Rightarrow \Sigma \vec{F} = \frac{m}{2} \vec{a}_B. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m \vec{a}_A = \frac{m}{2} \vec{a}_B \Leftrightarrow \vec{a}_A = \frac{1}{2} \vec{a}_B \Leftrightarrow \frac{\Delta \vec{v}_A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \vec{v}_B}{2 \Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{v}_A = \frac{\Delta \vec{v}_B}{4}.$$

51. (14840, 2.1) Κιβώτιο βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s στο κιβώτιο ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερής διεύθυνσης, το μέτρο της οποίας σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από το διάγραμμα της διπλανής εικόνας,



A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Η κίνηση του κιβωτίου είναι:

(α) επιταχυνόμενη μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 και ομαλή από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 .

(β) ομαλά επιταχυνόμενη μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 και ομαλή από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 .

(γ) επιταχυνόμενη μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 και ομαλά επιταχυνόμενη από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 .

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 η συνισταμένη δύναμη έχει θετική φορά ($F > 0$) και το μέτρο της αυξάνεται, άρα η επιτάχυνση είναι θετική και αυξάνεται το μέτρο της.

Αφού το κιβώτιο ήταν ακίνητο αρχικά, άρα εκτελεί **ευθύγραμμη** (όχι ομαλά) **επιταχυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά.

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα έχει ταχύτητα $v_1 > 0$.

Από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 η δύναμη είναι σταθερή και θετική, άρα το κιβώτιο αποκτά σταθερή επιτάχυνση προς τη θετική φορά.

Αφού $v > 0$ και $a > 0$, η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση.

Άρα στο διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$ το κιβώτιο εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση** προς τη θετική φορά.

Σωστή απάντηση : (γ).

52. (14844, 2.1) Δυο κιβώτια Α και Β ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στα κιβώτια ασκούνται δυο οριζόντιες ομόρροπες δυνάμεις με ίσα μέτρα.

Α. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Αν γνωρίζετε ότι η μάζα του Α είναι διπλάσια της μάζας του Β δηλ. $m_A = 2 \cdot m_B$ τότε για τις επιταχύνσεις με τις οποίες κινούνται τα κιβώτια ισχύει:

(α) $\alpha_A = \alpha_B$

(β) $\alpha_A = 2 \cdot \alpha_B$

(γ) $\alpha_B = 2 \cdot \alpha_A$

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Έστω $\vec{F}$ η δύναμη που ασκείται σε κάθε κιβώτιο.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε κιβώτιο.

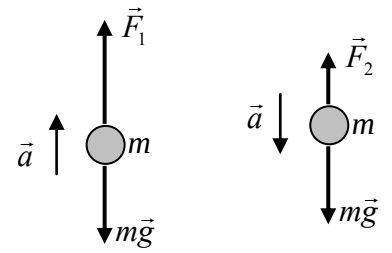
Κιβώτιο Α: $F = m_A \alpha_A$ (1)

Κιβώτιο Β: $F = m_B \alpha_B$ (2)

$$(1), (2) \Rightarrow m_A \alpha_A = m_B \alpha_B \xrightarrow{m_A = 2m_B} 2m_B \alpha_A = m_B \alpha_B \Leftrightarrow \alpha_B = 2\alpha_A.$$

Βάρος

53. (8016, B2) Μία μεταλλική σφαίρα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και κατακόρυφα προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση, το μέτρο της οποίας είναι ίσο με a και στις δύο περιπτώσεις, όπως φαίνεται στην εικόνα. Στην εικόνα παριστάνονται επίσης και οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα σε κάθε περίπτωση.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει η σχέση:

α) $F_1 + F_2 = 2mg$ β) $F_1 - F_2 = mg$ γ) $F_1 + F_2 = mg$

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Ανοδος

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow F_1 - mg = ma. \quad (1)$$

Κάθοδος

Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow mg - F_2 = ma. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει :

$$F_1 - mg = mg - F_2 \Leftrightarrow F_1 + F_2 = 2mg.$$

54. (8018, B2) Σε ένα σώμα μάζας m που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκούμε κατακόρυφη σταθερή δύναμη μέτρου F , οπότε το σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = 2g$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

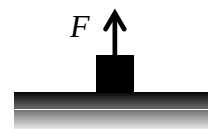
A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα τότε το βάρος B του σώματος θα έχει μέτρο:

(α) F

(β) $\frac{F}{3}$

(γ) $3F$



Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

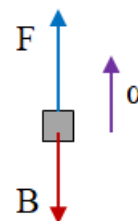
Στη διάρκεια της κίνησης, στο σώμα ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις :

η δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς τα πάνω και το βάρος $\vec{B}$ με φορά προς τα κάτω.

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \xrightarrow{a=2g} F - B = m \cdot 2g \Leftrightarrow F = B + 2B \Leftrightarrow F = 3B \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{F}{3}.$$



55. (8030, B2) Γερανός ασκεί σε κιβώτιο κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_1$ με την επίδραση της οποίας το κιβώτιο ανεβαίνει κατακόρυφα με επιτάχυνση μέτρου $\frac{g}{2}$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Όταν ο γερανός κατεβάζει το ίδιο κιβώτιο ασκώντας σε αυτό κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}_2$ το κιβώτιο κατεβαίνει με επιτάχυνση μέτρου $\frac{g}{2}$.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Αν στο κιβώτιο σε κάθε περίπτωση ασκούνται δύο δυνάμεις, η δύναμη του βάρους και αυτή από το γερανό, τότε για τα μέτρα τους θα ισχύει:

α) $F_1 = F_2$

β) $F_1 = 3 \cdot F_2$

γ) $F_1 = 2 \cdot F_2$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

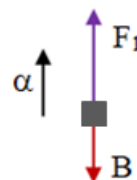
Απάντηση

1η περίπτωση

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow F_1 - B = m\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{g}{2}} F_1 - B = m \frac{g}{2} \xrightarrow{mg=B} F_1 = B + \frac{B}{2} \Leftrightarrow$$

$$F_1 = \frac{3}{2}B. \quad (1)$$

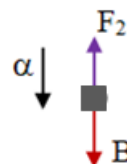


2η περίπτωση

Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow B - F_2 = m\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{g}{2}} B - F_2 = m \frac{g}{2} \xrightarrow{mg=B} B - \frac{B}{2} = F_2 \Leftrightarrow$$

$$F_2 = \frac{B}{2}. \quad (2)$$



Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει : $F_1 = 3 F_2$.

56. (8031, B2) Γερανός ασκεί σε κιβώτιο κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ με την επίδραση της οποίας το κιβώτιο κατεβαίνει κατακόρυφα με επιτάχυνση μέτρου $\frac{g}{2}$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Αν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, τότε για το μέτρο F της δύναμης $\vec{F}$ και το μέτρο B του βάρους του κιβωτίου, ισχύει :

α) $F = \frac{B}{2}$

β) $F = 2 \cdot B$

γ) $F = B$

Μονάδες 4

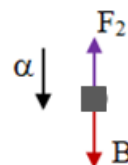
B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow B - F = m\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{g}{2}} B - F = m \frac{g}{2} \xrightarrow{mg = B} B - \frac{B}{2} = F \Leftrightarrow F = \frac{B}{2}.$$



57. (8036, B1) Καθώς ο Μάριος περπατούσε από το σχολείο προς το σπίτι του, είδε έναν ελαιοχρωματιστή να στέκεται σε μια ψηλή σκαλωσιά και να βάφει ένα τοίχο. Κατά λάθος, ο ελαιοχρωματιστής έσπρωξε τον κουβά με την μπογιά (μάζας 10 kg) και τη βούρτσα (μάζας 0,5 kg). Τα δύο αντικείμενα έπεσαν στο έδαφος ταυτόχρονα. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

A) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

α) Η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται στον κουβά με την μπογιά έχει μεγαλύτερο μέτρο από τη δύναμη της βαρύτητας που ασκείται στη βούρτσα.

β) Αφού τα δύο αντικείμενα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση, το μέτρο της δύναμης της βαρύτητας που ασκείται στο κάθε ένα θα πρέπει να είναι το ίδιο.

γ) Η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται στη βούρτσα έχει μεγαλύτερο μέτρο ώστε να φτάσει ταυτόχρονα στο έδαφος με τον κουβά.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Σύμφωνα με τη σχέση $B = m g$, το βάρος κάθε σώματος είναι ανάλογο με τη μάζα του (στον ίδιο τόπο).

Αφού ο κουβάς έχει μεγαλύτερη μάζα από τη βούρτσα, η δύναμη βαρύτητας που ασκείται στον κουβά έχει μεγαλύτερο μέτρο από τη δύναμη βαρύτητας στη βούρτσα.

Σωστή απάντηση : α).

58. (8054) Σώμα βάρους 10 N διατηρείται ακίνητο στο πάτωμα. Στο σώμα ασκείται κατακόρυφη δύναμη μέτρου F (μετρημένη σε N) με φορά προς τα πάνω. Το μέτρο της δύναμης διαρκώς αυξάνεται.

A) Συμπληρώστε στον πίνακα το μέτρο της κάθετης δύναμης επαφής N , που ασκείται από το πάτωμα στο σώμα.

B) Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 8

F	N
0	
2	
6	
10	

Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται 3 δυνάμεις : Το βάρος $\vec{B}$ που έχει μέτρο $B = 10 \text{ N}$, η δύναμη $\vec{F}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την επιφάνεια.

Αφού το σώμα ισορροπεί, ισχύει :

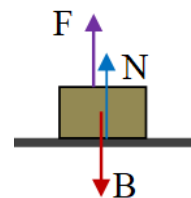
$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F + N - B = 0 \Leftrightarrow N = B - F. \quad (1)$$

$$F = 0 \text{ N} \xrightarrow{(1)} N = 10 \text{ N}.$$

$$F = 2 \text{ N} \xrightarrow{(1)} N = (10 - 2) \text{ N} = 8 \text{ N}.$$

$$F = 6 \text{ N} \xrightarrow{(1)} N = (10 - 6) \text{ N} = 4 \text{ N}.$$

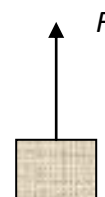
$$F = 10 \text{ N} \xrightarrow{(1)} N = (10 - 10) \text{ N} = 0 \text{ N}.$$



59. (12053, B2) Κιβώτιο βάρους $\vec{B}$, το οποίο θεωρούμε ως υλικό σημείο, κρέμεται κατακόρυφα με τη βοήθεια νήματος στο άκρο του οποίου ασκείται δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς τα πάνω. Η σταθερή επιτάχυνση με την οποία το νήμα με το κιβώτιο κινείται προς τα πάνω είναι $0,2g$ όπου g το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας

Το μέτρο της F σε σχέση με το βάρος B είναι

- α. Ίσο με το μέτρο του βάρους ($F = B$)
- β. τα 1,2 του μέτρου του βάρους ($F = 1,2B$)
- γ. τα 0,2 του μέτρου του βάρους ($F = 0,2B$)



Μονάδες 4

Μονάδες 9

B. Να δικαιολογήσετε την άποψη σας.

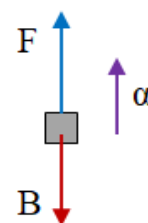
Απάντηση

Στη διάρκεια της κίνησης, στο σώμα ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις :

η δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς τα πάνω και το βάρος $\vec{B}$ με φορά προς τα κάτω.

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά) :

$$\Sigma F = m\alpha \xrightarrow{\alpha=0,2g} F - B = m \cdot 0,2g \xrightarrow{mg=B} F = B + 0,2B \Leftrightarrow F = 1,2B.$$

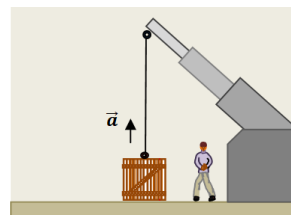


60. (13102, B1) Ένα βαρύ κιβώτιο μάζας m , είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Δένουμε στο κιβώτιο το ένα άκρο ανθεκτικού νήματος, το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται σε γερανό όπως στο σχήμα.

Ο γερανός σηκώνει το κιβώτιο και το ανεβάζει κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$, μέτρου $a = \frac{g}{8}$, όπου g το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας.

Οι δυνάμεις από τον αέρα μπορούν να αγνοηθούν.

Η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται από το νήμα στο κιβώτιο καθώς το ανεβάζει, έχει μέτρο:



A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

i. $F = m \cdot g$

ii. $F = \frac{9}{8} \cdot m \cdot g$

iii. $F = 2 \cdot m \cdot g$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

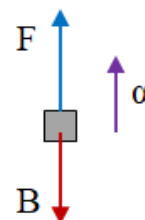
Απάντηση

Στο κιβώτιο ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις: το Βάρος $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{F}$ από το νήμα.

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά):

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow F - B = m\alpha \Leftrightarrow F = B + m\alpha \xrightarrow[\alpha = \frac{g}{8}]{B = mg} F = mg + m\frac{g}{8} \Leftrightarrow$$

$$F = \frac{9}{8} mg.$$



61. (13464, B1) Σώμα με βάρος μέτρου $B = 100 \text{ N}$ αφήνεται ελεύθερο από μικρό ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία πέφτει το σώμα είναι $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από τον αέρα είναι:

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. 60 N,

β. 40 N,

γ. 140 N

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

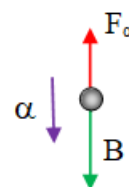
Μονάδες 8

Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις : το Βάρος $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{F}_a$ από τον αέρα, η οποία είναι αντίρροπη από την ταχύτητα.

Από τη σχέση $B = mg$ υπολογίζω τη μάζα του σώματος :

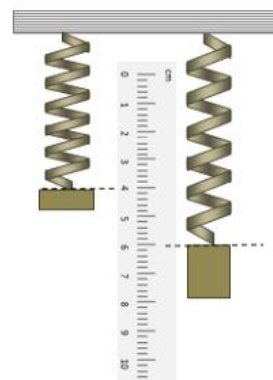
$$m = \frac{B}{g} \Rightarrow m = \frac{100 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow m = 10 \text{ Kg}.$$



Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά) :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow B - F_a = ma \Leftrightarrow F_a = B - ma \Rightarrow F_a = (100 - 10 \cdot 4) \text{ N} \Rightarrow F_a = 60 \text{ N}.$$

62. (13101, B1) Μια ομάδα μαθητών πειραματίζονται στο εργαστήριο προσπαθώντας να επιβεβαιώσουν το νόμο του Hooke. Χρησιμοποίησαν ένα ελατήριο ασημαντής μάζας (αβαρές), το οποίο κρέμασαν ώστε να είναι κατακόρυφο, στερεώνοντας το πάνω άκρο του σε ακλόνητο σημείο. Δίπλα του στερέωσαν κατακόρυφο ένα υποδεκάμετρο, με τέτοιο τρόπο, ώστε να αυξάνονται οι ενδείξεις του προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Κρέμασαν στο κάτω άκρο του ελατηρίου ένα σώμα μάζας m_1 και τότε το κάτω άκρο του ελατηρίου ισορρόπησε σε θέση που το υποδεκάμετρο δίπλα του έδειχνε 4 cm.



Αφαίρεσαν αυτό το σώμα και στην θέση του κρέμασαν ένα δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 2 \cdot m_1$.

Τότε το κάτω άκρο του ελατηρίου ισορρόπησε σε θέση που το υποδεκάμετρο δίπλα του έδειχνε 6 cm .

A) Όταν από το κάτω άκρο του ελατηρίου δεν κρέμεται κανένα σώμα, δηλαδή όταν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος, το κάτω άκρο του θα βρίσκεται σε θέση, στην οποία το υποδεκάμετρο δείχνει:

i. 0 ,

ii. 2 cm ,

iii. 4 cm .

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Έστω x_0 η ένδειξη του χάρακα όταν το ελατήριο έχει το κανονικό μήκος, x_1 η επιμήκυνση όταν κρέμεται το Σ_1 και x_2 η επιπλέον επιμήκυνση όταν κρέμεται το Σ_2 .

Από το σχήμα προκύπτει ότι :

$$x_0 + x_1 = 4 \text{ cm}, \quad x_2 = 2 \text{ cm}.$$

Η εκφώνηση ζητά το x_0 .

Στη θέση ισορροπίας του Σ_1 ισχύει :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{ελ} - B_1 = 0 \Leftrightarrow kx_1 = m_1g. \quad (1)$$

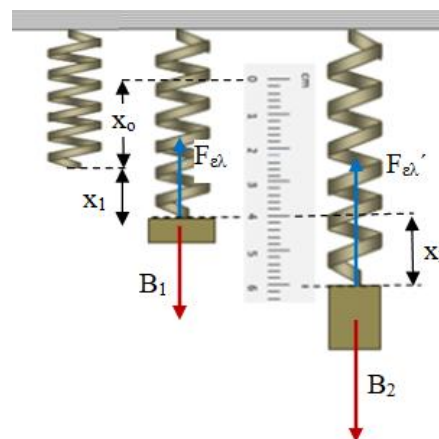
Στη θέση ισορροπίας του Σ_2 ισχύει :

$$\Sigma F' = 0 \Leftrightarrow F_{ελ'} - B_2 = 0 \Leftrightarrow k(x_1 + x_2) = m_2g \Leftrightarrow$$

$$kx_1 + kx_2 = 2m_1g \xrightarrow{(1)} m_1g + kx_2 = 2m_1g \Leftrightarrow kx_2 = m_1g. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x_1 = x_2 = 2 \text{ cm}.$$

$$\text{Αφού } x_0 + x_1 = 4 \text{ cm} \Leftrightarrow x_0 + 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm} \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ cm}.$$



63. (13103, B1) Μια ομάδα μαθητών στο εργαστήριο του σχολείου στερεώνει το πάνω άκρο ενός δυναμομέτρου, σε ορθοστάτη. Στη συνέχεια πειραματίζονται κρεμώντας από το γάντζο του βαρίδια με διαφορετικές μάζες. Μετρώντας τις επιμήκυνσεις του ελατηρίου του δυναμομέτρου, επιβεβαιώνουν ότι υπακούει στο νόμο του Hooke.

Στον πίνακα που ακολουθεί, στην πρώτη οριζόντια γραμμή δίνονται οι μάζες διαφόρων βαριδιών που κρέμασαν και κάτω από αυτές, οι επιμήκυνσεις του ελατηρίου του δυναμομέτρου, σε σχέση με το φυσικό του μήκος.

Μάζα (g)		100	200		300
Επιμήκυνση ελατηρίου (cm)	4	8		20	



A) Να συμπληρώσετε τις τιμές που μας απέκρυψαν από τις μετρήσεις τους οι μαθητές.

Μονάδες 4

B) Με τη βοήθεια των τιμών του πίνακα να κάνετε ένα διάγραμμα, με βαθμονομημένους άξονες, στο οποίο να δείξετε την γραφική παράσταση της επιμήκυνσης του ελατηρίου (σε cm) από το φυσικό του μήκος, σε συνάρτηση με τη μάζα (σε g), που κρεμούσαν στο άκρο του.

Μονάδες 8

Απάντηση

A) Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος που έχει μέτρο $B = mg$ και η δύναμη από το ελατήριο που έχει μέτρο $F_{ελ} = kx$, όπου k η σταθερά του ελατηρίου και x η επιμήκυνσή του.

Αφού το σώμα ισορροπεί, ισχύει :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{ελ} - B = 0 \Leftrightarrow F_{ελ} = B \Leftrightarrow kx = mg \Leftrightarrow \frac{x}{m} = \frac{g}{k} (= \text{σταθερό}). \quad (1)$$

Άρα η επιμήκυνση x του ελατηρίου είναι ανάλογη με τη μάζα m του σώματος.

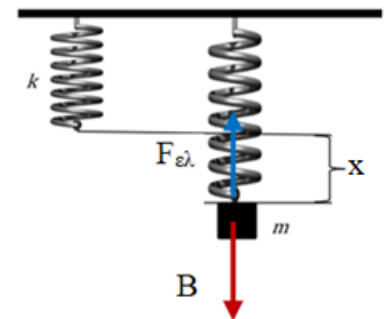
$$x = 4 \text{ cm} \xrightarrow{(1)} \frac{m}{4} = \frac{100}{8} \Leftrightarrow m = 4 \cdot \frac{100}{8} \text{ g} = 50 \text{ g}.$$

$$m = 200 \text{ g} \xrightarrow{(1)} \frac{200}{x} = \frac{100}{8} \Leftrightarrow x = \frac{200 \cdot 8}{100} \text{ cm} \Rightarrow x = 16 \text{ cm}.$$

$$x = 20 \text{ cm} \xrightarrow{(1)} \frac{m}{20} = \frac{100}{8} \Leftrightarrow m = 20 \cdot \frac{100}{8} \text{ g} \Rightarrow m = 250 \text{ g}.$$

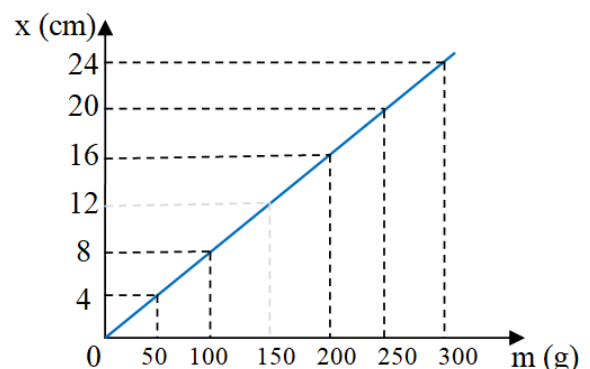
$$m = 300 \text{ g} \xrightarrow{(1)} \frac{300}{x} = \frac{100}{8} \Leftrightarrow x = \frac{300 \cdot 8}{100} \text{ cm} \Rightarrow x = 24 \text{ cm}.$$

Μάζα (g)	50	100	200	250	300
Επιμήκυνση ελατηρίου (cm)	4	8	16	20	24



B)

Το διάγραμμα επιμήκυνσης – μάζας για το συγκεκριμένο ελατήριο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



65. (13571, 2.1) Σφαίρα μάζας $m = 10 \text{ Kg}$ κρέμεται από την οροφή ενός ανελκυστήρα μέσω ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος. Γνωρίζετε ότι: $g = 10 \frac{m}{s^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

A. Να συνδυάσετε κάθε είδος κίνησης του ανελκυστήρα από την πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα, με το κατάλληλο μέτρο της τάσης που θα επιλέξετε από την δεύτερη στήλη:

Κίνηση προς τα:	Τάση νήματος
α) πάνω με επιτάχυνση $g/2$	1) 0 N
β) κάτω με επιτάχυνση g	2) 50 N
γ) πάνω με επιβράδυνση $g/2$	3) 100 N
δ) πάνω με σταθερή ταχύτητα	4) 150 N
	5) 200 N

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

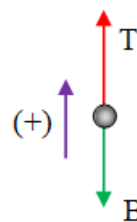
Μονάδες 8

Απάντηση

Στη σφαίρα ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις : η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα (με φορά προς τα πάνω) και το Βάρος $\vec{B}$.

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow T - B = m\alpha \Leftrightarrow T = mg + m\alpha. \quad (1)$$



α) Όταν ανεβαίνει με επιτάχυνση μέτρου $\frac{g}{2}$ (αλγεβρική τιμή $\alpha = \frac{g}{2}$) $\xrightarrow{(1)}$

$$T = mg + m\frac{g}{2} \Leftrightarrow T = \frac{3}{2}mg \Rightarrow T = 150\text{N}.$$

β) Όταν κατεβαίνει με επιτάχυνση μέτρου g (αλγεβρική τιμή $\alpha = -g$) $\xrightarrow{(1)}$

$$T = mg - mg \Rightarrow T = 0.$$

γ) Όταν ανεβαίνει με επιβράδυνση μέτρου $\frac{g}{2}$ (αλγεβρική τιμή $\alpha = -\frac{g}{2}$) $\xrightarrow{(1)}$

$$T = mg - m\frac{g}{2} \Leftrightarrow T = \frac{mg}{2} \Rightarrow T = 50\text{N}.$$

δ) Όταν ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα ($\alpha = 0$) $\xrightarrow{(1)}$ $T = mg \Rightarrow T = 100\text{N}.$

66. (13576, 2.1) Σφαίρα μάζας $m = 10 \text{ Kg}$ κρέμεται από την οροφή ενός ανελκυστήρα μέσω ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος. Γνωρίζετε ότι: $g = 10 \frac{m}{s^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

A. Να συνδυάσετε κάθε είδος κίνησης του ανελκυστήρα από την πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα, με το κατάλληλο μέτρο της τάσης που θα επιλέξετε από την δεύτερη στήλη:

Κίνηση προς τα:	Τάση νήματος
α) πάνω με επιτάχυνση $g/4$	1) 0 N
β) κάτω με επιτάχυνση g	2) 50 N
γ) πάνω με επιβράδυνση $g/2$	3) 100 N
δ) πάνω με σταθερή ταχύτητα	4) 125 N
	5) 200 N

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στη σφαίρα ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις : η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα (με φορά προς τα πάνω) και το Βάρος $\vec{B}$.

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow T - B = m\alpha \Leftrightarrow T = mg + m\alpha. \quad (1)$$

α) Όταν ανεβαίνει με επιτάχυνση μέτρου $\frac{g}{4}$ (αλγεβρική τιμή $\alpha = \frac{g}{4}$) $\xrightarrow{(1)}$

$$T = mg + m\frac{g}{4} \Leftrightarrow T = \frac{5}{4}mg \Rightarrow T = 125 \text{ N}.$$

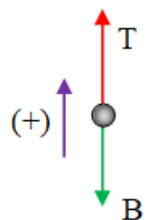
β) Όταν κατεβαίνει με επιτάχυνση μέτρου g (αλγεβρική τιμή $\alpha = -g$) $\xrightarrow{(1)}$

$$T = mg - mg \Rightarrow T = 0.$$

γ) Όταν ανεβαίνει με επιβράδυνση μέτρου $\frac{g}{2}$ (αλγεβρική τιμή $\alpha = -\frac{g}{2}$) $\xrightarrow{(1)}$

$$T = mg - m\frac{g}{2} \Leftrightarrow T = \frac{1}{2}mg \Rightarrow T = 50 \text{ N}.$$

δ) Όταν ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα ($\alpha = 0$) $\xrightarrow{(1)}$ $T = mg \Rightarrow T = 100 \text{ N}.$



67. (13577, 2.2) Σφαίρα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ κρέμεται από την οροφή ενός ανελκυστήρα με ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα. Γνωρίζετε ότι: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα F_A μπορεί να θεωρηθεί ως μια σταθερή δύναμη μέτρου 10 N που έχει πάντα αντίθετη φορά από τη φορά κίνησης της σφαίρας.

A. Να συνδυάσετε κάθε είδος κίνησης του ανελκυστήρα από την πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα, με το κατάλληλο μέτρο της τάσης που θα επιλέξετε από την δεύτερη στήλη:

Κίνηση προς τα:	Τάση νήματος
α) πάνω με επιτάχυνση $\frac{3g}{4}$	1) 0 N
β) πάνω με σταθερή ταχύτητα	2) 10 N
γ) κάτω με επιτάχυνση $\frac{g}{2}$	3) 15 N
δ) κάτω με σταθερή ταχύτητα	4) 30 N
	5) 45 N

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

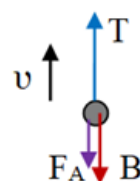
Μονάδες 9

Απάντηση

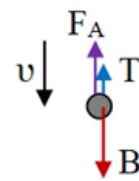
Στο σώμα ασκούνται τρεις κατακόρυφες δυνάμεις : η δύναμη $\vec{T}$ από το νήμα (με φορά προς τα πάνω), το Βάρος $\vec{B}$ και η αντίσταση του αέρα $\vec{F}_A$.

Όταν το σώμα ανεβαίνει η αντίσταση $\vec{F}_A$ έχει φορά προς τα κάτω (σχήμα 1), ενώ όταν κατεβαίνει η $\vec{F}_A$ έχει φορά προς τα πάνω (σχήμα 2).

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε κάθε περίπτωση (με θετική τη φορά της ταχύτητας).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

$$\alpha) \Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow T - B - F_A = m\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{3g}{4}} T = mg + m\frac{3g}{4} + F_A \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{7}{4}mg + F_A \Rightarrow T = \left(\frac{7}{4} \cdot 20 + 10\right) \text{ N} = 45 \text{ N}.$$

$$\beta) \Sigma F = 0 \Leftrightarrow T - B - F_A = 0 \Leftrightarrow T = mg + F_A \Rightarrow T = (20 + 10) \text{ N} = 30 \text{ N}.$$

$$\gamma) \Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow B - T - F_A = m\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{g}{2}} T = mg - m\frac{g}{2} - F_A \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}mg - F_A \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2} \cdot 20 - 10\right) \text{ N} = 0 \text{ N}.$$

$$\delta) \Sigma F = 0 \Leftrightarrow B - T - F_A = 0 \Leftrightarrow T = mg - F_A \Rightarrow T = (20 - 10) \text{ N} = 10 \text{ N}.$$

Ελεύθερη πτώση

68. (7973, B2) Δύο μικρές μεταλλικές σφαίρες (1) και (2) αφήνονται ελεύθερες να κινηθούν χωρίς αρχική ταχύτητα από διαφορετικά ύψη. Η σφαίρα (1) αφήνεται από ύψος h_1 και για να φτάσει στο έδαφος χρειάζεται διπλάσιο χρόνο από τη σφαίρα (2) που αφήνεται από ύψος h_2 . Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) είναι σταθερή και η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Ο λόγος των υψών $\frac{h_1}{h_2}$, από τα οποία αφέθηκαν να πέσουν οι σφαίρες είναι ίσος με:

- α) 4 β) 2 γ) $\frac{1}{2}$

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Κάθε σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση μέτρου $a = g$.

1η σφαίρα

Μέχρι να φτάσει στο έδαφος διανύει απόσταση $s_1 = h_1$ σε χρονική διάρκεια t_1 . Ισχύει :

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (1)$$

2η σφαίρα

Μέχρι να φτάσει στο έδαφος διανύει απόσταση $s_2 = h_2$ σε χρονική διάρκεια t_2 . Ισχύει :

$$h_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 \quad (2)$$

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{1}{2} g t_1^2}{\frac{1}{2} g t_2^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} = \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^2 \xrightarrow{t_1 = 2t_2} \frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{2t_2}{t_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = 4.$$

69. (7974, B2) Δύο σώματα αφήνονται να πέσουν διαδοχικά από την ταράτσα μιας πολυκατοικίας με χρονική διαφορά ίση με 1 s το ένα μετά το άλλο.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν η επίδραση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) είναι σταθερή, τότε η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων για όσο χρόνο τα σώματα βρίσκονται σε πτώση:

α) συνεχώς αυξάνεται **β)** συνεχώς μειώνεται **γ)** παραμένει σταθερή

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Έστω ότι η 1η σφαίρα αφήνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Μετά από χρόνο t θα έχει διανύσει διάστημα $s_1 = \frac{1}{2}gt^2$. (1)

Η 2η σφαίρα αφήνεται μετά από χρόνο $\Delta t = 1$ s, άρα ο χρόνος κίνησής της είναι :

$t_2 = t - \Delta t \xrightarrow{\Delta t=1s} t_2 = t - 1$. (S.I.)

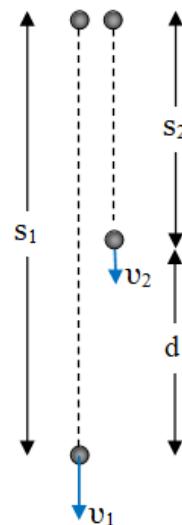
Στο χρόνο αυτό θα διανύσει διάστημα $s_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow s_2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2$. (S.I.) (2)

Η απόσταση των δύο σφαιρών τη χρονική στιγμή t είναι :

$d = s_1 - s_2 \xrightarrow{(1),(2)} d = \frac{1}{2}g[t^2 - (t-1)^2] = \frac{1}{2}g(t-t+1)(t+t-1) \Leftrightarrow$

$d = \frac{1}{2}g(2t-1)$. [$t > 1$ s]

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η απόσταση των δύο σφαιρών αυξάνεται συνεχώς (μέχρι να φτάσει στο έδαφος η 1η σφαίρα).



70. (7976, B1) Μία σιδερένια συμπαγής σφαίρα (Α) και ένα μπαλάκι του πινγκ-πονγκ (Β) αφήνονται την ίδια χρονική στιγμή από το μπαλκόνι του 1ου ορόφου ενός κτιρίου.

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) σταθερή, τότε:

α) η σφαίρα (Α) φτάνει στο έδαφος γρηγορότερα από το μπαλάκι, γιατί έχει μεγαλύτερη μάζα.

β) το μπαλάκι (Β) φτάνει στο έδαφος γρηγορότερα, γιατί έχει μικρότερη μάζα και συνεπώς θα αποκτήσει μεγαλύτερη επιτάχυνση.

γ) τα δύο σώματα φτάνουν ταυτόχρονα γιατί ο λόγος $\frac{W}{m}$, δηλαδή ο λόγος του βάρους τους W , προς τη μάζα τους m , είναι ίδιος και για τα δυο σώματα.

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας .

Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, άρα η μοναδική δύναμη σε κάθε σώμα είναι το βάρος $\vec{W}$.

Από τη σχέση $W = mg$ προκύπτει: $\frac{W}{m} = g$, δηλαδή τα σώματα κινούνται με επιτάχυνση μέτρου

$a = g$. Αφού $v_0 = 0$, άρα εκτελούν ελεύθερη πτώση.

Από τη σχέση $h = \frac{1}{2}gt^2$ προκύπτει ο χρόνος κίνησης: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Αφού τα σώματα αφήνονται ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος, ο χρόνος κίνησης είναι ίδιος, άρα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος.

71. (7994, B1) Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι 6,25 φορές μεγαλύτερο από το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης. Το βάρος ενός μεταλλικού κύβου, όπως μετράται με το ίδιο δυναμόμετρο, στη Γη είναι B_{Γ} και στην επιφάνεια της Σελήνης είναι B_{Σ} . Αν στον ίδιο κύβο, που αρχικά ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο στην επιφάνεια της Γης, ασκηθεί οριζόντια δύναμη μέτρου F , αυτός θα κινηθεί με επιτάχυνση μέτρου α_{Γ} . Αν στον ίδιο κύβο που αρχικά ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο στην επιφάνεια της Σελήνης, ασκηθεί οριζόντια δύναμη ίδιου μέτρου F , αυτός θα αποκτήσει επιτάχυνση μέτρου α_{Σ} . Η επίδραση του αέρα, όπου υπάρχει θεωρείται αμελητέα.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Για τα μέτρα των βαρών και των επιταχύνσεων που αποκτά ο κύβος ισχύουν οι σχέσεις:

α) $B_{\Gamma} = 6,25 \cdot B_{\Sigma}$ και $\alpha_{\Gamma} = 6,25 \cdot \alpha_{\Sigma}$

β) $B_{\Gamma} = 6,25 \cdot B_{\Sigma}$ και $\alpha_{\Gamma} = \alpha_{\Sigma}$

γ) $B_{\Gamma} = B_{\Sigma}$ και $\alpha_{\Gamma} = 6,25 \cdot \alpha_{\Sigma}$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Γράφω τη σχέση $B = mg$ για τον κύβο όταν βρίσκεται στη Γη και τη Σελήνη και τις συνδυάζω :

$$\left. \begin{array}{l} B_{\Gamma} = m g_{\Gamma} \\ B_{\Sigma} = m g_{\Sigma} \end{array} \right\} \xrightarrow{g_{\Gamma} = 6,25 g_{\Sigma}} B_{\Gamma} = 6,25 B_{\Sigma} .$$

Γράφω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, όταν ο κύβος επιταχύνεται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$, στη Γη και τη Σελήνη αντίστοιχα και τις συνδυάζω :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{\Gamma} = \frac{F}{m} \\ \alpha_{\Sigma} = \frac{F}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_{\Gamma} = \alpha_{\Sigma} .$$

Σωστή απάντηση : β.

72. (7998, B1) Στον ίδιο τόπο, δύο μεταλλικές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 , με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, με $m_2 > m_1$ αφήνονται να εκτελέσουν ελεύθερη πτώση από το ίδιο ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

α) Το βάρος της Σ_2 είναι μεγαλύτερο από αυτό της Σ_1 και συνεπώς η Σ_2 κινείται με επιτάχυνση μεγαλύτερη από αυτήν της Σ_1 .

β) Οι δύο σφαίρες κινούνται με ίσες επιταχύνσεις και φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος έχοντας ίσες ταχύτητες.

γ) Η βαρύτερη σφαίρα φτάνει πρώτη στο έδαφος και με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ελαφρύτερη.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα κινείται με την επίδραση του Βάρους της.

Η επιτάχυνση κάθε σφαίρας έχει μέτρο : $\alpha = \frac{B}{m} = \frac{mg}{m} \Leftrightarrow \alpha = g$.

Αφού οι δύο σφαίρες αφήνονται από το ίδιο ύψος (στον ίδιο τόπο), η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίδια άρα **οι σφαίρες κινούνται με ίσες επιταχύνσεις**.

Για το χρόνο t που χρειάζεται κάθε σφαίρα μέχρι να φτάσει στο έδαφος από ύψος h , ισχύει :

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Άρα **οι χρόνοι κίνησης είναι ίσοι**.

Το μέτρο της ταχύτητας κάθε σφαίρας τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος είναι :

$$v = gt \xrightarrow{(1)} v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{g^2 \cdot \frac{2h}{g}} \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Επομένως **οι σφαίρες φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος με ταχύτητες ίσου μέτρου**.

Σωστή απάντηση : β.

73. (8004, B1) Ένας αστροναύτης επιχειρεί να μετρήσει την επιτάχυνση της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια ενός πλανήτη που δεν έχει ατμόσφαιρα. Για το σκοπό αυτό αφήνει να πέσει μια μικρή σφαίρα από ύψος 1,5 m οπότε διαπιστώνει ότι η σφαίρα φτάνει στην επιφάνεια μετά από χρόνο 3 s.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Ο αστροναύτης συμπεραίνει ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι ίσο με:

- α) 1 m/s^2 β) $\frac{1}{2} \text{ m/s}^2$ γ) $\frac{1}{3} \text{ m/s}^2$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο πλανήτης δεν έχει ατμόσφαιρα, άρα η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα είναι η βαρυτική.

Αφού η σφαίρα αφήνεται από μικρό ύψος h , η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}_\pi$ κοντά στην επιφάνεια του πλανήτη είναι σταθερή, επομένως σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g_\pi t^2 \Leftrightarrow g_\pi = \frac{2h}{t^2} \Rightarrow g_\pi = \frac{2 \cdot 1,5 \text{ m}}{9 \text{ s}^2} \Rightarrow g_\pi = \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

74. (8014, B2) Δύο σφαίρες Α και Β με ίσες μάζες αφήνονται να εκτελέσουν ελεύθερη πτώση από ύψος $h/2$ και h , αντίστοιχα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

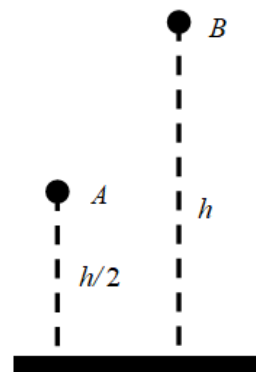
Εάν t_A και t_B είναι οι χρόνοι που απαιτούνται ώστε οι σφαίρες Α και Β αντίστοιχα, να φτάσουν στο έδαφος, τότε ισχύει η σχέση:

(α) $t_B = t_A$ (β) $t_B = 2t_A$ (γ) $t_B = \sqrt{2} t_A$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Εφαρμόζω τη σχέση $s = \frac{1}{2}gt^2$ που ισχύει για την ελεύθερη πτώση κάθε σφαίρας.

Η σφαίρα Α διανύει απόσταση $s_A = \frac{h}{2}$ μέχρι να φτάσει στο έδαφος, άρα :

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt_A^2 \Leftrightarrow h = gt_A^2. \quad (1)$$

Η σφαίρα Β διανύει απόσταση $s_B = h$ μέχρι να φτάσει στο έδαφος, άρα :

$$h = \frac{1}{2}gt_B^2. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{1}{2}gt_B^2 = gt_A^2 \Rightarrow t_B^2 = 2t_A^2 \Rightarrow t_B = \sqrt{2} t_A.$$

75. (8016, B1) Δύο πέτρες Α, και Β αφήνονται αντίστοιχα από τα ύψη h_A , h_B πάνω από το έδαφος να εκτελέσουν ελεύθερη πτώση.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Αν για τους χρόνους πτώσης μέχρι το έδαφος ισχύει η σχέση $t_A = 2t_B$, τότε τα ύψη h_A και h_B ικανοποιούν τη σχέση:

α) $h_A = 2h_B$

β) $h_A = 4h_B$

γ) $h_A = 8h_B$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Στην ελεύθερη πτώση, το ύψος h από το οποίο αφήνεται το σώμα και ο χρόνος t που απαιτείται για να φτάσει στο έδαφος συνδέονται με τη σχέση : $h = \frac{1}{2}gt^2$.

Επομένως :

$$h_B = \frac{1}{2}gt_B^2 \quad (1)$$

$$h_A = \frac{1}{2}gt_A^2 \xrightarrow{t_A=2t_B} h_A = \frac{1}{2}g(2t_B)^2 = \frac{1}{2}g \cdot 4t_B^2 \xrightarrow{(1)} h_A = 4h_B.$$

76. (8023, B1) Μία σφαίρα όταν αφήνεται από μικρό ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης φτάνει στο έδαφος σε χρόνο t_{Γ} . Η ίδια σφαίρα όταν αφήνεται από το ίδιο ύψος h πάνω από την επιφάνεια ενός πλανήτη Α φτάνει στην επιφάνεια του πλανήτη σε χρόνο $t_A = 3t_{\Gamma}$. Η αντίσταση του αέρα στην επιφάνεια της Γης είναι αμελητέα, ενώ ο πλανήτης Α δεν έχει ατμόσφαιρα.

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν g_{Γ} και g_A είναι οι επιταχύνσεις της βαρύτητας στη Γη και στον πλανήτη Α αντίστοιχα, τότε ισχύει:

α) $g_A = \frac{g_{\Gamma}}{9}$

β) $g_A = \frac{g_{\Gamma}}{3}$

γ) $g_{\Gamma} = \frac{g_A}{9}$

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η κίνηση της σφαίρας είναι ελεύθερη πτώση σε κάθε περίπτωση. Το ύψος h από το οποίο αφήνεται το σώμα και ο χρόνος t που απαιτείται για να φτάσει στο έδαφος συνδέονται με τη σχέση : $h = \frac{1}{2}gt^2$.

Στη Γη

$$h = \frac{1}{2}g_{\Gamma}t_{\Gamma}^2 \quad (1)$$

Στον πλανήτη Α

$$h = \frac{1}{2}g_A t_A^2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{1}{2}g_{\Gamma}t_{\Gamma}^2 = \frac{1}{2}g_A t_A^2 \xrightarrow{t_A=3t_{\Gamma}} g_{\Gamma}t_{\Gamma}^2 = g_A (3t_{\Gamma})^2 \Leftrightarrow g_{\Gamma}t_{\Gamma}^2 = g_A \cdot 9t_{\Gamma}^2 \Leftrightarrow g_{\Gamma} = 9g_A \Leftrightarrow$$

$$g_A = \frac{g_{\Gamma}}{9}.$$

77. (8029, B2) Σφαίρα η οποία κινείται κατακόρυφα με την επίδραση μόνο του βάρους της και βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ στο σημείο O.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Αν τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ η σφαίρα βρίσκεται 10 m κάτω από το O και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ τότε η σφαίρα τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$

α) κινούνταν προς τα πάνω **β)** κινούνταν προς τα κάτω **γ)** αφήνεται ελεύθερη χωρίς αρχική ταχύτητα

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η σφαίρα κινείται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η σφαίρα έχει κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου v_0 με φορά προς τα πάνω.

Η τιμή της μετατόπισης y από το O (με θετική φορά προς τα πάνω) δίνεται από την εξίσωση :

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

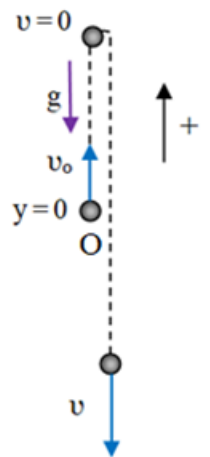
Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ η σφαίρα βρίσκεται 10 m κάτω από το σημείο O, άρα : $y = -10 \text{ m}$.

Αντικαθιστώ τις τιμές στη σχέση (1) :

$$-10 = v_0 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \Leftrightarrow -10 = 2v_0 - 20 \Leftrightarrow 2v_0 = 20 - 10 \Leftrightarrow 2v_0 = 10 \Leftrightarrow$$

$$v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} > 0.$$

Άρα, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η σφαίρα κινείται προς τα πάνω.



78. (8050, B2) Σε μια στιγμή απροσεξίας ξεφεύγει το σφυρί από τα χέρια κάποιου εργάτη που δουλεύει στην ταράτσα ενός πολυώροφου κτηρίου. Ένα δευτερόλεπτο αργότερα το σφυρί βρίσκεται έναν όροφο πιο κάτω από την ταράτσα του κτηρίου.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Αν θεωρήσετε την επίδραση του αέρα αμελητέα, την επιτάχυνση της βαρύτητας σταθερή και την υψομετρική διαφορά των διαδοχικών ορόφων ίδια τότε έπειτα από ένα ακόμη δευτερόλεπτο το σφυρί θα βρίσκεται σε σχέση με την ταράτσα:

α) Τέσσερις ορόφους πιο κάτω **β)** Δύο ορόφους πιο κάτω **γ)** Τρεις ορόφους πιο κάτω.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Έστω ότι η απόσταση δύο διαδοχικών ορόφων είναι s .

Σε χρόνο $t = 1 \text{ s}$ το σφυρί έχει κατέβει κατακόρυφα κατά s , άρα ισχύει: $s = \frac{1}{2} g t^2$. (1)

Μετά από ακόμη 1 s, δηλαδή συνολικά σε χρόνο $t' = 2t = 2 \text{ s}$, θα έχει κατέβει (συνολικά) κατά

$$s' = \frac{1}{2} g (2t)^2 \Leftrightarrow s' = \frac{1}{2} g 4t^2 \xrightarrow{(1)} s' = 4s.$$

Επομένως το σφυρί θα βρίσκεται 4 ορόφους κάτω από την ταράτσα.

79. (12005, B2) Από μικρό ύψος h από την επιφάνεια της Γης, όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g_0 αφήνουμε να πέσει ένα σφαιρίδιο. Από το ίδιο μικρό ύψος h από την επιφάνεια ενός άλλου Πλανήτη, όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g_0/4$, αφήνουμε να πέσει επίσης ένα σφαιρίδιο. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε, ότι η μοναδική δύναμη, η οποία ασκείται στο κάθε σώμα είναι το βάρος του. Αν v_1 είναι το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φθάνει το σφαιρίδιο στην επιφάνεια της Γης και v_2 είναι το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φθάνει το σφαιρίδιο στην επιφάνεια του άλλου Πλανήτη, τότε:

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

α. $v_1 = 2 \cdot v_2$

β. $v_2 = 2 \cdot v_1$

γ. $v_1 = v_2$

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας .

Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε σφαιρίδιο εκτελεί ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση μέτρου $\alpha = g$.

Για το χρονικό διάστημα t που χρειάζεται το σφαιρίδιο ώστε να φτάσει στο έδαφος από ύψος h , ισχύει :

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Το μέτρο της ταχύτητας κάθε σφαιριδίου τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, είναι :

$$v = gt \xrightarrow{(1)} v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{g^2 \cdot \frac{2h}{g}} \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Εφαρμόζω τη σχέση (2) για τους δύο πλανήτες.

στη Γη : $v_1 = \sqrt{2g_0 h} \quad (3)$

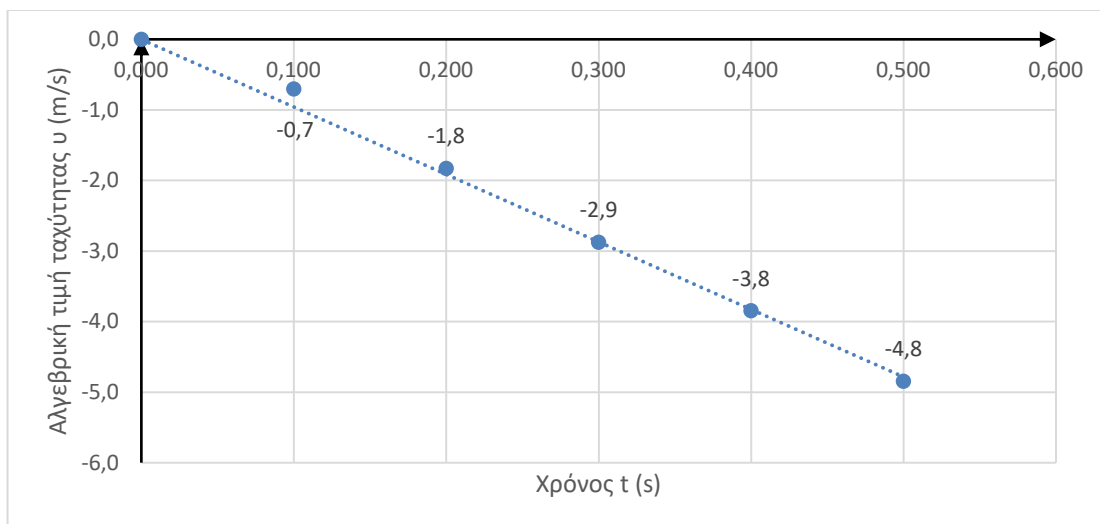
στον Πλανήτη : $v_2 = \sqrt{2\frac{g_0}{4} h} = \frac{1}{2}\sqrt{2g_0 h}. \quad (4)$

$$(3), (4) \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2}v_1 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2.$$

Εναλλακτικά, η σχέση (2) μπορεί να προκύψει με εφαρμογή του ΘΜΚΕ :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \Leftrightarrow v^2 = 2gh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

80. (12016, B1) Ένα σώμα (αμελητέων διαστάσεων) αφήνεται ελεύθερο από ύψος $h = 2 \text{ m}$ πάνω από την επιφάνεια της Γης, κάποια χρονική στιγμή ($t_0 = 0$). Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v του σώματος μεταβάλλεται με τον χρόνο t , όπως στο γράφημα που ακολουθεί:



A. Να χαρακτηρίσετε την πρόταση που ακολουθεί σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).
Η κίνηση του σώματος είναι ελεύθερη πτώση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Δίνεται το μέτρο της γήινης βαρυτικής επιτάχυνσης $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Απάντηση

Από την κλίση του διαγράμματος υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης.

$$\text{Για τη χρονική διάρκεια } 0 \text{ s} - 0,3 \text{ s ισχύει: } \alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,3 \text{ s}} \Rightarrow \alpha \approx -9,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος είναι $|\alpha| \approx 9,67 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Επομένως, $|\alpha| \neq g$, άρα η κίνηση δεν είναι ελεύθερη πτώση.

Σχόλια : 1) Ανάλογα με το σημείο επιλογής, διαφοροποιείται το αποτέλεσμα, χωρίς όμως να αλλάζει η

απάντηση. π.χ. για το διάστημα $0 \text{ s} - 0,4 \text{ s}$ προκύπτει: $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-3,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,4 \text{ s}} \Rightarrow \alpha \approx -9,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

2) Το διάγραμμα περιέχει πειραματικές τιμές, άρα για να εξεταστεί αν το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση πρέπει να συγκριθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος με το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας, το οποίο για την Ελλάδα και σε υψόμετρο μηδέν είναι $g_0 = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και όχι $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ που δίνει η εκφώνηση.

Δεν υπάρχει σημείο στην επιφάνεια της Γης στο οποίο η επιτάχυνση της βαρύτητας να έχει μέτρο μεγαλύτερο από $9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

81. (12317, B1) Από την ταράτσα μιας πολυκατοικίας αφήνεται να πέσει μία ξύλινη σφαίρα μάζας m και ταυτόχρονα αφήνεται να πέσει από το μπαλκόνι του δευτέρου ορόφου της ίδιας πολυκατοικίας μία σιδερένια σφαίρα διπλάσιας μάζας $2 \cdot m$. Γνωρίζετε ότι το ύψος πτώσης της ξύλινης σφαίρας είναι διπλάσιο σε σχέση με αυτό της σιδερένιας σφαίρας. Η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα και συνεπώς οι δύο σφαίρες εκτελούν ελεύθερη πτώση.

1. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν $\vec{a}_x$ είναι η επιτάχυνση της ξύλινης σφαίρας και $\vec{a}_\sigma$ είναι η επιτάχυνση της σιδερένιας σφαίρας, για τα μέτρα των επιταχύνσεων θα ισχύει :

$$\alpha) \alpha_x = 2 \cdot \alpha_\sigma, \quad \beta) \alpha_x = \alpha_\sigma, \quad \gamma) 2 \cdot \alpha_x = \alpha_\sigma.$$

Μονάδες 2

2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

3. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν t_x είναι ο χρόνος πτώσης της ξύλινης σφαίρας και t_σ είναι ο χρόνος πτώσης της σιδερένιας σφαίρας, θα ισχύει :

$$\alpha) t_x = 2 \cdot t_\sigma, \quad \beta) t_x = t_\sigma, \quad \gamma) t_x = \sqrt{2} \cdot t_\sigma.$$

Μονάδες 2

4. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Απάντηση

1, 2 : Κάθε σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα κινείται με την επίδραση του Βάρους της.

Η επιτάχυνση που αποκτά η σφαίρα έχει μέτρο : $\alpha = \frac{B}{m} = \frac{mg}{m} \Leftrightarrow \alpha = g$.

Αφού οι δύο σφαίρες αφήνονται από το ίδιο ύψος (στον ίδιο τόπο), η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίδια άρα **οι σφαίρες πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση** μέτρου $\alpha = g$, δηλαδή : $\alpha_x = \alpha_\sigma$.

3,4 : Για τον χρόνο κίνησης μέχρι να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος, ισχύει :

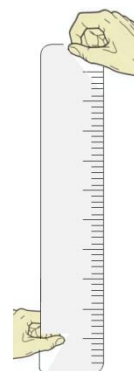
$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

$$\underline{\text{Σιδερένια σφαίρα}} : t_\sigma = \sqrt{\frac{2h_\sigma}{g}} \quad (1)$$

$$\underline{\text{Ξύλινη σφαίρα}} : t_x = \sqrt{\frac{2h_x}{g}} \xrightarrow{h_x = 2h_\sigma} t_x = \sqrt{\frac{2 \cdot 2h_\sigma}{g}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2h_\sigma}{g}}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow t_x = \sqrt{2} \cdot t_\sigma.$$

82. (13097, B1) Ο Κώστας και ο Δημήτρης σκέφτηκαν ένα τρόπο για να μετρήσουν τα αντανakλαστικά τους. Ο Κώστας κρατάει, από το πάνω άκρο του ένα χάρακα κατακόρυφο και ο Δημήτρης έχει το χέρι του πιο χαμηλά, κοντά στο χάρακα, χωρίς να τον πιάνει, σε τέτοια θέση ώστε, να τον πιάσει και να τον συγκρατήσει μόλις ο Κώστας τον αφήσει ελεύθερο να πέσει.



Ο Κώστας άφησε το χάρακα και ο Δημήτρης τον έπιασε, αλλά μέτρησαν ότι ώσπου να τον πιάσει, ο χάρακας πρόλαβε να πέσει κατακόρυφα, κατά $3,2\text{ cm}$.

A) Να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω χρόνους, είναι ο χρόνος αντίδρασης του Δημήτρη, θεωρώντας ότι το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας στην περιοχή είναι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και οι αντιστάσεις του αέρα, μπορούν να αγνοηθούν:

i. 8 s

ii. $0,8\text{ s}$

iii. $0,08\text{ s}$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

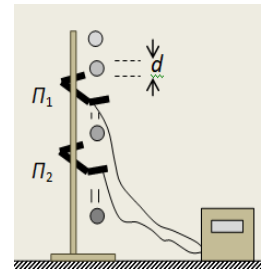
Θεωρώντας αμελητέα την αντίσταση του αέρα, ο χάρακας εκτελεί ελεύθερη πτώση για χρονική διάρκεια Δt ίση με τον χρόνο αντίδρασης του Δημήτρη.

$$\text{Ισχύει: } h = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \Leftrightarrow (\Delta t)^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{0,64 \cdot 10^{-2} \text{ s}^2} \Rightarrow$$

$$\Delta t = 0,8 \cdot 10^{-1} \text{ s} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 0,08 \text{ s}.$$

83. (13100, B1) Οι φωτοπύλες είναι αισθητήρες που μπορούν να δώσουν “σήμα” σε ένα ηλεκτρονικό χρονομετρητή για να καταγράψει τη χρονική διάρκεια μεταβολής της έντασης του φωτός όταν διέρχεται μέσα από αυτές κάποιο αντικείμενο.

Μια ομάδα παιδιών στο εργαστήριο, στερέωσαν σε ένα ορθοστάτη δύο φωτοπύλες και τις συνέδεσαν με τον ηλεκτρονικό χρονομετρητή τους. Άφησαν ελεύθερη μια μικρή μεταλλική σφαίρα να πέσει κατακόρυφα, έτσι ώστε να διαπεράσει τις δύο φωτοπύλες Π_1 , Π_2 , όπως δείχνει το σχήμα.



Ο χρονομετρητής, έδειξε ότι η χρονική διάρκεια που χρειάστηκε για να διαπεράσει η σφαίρα κάθε φωτοπύλη καθώς έπεφτε ελεύθερα, είναι αντίστοιχα $\Delta t_1 = 0,014 \text{ s}$ από την Π_1 και $\Delta t_2 = 0,005 \text{ s}$ από την Π_2 .

Να υποθέσετε, ότι η διάρκεια της διέλευσης της σφαίρας από κάθε φωτοπύλη είναι η χρονική διάρκεια για να μετατοπιστεί η σφαίρα κατακόρυφα τόσο, όσο η διάμετρος της.

Με βάση τις παραπάνω μετρήσεις:

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Για τα μέτρα των ταχυτήτων $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ που είχε η σφαίρα τις στιγμές που περνούσε από τις φωτοπύλες Π_1 και Π_2 αντίστοιχα, ισχύει η σχέση:

- i. $v_1 = v_2$ ii. $v_2 = 2 \cdot v_1$ iii. $v_2 = 2,8 \cdot v_1$

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 2
Μονάδες 8

Απάντηση

Δεχόμαστε ότι κατά τη διόδο της σφαίρας μέσα από τη φωτοπύλη η ταχύτητά της είναι σταθερή (κατά προσέγγιση), αφού η χρονική διάρκεια της διέλευσης είναι πολύ μικρή.

Όταν η σφαίρα διέρχεται από την 1η φωτοπύλη, διανύει απόσταση d (η διάμετρος της σφαίρας) με (περίπου) σταθερή ταχύτητα μέτρου v_1 σε χρονική διάρκεια Δt_1 , άρα ισχύει: $d = v_1 (\Delta t_1)$. (1)

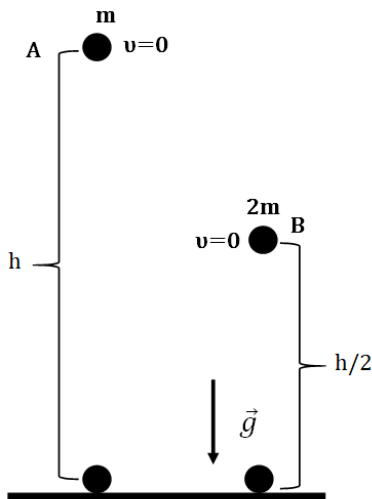
Όταν η σφαίρα διέρχεται από τη 2η φωτοπύλη, διανύει απόσταση d με (περίπου) σταθερή ταχύτητα μέτρου v_2 σε χρονική διάρκεια Δt_2 , άρα ισχύει: $d = v_2 (\Delta t_2)$. (2)

$$(1), (2) \Rightarrow v_1 (\Delta t_1) = v_2 (\Delta t_2) \Rightarrow 0,014 v_1 = 0,005 v_2 \Rightarrow v_2 = 2,8 v_1.$$

Σχόλιο : Στη διάρκεια της πτώσης η ταχύτητα της σφαίρας αυξάνεται.

Οι ταχύτητες που αναφέρονται στην απάντηση είναι οι μέσες ταχύτητες της σφαίρας $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ κατά τη διάρκεια της διόδου από τις φωτοπύλες.

84. (13508, 2.1) Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων με τις οποίες τα σώματα Α και Β του διπλανού σχήματος, με μάζες m και $2m$ αντίστοιχα, φθάνουν στο έδαφος είναι:
(Και στις δύο περιπτώσεις η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα).



Α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

α. $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{2}$

β. $\frac{v_A}{v_B} = 1$

γ. $\frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Μονάδες 4

Β. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση μέτρου $\alpha = g$.

Για το χρονικό διάστημα t που χρειάζεται η σφαίρα ώστε να φτάσει στο έδαφος από ύψος h , ισχύει :

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Η ταχύτητα κάθε σφαίρας τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει μέτρο :

$$v = gt \xrightarrow{(1)} v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{g^2 \cdot \frac{2h}{g}} \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Εφαρμόζω τη σχέση (2) για κάθε σφαίρα :

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

$$v_2 = \sqrt{2g\frac{h}{2}} = \sqrt{gh} \quad (4)$$

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (3), (4) :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{gh}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{2}.$$

Εναλλακτικά, η σχέση (2) μπορεί να προκύψει με εφαρμογή του ΘΜΚΕ :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \Leftrightarrow v^2 = 2gh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

85. (13547, 2.2) Δύο ίδιες σφαίρες A και B αφήνονται την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ να εκτελέσουν ελεύθερη πτώση από ύψος $h/2$ και h , αντίστοιχα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Εάν t_A και t_B οι χρονικές στιγμές που φτάνουν στο έδαφος οι σφαίρες A και B αντίστοιχα, τότε η σχέση μεταξύ τους είναι:

(α) $t_B = t_A$

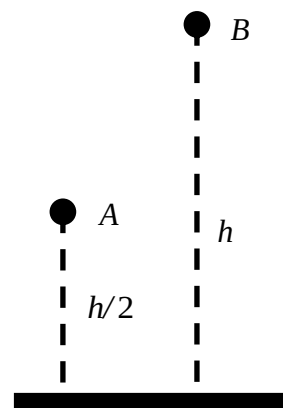
(β) $t_B = \sqrt{2}t_A$

(γ) $t_B = 2t_A$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Εφαρμόζω την εξίσωση $s = \frac{1}{2}gt^2$ που ισχύει κατά την ελεύθερη πτώση κάθε σφαίρας.

Σφαίρα A

Μέχρι να φτάσει στο έδαφος διανύει απόσταση $s_A = \frac{h}{2}$ σε χρονική διάρκεια t_A . Επομένως :

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt_A^2 \Leftrightarrow h = gt_A^2. \quad (1)$$

Σφαίρα B

Μέχρι να φτάσει στο έδαφος διανύει απόσταση $s_B = h$ σε χρονική διάρκεια t_B . Επομένως :

$$h = \frac{1}{2}gt_B^2. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{1}{2}gt_B^2 = gt_A^2 \Leftrightarrow t_B^2 = 2t_A^2 \Leftrightarrow t_B = \sqrt{2}t_A.$$

86. (13770, 2.1) Ο αστροναύτης Dave Scott στη αποστολή Apollo 15 το 1971 ρίχνει ένα σφυρί και ένα φτερό στην επιφάνεια της Σελήνης, η οποία δεν έχει ατμόσφαιρα, με στόχο να επιβεβαιώσει το νόμο της ελεύθερης πτώσης. Πράγματι το πείραμα επιβεβαίωσε ότι ο Γαλιλαίος είχε δίκιο... όλα τα σώματα όταν αφεθούν από κάποιο ύψος να πέσουν ελεύθερα, φτάνουν στο έδαφος ταυτόχρονα. Έστω ότι αφήνετε να πέσει ελεύθερα και εσείς ένα πανομοιότυπο σφυρί με αυτό που άφησε ο Scott στη Σελήνη. Σας δίνεται ότι η επίδραση του αέρα στη Γη θεωρείται αμελητέα και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη $\vec{g}_Γ$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Σελήνη $\vec{g}_Σ$ συνδέονται με τη σχέση $\vec{g}_Γ = 6 \cdot \vec{g}_Σ$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν εσείς αφήνατε το σφυρί να πέσει στη Γη από ύψος h_1 από την επιφάνεια του εδάφους, τότε το ύψος h_2 από την επιφάνεια της Σελήνης από το οποίο θα έπρεπε να αφήσει ο αστροναύτης το σφυρί έτσι ώστε οι χρόνοι πτώσης στη Γη και στην Σελήνη να είναι ίδιοι, θα ήταν :

$$\alpha) h_1 = \sqrt{6} \cdot h_2, \quad \beta) h_1 = 6 \cdot h_2, \quad \gamma) h_1 = h_2.$$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Εφαρμόζω την εξίσωση $s = \frac{1}{2} g t^2$ που ισχύει κατά την ελεύθερη πτώση κάθε σώματος.

Στη Γη : Μέχρι να φτάσει στο έδαφος διανύει απόσταση $s_1 = h_1$ σε χρονική διάρκεια t . Επομένως :

$$h_1 = \frac{1}{2} g_\Gamma t^2. \quad (1)$$

Στη Σελήνη : Μέχρι να φτάσει στο έδαφος διανύει απόσταση $s_2 = h_2$ σε χρονική διάρκεια t . Επομένως:

$$h_2 = \frac{1}{2} g_\Sigma t^2. \quad (2)$$

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{g_\Gamma}{g_\Sigma} = 6 \Rightarrow h_1 = 6 h_2.$$

Σχόλια :

1) Η εκφώνηση αναφέρει στην αρχή : «Ο αστροναύτης . . . ρίχνει ένα σφυρί (δηλαδή το εκτοξεύει), ενώ στη συνέχεια αναφέρεται στο νόμο της ελεύθερης πτώσης !

2) Η σχέση $\vec{g}_Γ = 6 \vec{g}_Σ$ είναι λάθος γιατί υποδηλώνει ότι τα διανύσματα της επιτάχυνσης $\vec{g}_Γ$ στην επιφάνεια της Γης και της επιτάχυνσης $\vec{g}_Σ$ στην επιφάνεια της Σελήνης έχουν την ίδια κατεύθυνση, πράγμα το οποίο δεν ισχύει γενικά.

Η εκφώνηση έπρεπε να δίνει τη σχέση των μέτρων των επιταχύνσεων $g_\Gamma = 6 g_\Sigma$.

87. (14834, 2.1) Αλεξιπτωτιστής εγκαταλείπει ελικόπτερο που βρίσκεται ακίνητο σε ύψος 1 Km από την επιφάνεια του εδάφους. Αρχικά ο αλεξιπτωτιστής έχει κλειστό το αλεξίπτωτο, οπότε εκτελεί ελεύθερη πτώση. Τη χρονική στιγμή t_1 , κατά την οποία έχει αποκτήσει ταχύτητα $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ανοίγει το αλεξίπτωτο. Στη συνέχεια κινείται με τη παραπάνω σταθερή ταχύτητα μέχρι να φθάσει στο έδαφος.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ τότε το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο αλεξιπτωτιστής εγκατέλειψε το ελικόπτερο μέχρι που έφτασε στο έδαφος είναι:

(α) $100,0\text{ s}$

(β) $101,0\text{ s}$

(γ) $100,5\text{ s}$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

$0\text{ s} \rightarrow t_1$: ελεύθερη πτώση.

$$v_1 = gt_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_1}{g} \Rightarrow t_1 = \frac{10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow t_1 = 1\text{ s}.$$

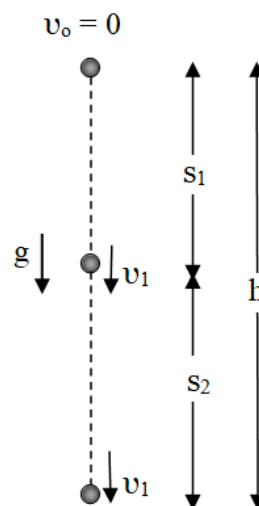
$$s_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\text{ s}^2 \Rightarrow s_1 = 5\text{ m}.$$

$t_1 \rightarrow t_2$: ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

$$s_2 = h - s_1 = 1000\text{ m} - 5\text{ m} \Rightarrow s_2 = 995\text{ m}.$$

$$s_2 = v_1(\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{s_2}{v_1} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{995\text{ m}}{10\frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow \Delta t_2 = 99,5\text{ s}.$$

$$t_{\text{ολ}} = t_1 + \Delta t_2 = 1\text{ s} + 99,5\text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 100,5\text{ s}.$$



Σχόλιο

Για να απαντηθεί η ερώτηση πρέπει να δεχθούμε ότι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη στιγμή που ανοίγει το αλεξίπτωτο μέχρι να σταθεροποιηθεί η ταχύτητα, είναι πολύ μικρό ($\Delta t \cong 0$) δηλαδή η ταχύτητα σταθεροποιείται «ακαριαία».

88. (14839, 2.1) Τον Ιούλιο του 1971 η αποστολή της ΝΑΣΑ Apollo-15 φτάνει στην επιφάνεια της Σελήνης. Ο αστροναύτης David Scott πραγματοποίησε ένα πείραμα ελεύθερης πτώσης, αφήνοντας ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος ένα σφυρί και ένα πούπουλο.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Αν γνωρίζουμε ότι η Σελήνη δεν έχει ατμόσφαιρα και το βάρος των αντικειμένων στην επιφάνειά της είναι περίπου το $\frac{1}{4}$ του βάρους τους στη Γη, τότε στο έδαφος της Σελήνης

(α) φτάνει πρώτο το πούπουλο,

(β) φτάνει πρώτο το σφυρί,

(γ) φτάνουν και τα δυο ταυτόχρονα.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού η Σελήνη δεν έχει ατμόσφαιρα, τα δύο σώματα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση μέτρου : $\alpha = g_{\Sigma}$.

Τα σώματα εκτελούν ελεύθερη πτώση από το ίδιο ύψος h .

Ο χρόνος κίνησης για κάθε σώμα είναι :

$$h = \frac{1}{2} g_{\Sigma} t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{g_{\Sigma}} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g_{\Sigma}}}.$$

Εφόσον αφήνονται ταυτόχρονα, άρα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος της Σελήνης.

Σχόλιο :

Το δεδομένο της εκφώνησης «το βάρος των αντικειμένων στην επιφάνειά της (Σελήνης) είναι περίπου το $\frac{1}{4}$ του βάρους τους στη Γη» είναι **λάθος**.

Το βάρος ενός σώματος στη Σελήνη είναι (περίπου) το $\frac{1}{6}$ του βάρους του στη Γη :

$$g_{\Sigma} \approx \frac{1}{6} g_{\Gamma} \Leftrightarrow mg_{\Sigma} \approx \frac{1}{6} mg_{\Gamma} \Leftrightarrow B_{\Sigma} \approx \frac{1}{6} B_{\Gamma}.$$

89. (14841) Δυο μικρές μεταλλικές σφαίρες Α και Β με μάζες m_A και m_B αντίστοιχα με $m_A > m_B$ βρίσκονται σε ύψος H από το έδαφος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s οι δυο σφαίρες αφήνονται ελεύθερες. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Α. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Τη χρονική στιγμή t οι σφαίρες βρίσκονται σε ύψη h_A και h_B αντίστοιχα για τα οποία ισχύει:

(α) $h_A > h_B$

(β) $h_A < h_B$

(γ) $h_A = h_B$

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος H .

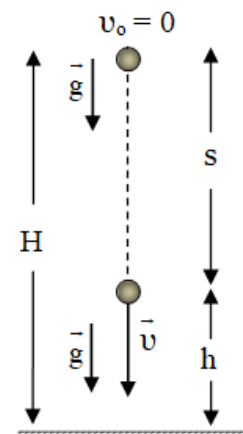
Η απόσταση που διανύει η σφαίρα σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση :

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \quad (1)$$

Τη στιγμή αυτή η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος : $h = H - s \xrightarrow{(1)} h = H - \frac{1}{2}gt^2$.

Αφού οι σφαίρες αφήνονται ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος H , ο χρόνος κίνησης t είναι ίδιος, άρα βρίσκονται στο ίδιο ύψος :

$$h_A = h_B = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

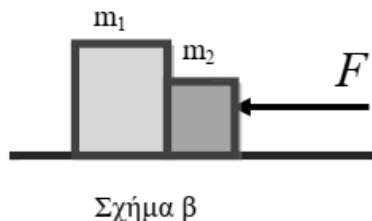
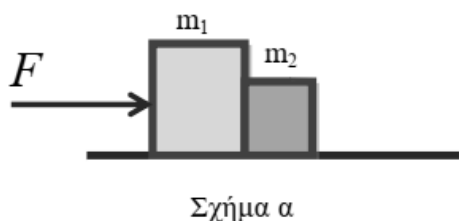


ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Απαντήσεις Ερωτήσεων Τράπεζας Θεμάτων

Δυνάμεις – Ο 3ος νόμος του Newton

1. (7978, B2) Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 για τις οποίες ισχύει $m_1 > m_2$ βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και είναι σε επαφή μεταξύ τους. Μπορούμε να μετακινήσουμε τα σώματα, εφαρμόζοντας οριζόντια δύναμη ίσου μέτρου F , είτε στο σώμα m_1 με φορά προς τα δεξιά, όπως φαίνεται στο σχήμα (α), είτε στο σώμα m_2 με φορά προς τα αριστερά όπως φαίνεται στο σχήμα (β).



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ένα κιβώτιο στο άλλο ισχύει:

α) είναι ίσο με μηδέν και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις

β) είναι μεγαλύτερο στην περίπτωση που η δύναμη ασκείται στο m_1 προς τα δεξιά (σχήμα α).

γ) είναι μεγαλύτερο στην περίπτωση που η δύναμη ασκείται στο m_2 προς τα αριστερά (σχήμα β).

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ονομάζω $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ τις δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων στο σχήμα α και $\vec{F}_1', \vec{F}_2'$ στο σχήμα β.

Οι δυνάμεις σε κάθε σχήμα έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης, άρα έχουν ίσα μέτρα :

$$F_1 = F_2, F_1' = F_2'.$$

1ος τρόπος

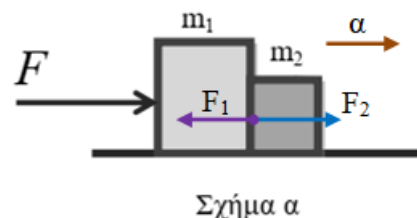
Η δύναμη που μετακινεί τα δύο σώματα στο λείο οριζόντιο δάπεδο έχει ίδιο μέτρο στις δύο περιπτώσεις, άρα η επιτάχυνση με την οποία κινούνται τα σώματα έχει ίδιο μέτρο στις δύο περιπτώσεις : $\alpha' = \alpha$.

1η περίπτωση : Η δύναμη ασκείται στο Σ_1 .

Σώμα Σ_2 :

$$\Sigma F_x = m_2 \alpha \Leftrightarrow F_2 = m_2 \alpha \quad (1)$$

$$\text{Ισχύει : } F_2 = F_1 \text{ (δράση – αντίδραση)} \xrightarrow{(1)} F_1 = m_2 \alpha. \quad (2)$$

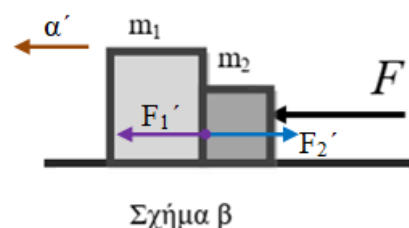


2η περίπτωση : Η δύναμη ασκείται στο Σ_2 .

Σώμα Σ_1 :

$$\Sigma F_x = m_1 \alpha' \xrightarrow{\alpha' = \alpha} F_1' = m_1 \alpha \quad (3)$$

$$\text{Αφού } m_1 > m_2 \xrightarrow{(2), (3)} F_1' > F_1.$$



2ος τρόπος (γενικός)

1η περίπτωση : Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται στο Σ_1 .

Σώμα Σ_1 :

$$\Sigma F_x = m_1 \alpha \Leftrightarrow F - F_1 = m_1 \alpha \quad (1)$$

Σώμα Σ_2 :

$$\Sigma F_x = m_2 \alpha \Leftrightarrow F_2 = m_2 \alpha \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow F - F_1 + F_2 = m_1 \alpha + m_2 \alpha \xrightarrow{F_1 = F_2} F = (m_1 + m_2) \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow F_1 = F_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot F. \quad (4)$$

2η περίπτωση : Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται στο Σ_2 .

Σώμα Σ_1 :

$$\Sigma F_x = m_1 \alpha' \Leftrightarrow F_1' = m_1 \alpha' \quad (5)$$

Σώμα Σ_2 :

$$\Sigma F_x = m_2 \alpha' \Leftrightarrow F - F_2' = m_2 \alpha' \quad (6)$$

$$(5) + (6) \Rightarrow F_1' + F - F_2' = m_1 \alpha' + m_2 \alpha' \xrightarrow{F_1' = F_2'} F = (m_1 + m_2) \alpha' \Leftrightarrow \alpha' = \frac{F}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

$$(5), (7) \Rightarrow F_1' = F_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot F. \quad (8)$$

Αφού $m_1 > m_2$, από τις σχέσεις (4), (8) προκύπτει : $F_1' > F_1$.

➤ **Άρα, το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ένα κιβώτιο στο άλλο είναι μεγαλύτερο όταν η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται στο Σ_2 με φορά προς τα αριστερά.**

2. (7992, B2) Η Μαρία και η Αλίκη μαθήτριες της Α΄ Λυκείου, στέκονται ακίνητες στη μέση ενός παγοδρομίου, φορώντας τα παγοπέδιλα τους και κοιτάζοντας η μία την άλλη. Η Μαρία έχει μεγαλύτερη μάζα από την Αλίκη. Κάποια χρονική στιγμή σπρώχνει η μία την άλλη με αποτέλεσμα να αρχίσουν να κινούνται πάνω στον πάγο.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν τα μέτρα των επιταχύνσεων που αποκτούν η Μαρία και η Αλίκη, αμέσως μετά την ώθηση που δίνει η μία στην άλλη, είναι α_M και α_A αντίστοιχα τότε ισχύει:

α) $\alpha_M = \alpha_A$

β) $\alpha_M > \alpha_A$

γ) $\alpha_M < \alpha_A$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Έστω m_M η μάζα της Μαρίας και m_A η μάζα της Αλίκης.

Σύμφωνα με την εκφώνηση : $m_A < m_M \Leftrightarrow \frac{m_A}{m_M} < 1. \quad (1)$

Υποθέτω ότι η τριβή ανάμεσα στα παγοπέδιλα και τον πάγο είναι ασήμαντη.

Έστω $\vec{F}_M$ η δύναμη που ασκεί η Αλίκη στη Μαρία και $\vec{\alpha}_M$ η επιτάχυνση που αποκτά η Μαρία (αμέσως μετά την ώθηση).

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη Μαρία :

$$F_M = m_M \alpha_M \quad (2)$$

Έστω $\vec{F}_A$ η δύναμη που ασκεί η Μαρία στην Αλίκη και $\vec{\alpha}_A$ η επιτάχυνση που αποκτά η Αλίκη (αμέσως μετά την ώθηση).

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για την Αλίκη :

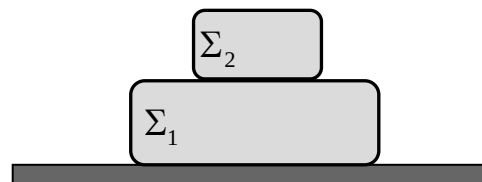
$$F_A = m_A \alpha_A \quad (3)$$

Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton, οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ της Μαρίας και της Αλίκης έχουν ίσα μέτρα (δράση – αντίδραση) :

$$F_M = F_A \xrightarrow{(2),(3)} m_M \alpha_M = m_A \alpha_A \Leftrightarrow \frac{\alpha_M}{\alpha_A} = \frac{m_A}{m_M} \xrightarrow{(1)} \frac{\alpha_M}{\alpha_A} < 1 \Leftrightarrow \alpha_M < \alpha_A.$$

3. (8002, B1) Θεωρούμε το σύστημα των δυο ακίνητων κουτιών Σ_1 και Σ_2 του σχήματος πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.

Α) Να αντιγράψετε το σχήμα στο γραπτό σας και να σχεδιάσετε σε κάθε κουτί ξεχωριστά τις δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό. Για καθεμιά δύναμη να προσδιορίσετε το σώμα που ασκεί τη δύναμη.



Μονάδες 5

Β) Να προσδιορίσετε ποιες από τις δυνάμεις που σχεδιάσατε είναι δυνάμεις από επαφή και ποιες δυνάμεις από απόσταση.

Μονάδες 4

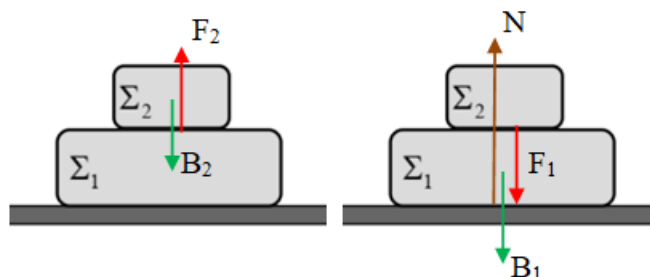
Γ) Να προσδιορίσετε ποιες από τις δυνάμεις που σχεδιάσατε αποτελούν ζεύγος δράση - αντίδραση.

Μονάδες 3

Απάντηση

Α) Στο Σ_2 ασκούνται 2 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}_2$ από τη Γη και η δύναμη $\vec{F}_2$ από το Σ_1 (σχήμα 1).

Στο Σ_1 ασκούνται 3 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}_1$ από τη Γη, η δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο και η δύναμη $\vec{F}_1$ από το Σ_2 (σχήμα 2).



Σχήμα 1

Σχήμα 2

Β) Οι δυνάμεις $\vec{N}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ είναι δυνάμεις επαφής, ενώ τα βάρη $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ είναι δυνάμεις από απόσταση.

Γ) Η δύναμη $\vec{F}_1$ που ασκεί το Σ_2 στο Σ_1 και η δύναμη $\vec{F}_2$ που ασκεί το Σ_1 στο Σ_2 έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης.

4. (8003, B1) Το βάρος ενός σώματος μετρήθηκε με τη βοήθεια του δυναμόμετρου A και βρέθηκε ίσο με 10 N (Σχήμα 1). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας δύο ίδια δυναμόμετρα (το A και το B) κρεμάμε το σώμα όπως φαίνεται στο σχήμα 2.

A) Από τις παρακάτω τρεις επιλογές να επιλέξετε αυτήν που θεωρείτε σωστή.

Αν θεωρήσετε ότι τα βάρη των δυναμόμετρων και των νημάτων είναι αμελητέα τότε οι ενδείξεις των δυναμόμετρων A και B είναι:

α) Δυναμόμετρο A: 5 N, Δυναμόμετρο B: 10 N

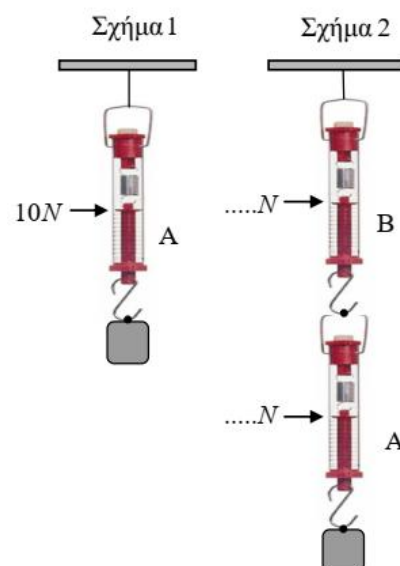
β) Δυναμόμετρο A: 5 N, Δυναμόμετρο B: 5 N

γ) Δυναμόμετρο A: 10 N, Δυναμόμετρο B: 10 N

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{F}_A$ από το δυναμόμετρο A (σχήμα 1).

Αφού το σώμα ισορροπεί, οι δυνάμεις είναι αντίθετες άρα έχουν ίσα μέτρα : $F_A = B = 10 \text{ N}$.

Το δυναμόμετρο A δέχεται από το σώμα δύναμη $\vec{F}_A'$ (η αντίδραση της $\vec{F}_A$) και από το B δύναμη $\vec{F}_A''$.

Ισχύει : $F_A' = F_A = 10 \text{ N}$ (δράση – αντίδραση).

Επομένως η ένδειξη του δυναμομέτρου A είναι : $F_A' = 10 \text{ N}$.

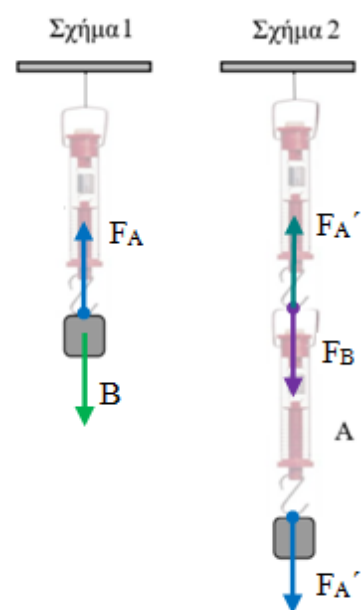
Αφού το (αβαρές) δυναμόμετρο A ισορροπεί, άρα :

$F_A'' = F_A' = 10 \text{ N}$.

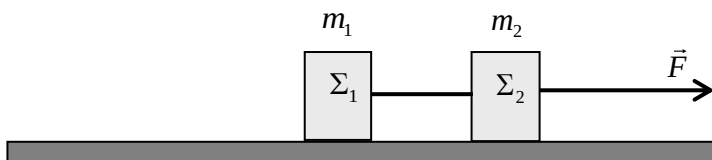
Το δυναμόμετρο B δέχεται από το A δύναμη $\vec{F}_B$ (η αντίδραση της $\vec{F}_A''$).

Ισχύει : $F_B = F_A'' = 10 \text{ N}$ (δράση – αντίδραση).

Επομένως η ένδειξη του δυναμομέτρου B είναι : $F_B = 10 \text{ N}$.



5. (8010, B2) Τα κιβώτια Σ_1 και Σ_2 , του διπλανού σχήματος, έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, με $m_2 = m_1$ και είναι δεμένα με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Τα κιβώτια σύρονται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ και μετακινούνται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$, ενώ το νήμα που τα συνδέει παραμένει συνεχώς τεντωμένο.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Αν T είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα σε κάθε κιβώτιο, τότε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

α) $F = T$

β) $F = 2T$

γ) $F = 3T$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Τα δύο σώματα και το νήμα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση $\vec{a}$.

Το νήμα ασκεί στα σώματα Σ_1, Σ_2 τις δυνάμεις $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ (τάσεις του νήματος).

Αφού η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, οι δυνάμεις

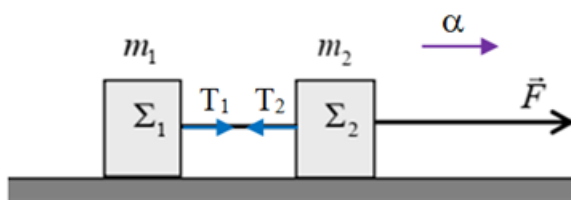
$\vec{T}_1, \vec{T}_2$ έχουν ίσα μέτρα: $T_1 = T_2 = T$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα.

$$\Sigma_1: \Sigma F_x = m_1 a \Leftrightarrow F - T_1 = m a \quad (1)$$

$$\Sigma_2: \Sigma F_x = m_2 a \Leftrightarrow T_2 = m a. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow F - T_1 = T_2 \xrightarrow{T_1=T_2=T} F - T = T \Leftrightarrow F = 2T.$$

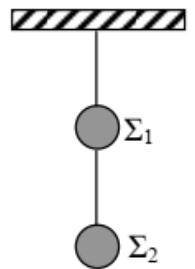


6. (8017, B1) Δύο μεταλλικές σφαίρες Σ_1 , Σ_2 έχουν βάρη B_1 και B_2 αντίστοιχα και κρέμονται ακίνητες με τη βοήθεια λεπτών νημάτων αμελητέας μάζας από την οροφή, όπως παριστάνεται στο σχήμα.

A) Να μεταφέρετε το διπλανό σχήμα στο γραπτό σας και να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στις σφαίρες Σ_1 και Σ_2 .

Μονάδες 5

B) Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που σχεδιάσατε, σε συνάρτηση με τα βάρη B_1 και B_2 των δύο σφαιρών.



Μονάδες 7

Απάντηση

A) Στη Σ_1 ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_1$ και οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}$, $\vec{T}_1$.

Στη Σ_2 ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_2$ και η τάση του νήματος $\vec{T}_2$.

B) Εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας για κάθε σφαίρα.

$\underline{\Sigma_1}$

$$\Sigma F_1 = 0 \Leftrightarrow T - B_1 - T_1 = 0 \Leftrightarrow T = B_1 + T_1. \quad (1)$$

$\underline{\Sigma_2}$

$$\Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow T_2 - B_2 = 0 \Leftrightarrow T_2 = B_2. \quad (2)$$

Η σφαίρα Σ_1 ασκεί στο κάτω νήμα τη δύναμη $\vec{T}_1'$, που έχει μέτρο :

$$T_1' = T_1 \text{ (δράση - αντίδραση)}. \quad (3)$$

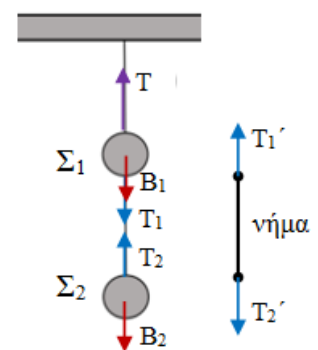
Η σφαίρα Σ_2 ασκεί στο κάτω νήμα τη δύναμη $\vec{T}_2'$, που έχει μέτρο :

$$T_2' = T_2 \text{ (δράση - αντίδραση)}. \quad (4)$$

Αφού το κάτω νήμα είναι αβαρές, ισχύει :

$$\Sigma F_v = 0 \Leftrightarrow T_1' = T_2' \xrightarrow{(3), (4)} T_1 = T_2 \xrightarrow{(2)} T_1 = B_2. \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (1), (5) προκύπτει : $T = B_1 + B_2$.



7. (8027, 2.2) Ο Όλιβερ Χάρντι (Α) και ο Σταν Λώρελ (Β) έχουν μάζες μαζί με τα αντίστοιχα πατίνια m_A και m_B με σχέση $m_A = 2m_B$. Οι δυο τους στέκονται με πατίνια σε λείο οριζόντιο δάπεδο κρατώντας το τεντωμένο **άμαζο σκοινί**, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Τραβώντας το σκοινί αρχίζουν να κινούνται με επιταχύνσεις μέτρων α_A και α_B που έχουν σχέση:

α) $\alpha_A = \alpha_B = 0$, β) $\alpha_A = 2\alpha_B$, γ) $\alpha_B = 2\alpha_A$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Έστω $\vec{F}_A$ η δύναμη που ασκεί το σκοινί στον Α και $\vec{F}_B$ η δύναμη που ασκεί το σκοινί στον Β. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton, ο Α ασκεί στο σκοινί δύναμη $\vec{F}_A' = -\vec{F}_A$ ($F_A' = F_A$) και ο Β ασκεί στο σκοινί δύναμη $\vec{F}_B' = -\vec{F}_B$ ($F_B' = F_B$).

Το τεντωμένο τμήμα του σκοινιού είναι ακίνητο, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_v = 0 \Leftrightarrow F_B' - F_A' = 0 \Leftrightarrow F_B' = F_A'.$$

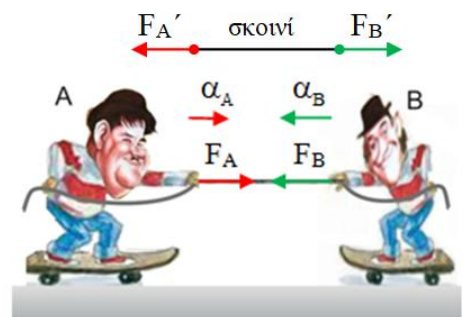
Επομένως : $F_B = F_A = F$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα :

$$\Sigma F_{x(A)} = m_A \alpha_A \Leftrightarrow F = m_A \alpha_A. \quad (1)$$

$$\Sigma F_{x(B)} = m_B \alpha_B \Leftrightarrow F = m_B \alpha_B. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m_A \alpha_A = m_B \alpha_B \xrightarrow{m_A = 2m_B} 2m_B \alpha_A = m_B \alpha_B \Leftrightarrow \alpha_B = 2\alpha_A.$$



Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι το τεντωμένο τμήμα του σκοινιού είναι **οριζόντιο**.

Η μάζα του σκοινιού δεν επηρεάζει την απάντηση αφού το τεντωμένο και οριζόντιο τμήμα του σκοινιού είναι ακίνητο.

Ο όρος «άμαζο» σκοινί είναι αδόκιμος και δεν αναφέρεται σε κανένα σχολικό σύγγραμμα Φυσικής.

8. (8040, B.2) Ο Μάριος που έχει μάζα 20 kg με τη μαμά του που έχει μάζα 60 kg κάνουν πατινάζ στον πάγο. Κάποια στιγμή, από απροσεξία, συγκρούονται με αποτέλεσμα να ακινητοποιηθούν και οι δύο.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης:

α) Οι δυνάμεις που ασκούνται ανάμεσα στον Μάριο και τη μαμά του έχουν ίσα μέτρα αλλά προκαλούν επιβραδύνσεις με διαφορετικό μέτρο στον Μάριο και τη μαμά του.

β) Οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ του Μάριου και της μαμάς του έχουν ίσα μέτρα και προκαλούν ίσες επιβραδύνσεις στον Μάριο και τη μαμά του.

γ) Η μαμά ασκεί μεγαλύτερη δύναμη στον Μάριο αφού έχει μεγαλύτερη μάζα.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αν m_1 είναι η μάζα του Μάριου και m_2 η μάζα της μαμάς του, ισχύει :

$$m_2 > m_1 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} > 1. \quad (1)$$

Έστω F_1 το μέτρο της δύναμης που ασκεί η μαμά στον Μάριο και α_1 το μέτρο της επιβράδυνσής του.

Έστω F_2 το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο Μάριος στη μαμά του και α_2 το μέτρο της επιβράδυνσής της.

Υποθέτω ότι η τριβή είναι ασήμαντη και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα :

$$F_1 = m_1 \alpha_1 \quad (2)$$

$$F_2 = m_2 \alpha_2 \quad (3)$$

Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton, **οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ του Μάριου και της μαμάς του έχουν ίσα μέτρα** (δράση – αντίδραση). Επομένως :

$$F_1 = F_2 \xrightarrow{(2),(3)} m_1 \alpha_1 = m_2 \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1} \xrightarrow{(1)} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 1 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2,$$

δηλαδή στη διάρκεια της σύγκρουσης **το μέτρο της επιβράδυνσης του Μάριου είναι μεγαλύτερο από της μαμάς του.**

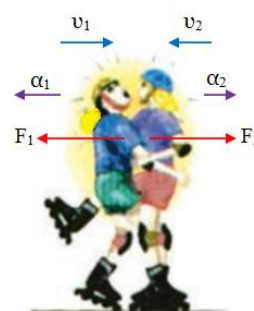
Σωστή απάντηση : α).

Επισημάνση

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης δεν έχουν σταθερό μέτρο, άρα και οι επιταχύνσεις των σωμάτων δεν έχουν σταθερό μέτρο.

Οι σχέσεις (2), (3) αναφέρονται σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή και όχι σε όλη τη διάρκεια της σύγκρουσης.

Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι πριν την σύγκρουση τα σώματα κινούνται αντίρροπα, ώστε η δύναμη αλληλεπίδρασης σε κάθε σώμα να είναι αντίρροπη από την ταχύτητά του και να το επιβραδύνει.



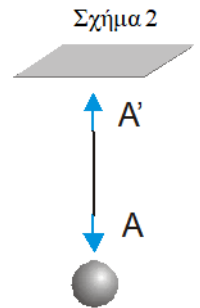
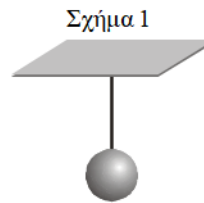
9. (8050, B1) Ένα μικρό σώμα κρέμεται μέσω σχοινιού που θεωρείται αβαρές από το ταβάνι (σχήμα 1). Ένας μαθητής σχεδιάζει σωστά τις δυνάμεις που ασκούνται στο σκοινί (σχήμα 2) και κάνει τον εξής συλλογισμό: «Σύμφωνα με τον 3^ο Νόμο του Νεύτωνα, οι δυνάμεις A και A' είναι αντίθετες».

- A)** Να επιλέξετε την σωστή απάντηση
- α)** ο συλλογισμός του μαθητή είναι σωστός
- β)** ο συλλογισμός του μαθητή είναι λάθος
- γ)** δεν έχει επαρκή στοιχεία για να συγκρίνει τις δυνάμεις

Μονάδες 4

- B)** Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8



Απάντηση

Ο συλλογισμός του μαθητή είναι λάθος.

Οι δυνάμεις $\vec{A}$, $\vec{A}'$ ασκούνται στο ίδιο σώμα (στο σκοινί) και δεν αποτελούν ζεύγος δράσης–αντίδρασης.

➤ Αφού το σκοινί δεν έχει βάρος και ισορροπεί, άρα οι δυνάμεις $\vec{A}$, $\vec{A}'$ είναι αντίθετες :

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} + \vec{A}' = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = -\vec{A}'.$$

10. (12004, B1) Το βάρος του σώματος, με τη βοήθεια του δυναμόμετρου Α, βρέθηκε ίσο με 50 N (Σχήμα 1). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας δύο δυναμόμετρα (το Α και ένα ίδιο δυναμόμετρο Β) κρεμάμε το σώμα όπως στο σχήμα 2.

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Οι τιμές των δυναμόμετρων Α και Β είναι:

(α) Δυναμόμετρο Α: 50 N, Δυναμόμετρο Β: 100 N

(β) Δυναμόμετρο Α: 50 N, Δυναμόμετρο Β: 50 N

(γ) Δυναμόμετρο Α: 25 N, Δυναμόμετρο Β: 25 N

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Να θεωρήσετε ότι τα βάρη των δυναμόμετρων και των νημάτων είναι αμελητέα.

Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ με μέτρο $B = 50 \text{ N}$ και οι δυνάμεις $\vec{T}_A$, $\vec{T}_B$ από τα νήματα.

Αν το σώμα είναι ομογενές ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και τα σημεία πρόσδεσης των νημάτων ισαπέχουν από τις πλαϊνές έδρες του σώματος, τότε λόγω συμμετρίας ισχύει : $T_A = T_B = T$.

Αφού το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow T + T - B = 0 \Leftrightarrow 2T = B \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{B}{2} \Rightarrow T = 25 \text{ N}.$$

Σε κάθε νήμα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ από το σώμα και το αντίστοιχο δυναμόμετρο.

Αφού η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, ισχύει :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_2 - F_1 = 0 \Leftrightarrow F_2 = F_1.$$

Όμως $F_1 = T = 25 \text{ N}$ (δράση – αντίδραση), άρα : $F_2 = 25 \text{ N}$.

Στο κάτω άκρο του δυναμόμετρου Α ασκείται η δύναμη $\vec{F}_A$ από το αριστερό νήμα.

Ισχύει : $F_A = F_2 = 25 \text{ N}$ (δράση – αντίδραση).

Όμοια, για το δεξιό νήμα : $F_B = F_2 = 25 \text{ N}$.

Επομένως, οι ενδείξεις των δυναμομέτρων είναι : $F_A = F_B = 25 \text{ N}$.

Σχόλια :

Για να απαντήσουμε στην ερώτηση **πρέπει να υποθέσουμε ότι οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_A$, $\vec{T}_B$ στο σχήμα 2 είναι ίσες.**

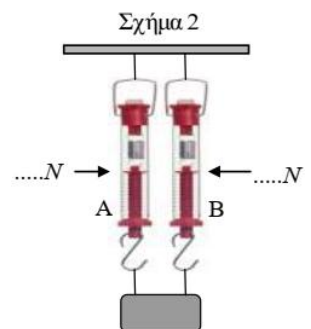
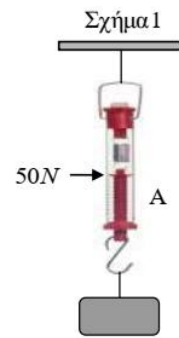
Για να ισχύει αυτό, πρέπει να συντρέχουν οι εξής προϋποθέσεις :

α) το σώμα να είναι ομογενές και κανονικό γεωμετρικό στερεό (π.χ. ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο).

β) τα σημεία πρόσδεσης των νημάτων να ισαπέχουν από τις πλαϊνές έδρες του σώματος.

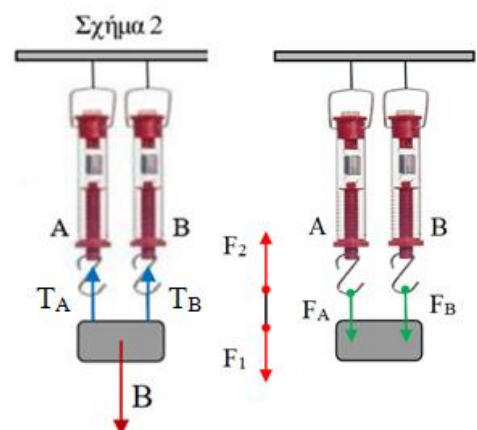
Αν δεν ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις, τότε οι ενδείξεις των δυναμομέτρων δεν είναι ίσες και τα δεδομένα δεν αρκούν για να απαντήσουμε στην ερώτηση.

Η ερώτηση απαιτεί γνώσεις που δεν διαθέτουν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου.



Μονάδες 4

Μονάδες 8



13. (12353, 2.1) Ένας ανελκυστήρας μάζας M μεταφέρει δύο άτομα συνολικής μάζας m . Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα. Ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε την τάση του (αβαρούς) συρματόσχοινου το οποίο προσδένεται στον ανελκυστήρα. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Θεωρήστε ότι οι μοναδικές δυνάμεις που δέχεται ο θάλαμος του ανελκυστήρα κατά την άνοδο είναι αυτές που ασκούνται από τη Γη και το συρματόσχοινο.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Με βάση τα πιο πάνω δεδομένα, η τάση του συρματόσχοινου έχει μέτρο που ισούται με:

- α) $M \cdot g$, β) $(M - m) \cdot g$, γ) $(M + m) \cdot g$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ανελκυστήρας – άτομα είναι :

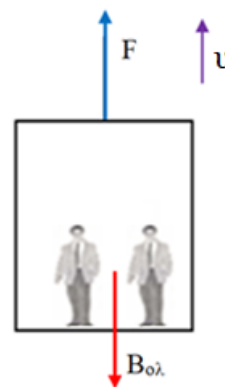
η δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί το συρματόσχοινο και το συνολικό βάρος $\vec{B}_{ολ}$ από τη Γη.

Το βάρος του συστήματος έχει μέτρο :

$$B_{ολ} = (M + m)g. \quad (1)$$

Αφού ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, ισχύει ο 1ος νόμος του Newton :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F - B_{ολ} = 0 \Leftrightarrow F = B_{ολ} \xrightarrow{(1)} F = (M + m)g.$$



14. (13105, B2) Ένα άτυχο σκυλάκι έπεσε στην παγωμένη λίμνη του Κολοράντο της πόλης Lone Tree των Η.Π.Α. Το άτυχο ζώο έμεινε αρκετές ώρες παγιδευμένο, αλλά κατάφερε να επιβιώσει.

Ένας διασώστης κατάφερε να πλησιάσει το σκυλάκι, το πήρε αγκαλιά και οι συνάδελφοί του άρχισαν να τους τραβούν, με τη βοήθεια σχοινιού που είναι δεμένο στη ζώνη του διασώστη.

Η μάζα του διασώστη είναι επτά φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του σκύλου ($m_{\delta} = 7 \cdot m_{\sigma}$).

Το σχοινί είναι συνεχώς τεντωμένο και οριζόντιο και ασκεί σταθερή δύναμη στη ζώνη του διασώστη μέτρου $F = 80 \text{ N}$. Η τριβή με την επιφάνεια της παγωμένης λίμνης μπορεί να θεωρηθεί μηδέν και οι αντιστάσεις αέρα να αγνοηθούν.

Το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που ασκεί ο διασώστης στο σκύλο, καθώς τον έχει στην αγκαλιά του έχει μέτρο F_{σ} .

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που δέχεται ο σκύλος από την αγκαλιά του διασώστη:

- i. $F_{\sigma} = 80 \text{ N}$ ii. $F_{\sigma} = 10 \text{ N}$ iii. $F_{\sigma} = 70 \text{ N}$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Έστω :

$\vec{F}$ η οριζόντια δύναμη που ασκεί το σχοινί στον διασώστη,

$\vec{F}_{\sigma}$ η οριζόντια δύναμη που ασκεί ο διασώστης στον σκύλο,

$\vec{F}_{\sigma}'$ η οριζόντια δύναμη που ασκεί ο σκύλος στον διασώστη (δηλαδή η αντίδραση της $\vec{F}_{\sigma}$),

$\vec{a}$ η επιτάχυνση με την οποία κινούνται και οι δύο μαζί.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τον διασώστη και για τον σκύλο ξεχωριστά :

διασώστης

$$\Sigma F_{\delta} = m_{\delta} \alpha \Leftrightarrow F - F_{\sigma}' = m_{\delta} \alpha. \quad (1)$$

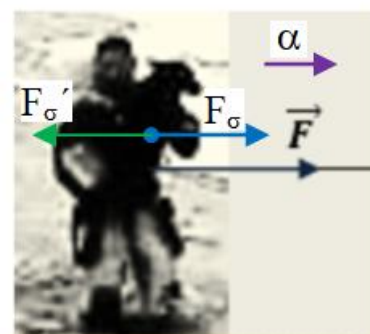
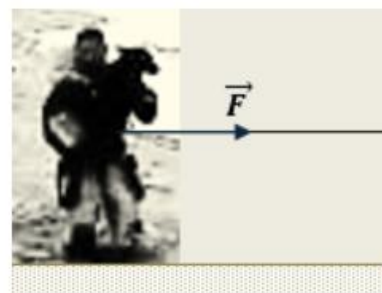
σκύλος

$$\Sigma F_{\sigma} = m_{\sigma} \alpha \Leftrightarrow F_{\sigma} = m_{\sigma} \alpha. \quad (2)$$

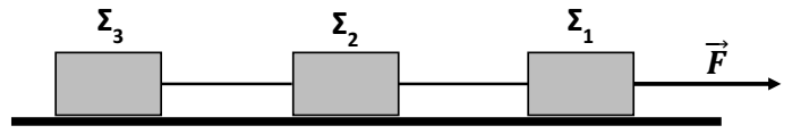
Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$F - F_{\sigma}' + F_{\sigma} = m_{\delta} \alpha + m_{\sigma} \alpha \xrightarrow{F_{\sigma}' = F_{\sigma}} F = (m_{\delta} + m_{\sigma}) \alpha \xrightarrow{m_{\delta} = 7m_{\sigma}} F = 8m_{\sigma} \alpha \xrightarrow{(2)} F = 8F_{\sigma} \Leftrightarrow$$

$$F_{\sigma} = \frac{F}{8} \Rightarrow F_{\sigma} = \frac{80 \text{ N}}{8} \Rightarrow F_{\sigma} = 10 \text{ N}.$$



15. (13466, B2) Τα κιβώτια Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 του σχήματος έχουν ίσες μάζες και συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή νήματα, τα οποία έχουν όριο θραύσης $T_{\theta\rho} = 180\text{ N}$.



Ένας μαθητής ασκεί στο κιβώτιο Σ_1 σταθερή, οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 300\text{ N}$, με αποτέλεσμα το σύστημα των τριών κιβωτίων να ξεκινά να κινείται επάνω στο οριζόντιο, λείο, ακλόνητο δάπεδο. Τα νήματα που συνδέουν τα κιβώτια παραμένουν οριζόντια:

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. Θα κοπεί το νήμα που συνδέει τα κιβώτια Σ_2 και Σ_3 .

β. Θα κοπεί το νήμα που συνδέει τα κιβώτια Σ_1 και Σ_2 .

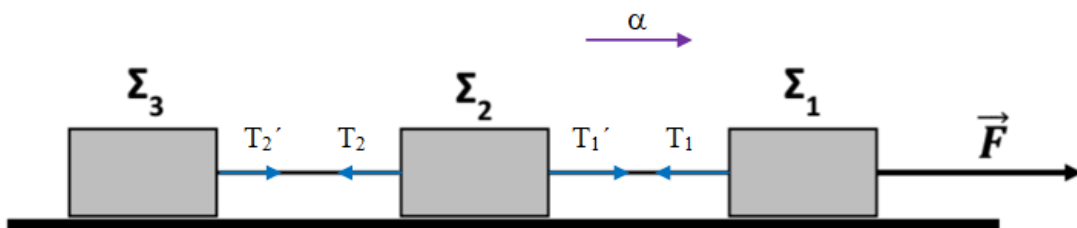
γ. Δεν θα κοπεί κάποιο από τα νήματα.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση



Αφού η μάζα των νημάτων είναι αμελητέα, ισχύουν οι ισότητες : $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα :

$$\Sigma_1 : \Sigma F_1 = m_1 \alpha \Rightarrow F - T_1 = m \alpha \quad (1)$$

$$\Sigma_2 : \Sigma F_2 = m_2 \alpha \Rightarrow T_1' - T_2 = m \alpha \quad (2)$$

$$\Sigma_3 : \Sigma F_3 = m_3 \alpha \Rightarrow T_2' = m \alpha \quad (3)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3) :

$$F - T_1 + T_1' - T_2 + T_2' = m \alpha + m \alpha + m \alpha \Rightarrow F = 3m \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F}{3m} \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow T_2' = m \frac{F}{3m} \Leftrightarrow T_2' = \frac{F}{3} \Rightarrow T_2 = T_2' = 100\text{ N} < T_{\theta\rho}.$$

$$(2), (3) \Rightarrow T_1' - T_2 = T_2 \Leftrightarrow T_1' = 2T_2 \Rightarrow T_1 = T_1' = 200\text{ N} > T_{\theta\rho}.$$

Διαπιστώνω ότι η τάση T_1 υπερβαίνει το όριο θραύσης, άρα **θα κοπεί το νήμα που συνδέει τα σώματα Σ_1 , Σ_2 .**

16. (13514, 2.2) Τα κιβώτια (1), (2) και (3) ισορροπούν επάνω σε ένα οριζόντιο ακίνητο δάπεδο, τοποθετημένα το ένα επάνω στο άλλο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τα βάρη των τριών κιβωτίων έχουν μέτρα αντίστοιχα: $B_1 = 60 \text{ N}$, $B_2 = 50 \text{ N}$, $B_3 = 40 \text{ N}$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Το κιβώτιο (2):

α. Δέχεται από το κιβώτιο (1) δύναμη μέτρου

$F_{12} = 50 \text{ N}$ με φορά προς τα επάνω και το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται σ' αυτό είναι $F_{ολ} = 20 \text{ N}$.

β. Δέχεται από το κιβώτιο (1) δύναμη $F_{12} = 90 \text{ N}$ με φορά προς τα επάνω και το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται σ' αυτό είναι $F_{ολ} = 0 \text{ N}$.

γ. Ασκεί στο το κιβώτιο (3) δύναμη $F_{23} = 50 \text{ N}$ με φορά προς τα επάνω και το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται σ' αυτό είναι $F_{ολ} = 0 \text{ N}$.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας:

Μονάδες 9

Απάντηση

Κάθε κιβώτιο ισορροπεί, άρα : $F_{ολ} = 0$,
επομένως η απάντηση α είναι λάθος.

Το κιβώτιο (2) δέχεται από (3) δύναμη $\vec{F}_{32}$ με φορά προς τα κάτω και ασκεί σε αυτό δύναμη $\vec{F}_{23}$ με φορά προς τα πάνω.

Αφού το (3) ισορροπεί, ισχύει :

$$\Sigma F_3 = 0 \Leftrightarrow F_{23} = B_3 = 40 \text{ N},$$

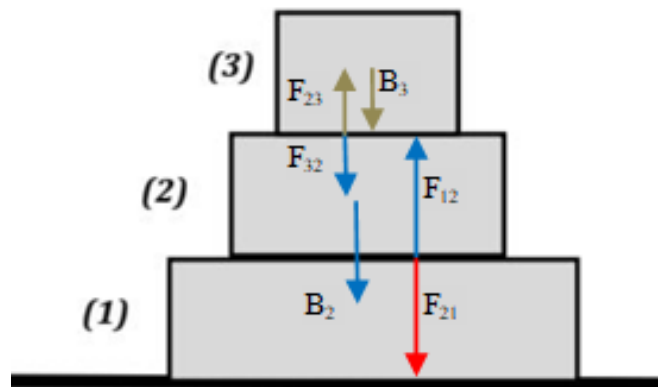
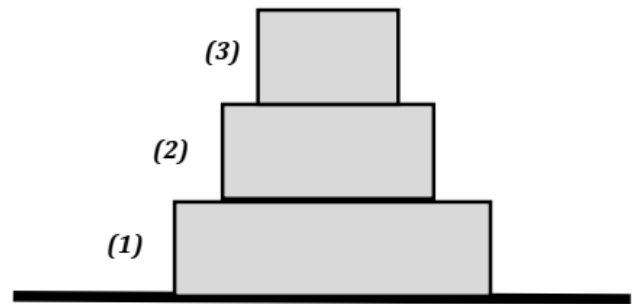
άρα η απάντηση γ είναι λάθος.

Ισχύει : $F_{32} = F_{23} = 40 \text{ N}$ (δράση – αντίδραση).

Το κιβώτιο (2) ασκεί στο (1) δύναμη $\vec{F}_{21}$ με φορά προς τα κάτω και δέχεται από αυτό δύναμη $\vec{F}_{12}$ με φορά προς τα πάνω.

Αφού το (2) ισορροπεί, ισχύει : $\Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow F_{12} = F_{32} + B_2 \Rightarrow F_{12} = 90 \text{ N}$,

άρα η απάντηση β είναι σωστή.



17. (13543, 2.2) Τα βάρη των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , με τη βοήθεια των δυναμόμετρων A και B, βρέθηκαν ίσα με 50 N και 80 N αντίστοιχα.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα δύο δυναμόμετρα A και B κρεμάμε τα σώματα όπως στο τρίτο σχήμα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

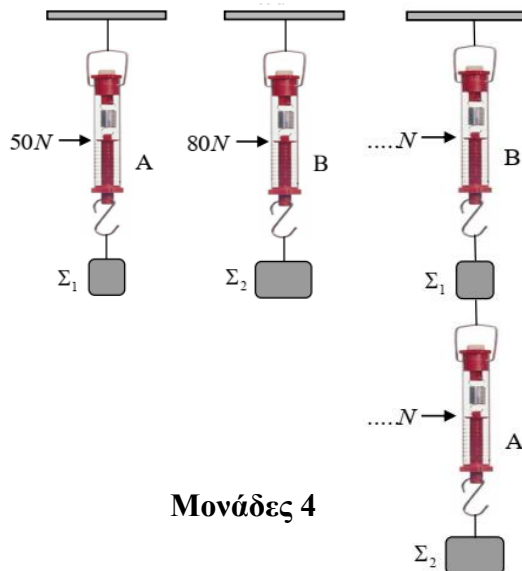
Αν τα βάρη των δυναμόμετρων και των νημάτων είναι αμελητέα, οι ενδείξεις των δυναμόμετρων A και B είναι:

(α) Δυναμόμετρο A: 80 N, Δυναμόμετρο B: 130 N

(β) Δυναμόμετρο A: 50 N, Δυναμόμετρο B: 80 N

(γ) Δυναμόμετρο A: 50 N, Δυναμόμετρο B: 130 N

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Τα σώματα έχουν βάρη : $B_1 = 50 \text{ N}$, $B_2 = 80 \text{ N}$.

σχήμα 1 :

Στο Σ_2 ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_2$ και η δύναμη $\vec{T}_2$ από το κάτω νήμα.

Στο Σ_1 ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_1$, η δύναμη $\vec{T}_1$ από το μεσαίο νήμα και η δύναμη $\vec{T}$ από το πάνω νήμα.

Εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας για κάθε σώμα:

$$\Sigma_2 : \Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow T_2 = B_2 = 80 \text{ N}.$$

$$\Sigma_1 : \Sigma F_1 = 0 \Leftrightarrow T = B_1 + T_1. \quad (1)$$

σχήμα 2 :

Το κάτω νήμα ασκεί στο δυναμόμετρο A δύναμη $\vec{T}_2'$, ενώ το μεσαίο νήμα ασκεί στο A δύναμη $\vec{T}_1'$.

Η μάζα των νημάτων είναι ασήμαντη, οπότε : $T_2' = T_2 = 80 \text{ N}$.

Άρα, η ένδειξη του δυναμομέτρου A είναι : $T_2' = 80 \text{ N}$.

Από την ισορροπία του δυναμομέτρου A προκύπτει : $T_1' = T_2' \Rightarrow T_1' = 80 \text{ N}$.

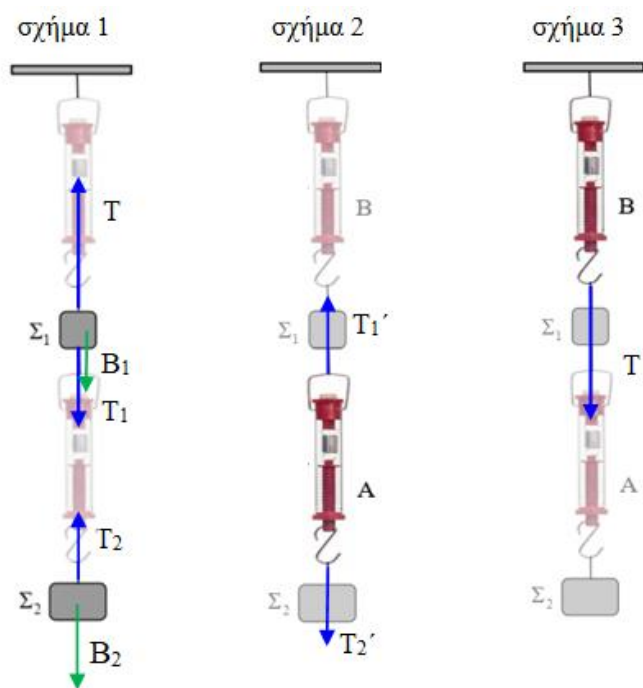
Για το αβαρές μεσαίο νήμα, ισχύει : $T_1 = T_1' = 80 \text{ N}$.

$$(1) \Rightarrow T = 50 \text{ N} + 80 \text{ N} \Rightarrow T = 130 \text{ N}.$$

σχήμα 3 : Το μεσαίο νήμα ασκεί στο δυναμόμετρο B δύναμη $\vec{T}'$.

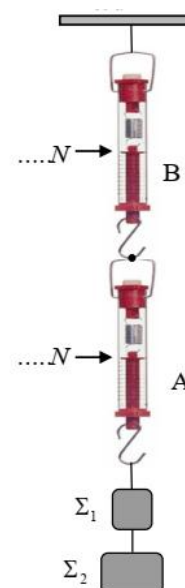
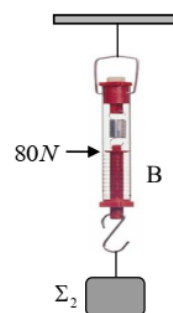
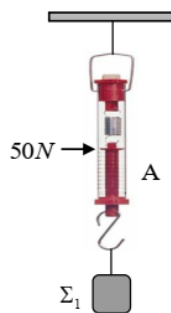
Αφού το νήμα είναι αβαρές, ισχύει : $T' = T = 130 \text{ N}$.

Επομένως, η ένδειξη του δυναμομέτρου B είναι : $T' = 130 \text{ N}$.



18. (13544, 2.1) Τα βάρη των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , με τη βοήθεια των δυναμόμετρων A και B, βρέθηκαν ίσα με 50 N και 80 N αντίστοιχα.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα δύο δυναμόμετρα A και B κρεμάμε τα σώματα όπως στο τρίτο σχήμα.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν τα βάρη των δυναμόμετρων και των νημάτων είναι αμελητέα, οι ενδείξεις των δυναμόμετρων A και B είναι:

- (α) Δυναμόμετρο A: 80 N , Δυναμόμετρο B: 130 N
- (β) Δυναμόμετρο A: 50 N , Δυναμόμετρο B: 130 N
- (γ) Δυναμόμετρο A: 130 N , Δυναμόμετρο B: 130 N

Μονάδες 4
Μονάδες 8

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Τα σώματα Σ_1 , Σ_2 ισορροπούν με την επίδραση των βαρών $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ και της δύναμης $\vec{T}_1$ από το πάνω νήμα.

Αφού το νήμα είναι αβαρές, η δύναμη $\vec{T}_1$ έχει ίσο μέτρο με τη δύναμη $\vec{T}_1'$ που ασκεί το πάνω νήμα στο δυναμόμετρο A: $T_1' = T_1$.

Για τα δύο σώματα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow T_1 = B_1 + B_2 \Rightarrow T_1 = 130\text{ N}.$$

Στο (αβαρές) δυναμόμετρο A ασκούνται: η δύναμη $\vec{T}_1'$ από το πάνω νήμα και η δύναμη $\vec{F}'$ από το δυναμόμετρο B.

Αφού το δυναμόμετρο A ισορροπεί, άρα:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F' = T_1' \xrightarrow{T_1' = T_1} F' = 130\text{ N}.$$

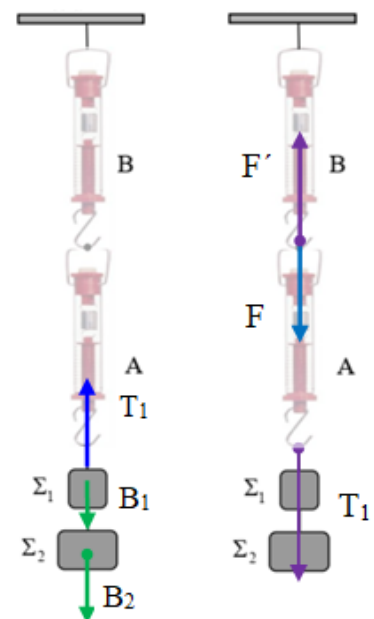
Το δυναμόμετρο A ασκεί στο B δύναμη $\vec{F}$.

Ισχύει: $F = F' = 130\text{ N}$ (δράση – αντίδραση).

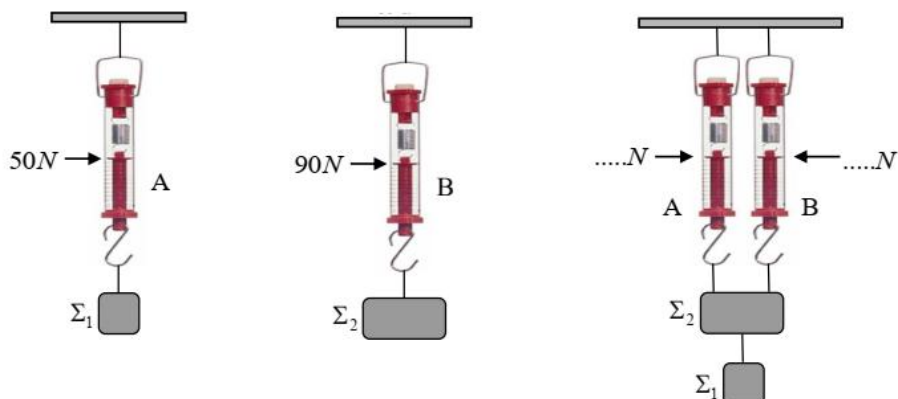
Επομένως, οι ενδείξεις των δυναμομέτρων είναι:

δυναμόμετρο A: $T_1' = 130\text{ N}$,

δυναμόμετρο B: $F = 130\text{ N}$.



19. (13545, 2.1) Τα βάρη των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , με τη βοήθεια των δυναμόμετρων A και B, βρέθηκαν ίσα με 50 N και 90 N αντίστοιχα.



Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα δύο δυναμόμετρα A και B κρεμάμε τα σώματα όπως στο τρίτο σχήμα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν τα βάρη των δυναμόμετρων και των νημάτων είναι αμελητέα, οι ενδείξεις των δυναμόμετρων A και B είναι:

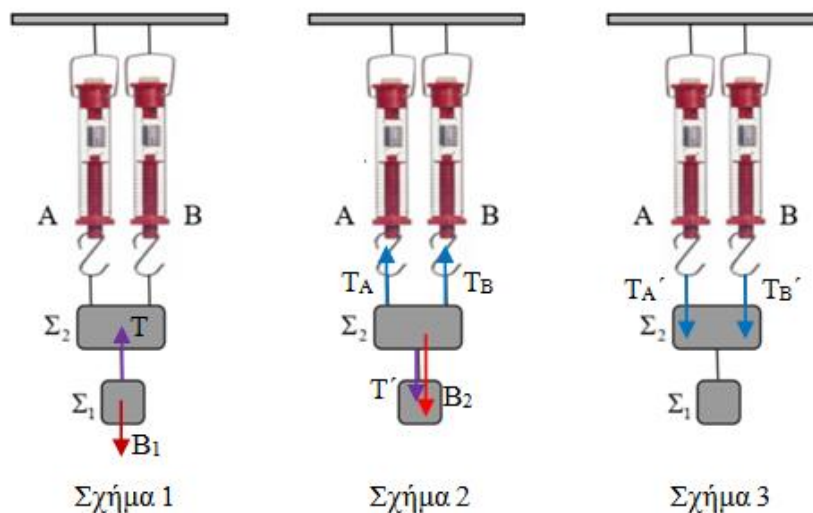
- (α) Δυναμόμετρο A: 50 N, Δυναμόμετρο B: 90 N
- (β) Δυναμόμετρο A: 70 N, Δυναμόμετρο B: 70 N
- (γ) Δυναμόμετρο A: 90 N, Δυναμόμετρο B: 50 N

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση



Στο Σ_1 ασκούνται 2 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}_1$ και η τάση του κάτω νήματος $\vec{T}$.

Αφού το Σ_1 ισορροπεί, ισχύει : $T = B_1 = 50 \text{ N}$.

Οι δυνάμεις που ασκεί το κάτω νήμα στα σώματα Σ_1 , Σ_2 έχουν ίσα μέτρα : $T' = T = 50 \text{ N}$.

Στο Σ_2 ασκούνται 4 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}_2$, η τάση του κάτω νήματος $\vec{T}'$ και οι τάσεις των πάνω νημάτων $\vec{T}_A$, $\vec{T}_B$.

Αφού το Σ_2 ισορροπεί, άρα : $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow T_A + T_B = B_2 + T' \Rightarrow T_A + T_B = 140 \text{ N}$.

Αν το σώμα Σ_2 είναι ομογενές ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τα σημεία πρόσδεσης των πάνω νημάτων ισαπέχουν από τις πλαϊνές έδρες του και η προέκταση του κάτω νήματος διέρχεται από το κέντρο μάζας του Σ_2 , τότε λόγω συμμετρίας οι δυνάμεις T_A, T_B θα έχουν ίσα μέτρα :

$$T_A = T_B = 70 \text{ N.}$$

Οι δυνάμεις T_A', T_B' που ασκούν τα πάνω νήματα στα δυναμόμετρα Α, Β αντίστοιχα, έχουν μέτρα :

$$T_A' = T_A = 70 \text{ N}, \quad T_B' = T_B = 70 \text{ N.}$$

Άρα, οι ενδείξεις των δύο δυναμομέτρων θα είναι : $T_A' = T_B' = 70 \text{ N.}$

Σχόλια :

Για να απαντήσουμε στην ερώτηση **πρέπει να υποθέσουμε ότι οι τάσεις των πάνω νημάτων $\vec{T}_A, \vec{T}_B$ είναι ίσες.**

Για να ισχύει αυτό, πρέπει να συντρέχουν οι εξής προϋποθέσεις :

- α) το σώμα Σ_2 να είναι ομογενές κανονικό γεωμετρικό στερεό (π.χ. ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο),
- β) η προέκταση του κάτω νήματος να διέρχεται από το κέντρο μάζας του Σ_2 ,
- γ) τα πάνω νήματα να έχουν ίσα μήκη και τα σημεία πρόσδεσης των πάνω νημάτων να ισαπέχουν από τις πλαϊνές έδρες του Σ_2 .

Αν δεν ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις, τότε οι ενδείξεις των δυναμομέτρων δεν είναι ίσες και τα δεδομένα δεν αρκούν για να απαντήσουμε στην ερώτηση.

Η ερώτηση απαιτεί γνώσεις που δεν διαθέτουν οι μαθητές της Α' Λυκείου.

20. (13566, 2.1) Ένας ανελκυστήρας μάζας 350 kg μεταφέρει δύο άτομα συνολικής μάζας 150 kg. Ο ανελκυστήρας ξεκίνησε από την ηρεμία τη χρονική στιγμή μηδέν και άρχισε να ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση. Για το χρονικό διάστημα 0 – 10 s η ταχύτητα του μεταβλήθηκε κατά $2 \frac{m}{s}$. Ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί το (αβαρές) συρματόσχοινο στο οποίο είναι προσδεμένος ο ανελκυστήρας.

Δίνεται $g = 10 \frac{m}{s^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Θεωρήστε ότι οι μοναδικές δυνάμεις που δέχεται ο θάλαμος του ανελκυστήρα κατά την άνοδο είναι αυτές που ασκούνται από τη Γη και το συρματόσχοινο.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Με βάση τα πιο πάνω δεδομένα, η δύναμη που ασκεί το συρματόσχοινο στον ανελκυστήρα έχει μέτρο ίσο με:

α) 5000 N,

β) 5100 N,

γ) 5150 N.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η επιτάχυνση με την οποία κινούνται τα σώματα έχει μέτρο :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(2-0) \frac{m}{s}}{(10-0)s} = 0,2 \frac{m}{s^2}.$$

Οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ανελκυστήρας – άτομα είναι :

η δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί το συρματόσχοινο και το συνολικό βάρος $\vec{B}_{ολ}$ από τη Γη.

Έστω M η μάζα του ανελκυστήρα και m η μάζα των δύο ατόμων.

Το βάρος του συστήματος έχει μέτρο :

$$B_{ολ} = (M + m)g. \quad (1)$$

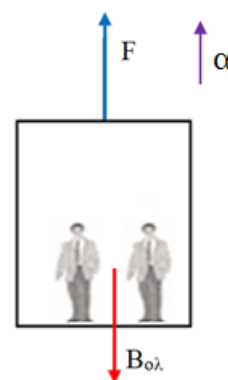
Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow F - B_{ολ} = m_{ολ}a \xrightarrow{(1)} F - (M + m)g = (M + m)a \Leftrightarrow$$

$$F = (M + m)g + (M + m)a \Leftrightarrow F = (M + m)(g + a).$$

Με αντικατάσταση, προκύπτει :

$$F = (150 + 350)(10 + 0,2) N = 500 \cdot 10,2 N \Rightarrow F = 5100 N.$$



21. (13578, 2.1) Ένας ανελκυστήρας μάζας $5 \cdot m$ μεταφέρει δύο άτομα μάζας m το κάθε ένα. Αρχικά ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα. Μετά από μια στάση σε έναν όροφο και αφότου κατέβει ο ένας επιβάτης ο ανελκυστήρας συνεχίζει να ανεβαίνει διατηρώντας σταθερή την τάση του (αβαρούς και άκαμπτου) συρματόσχοινου καθ' όλη τη διάρκεια της διαδρομής. Δίνεται $g = 10 \frac{m}{s^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Θεωρήστε ότι οι μοναδικές δυνάμεις που δέχεται ο θάλαμος του ανελκυστήρα κατά την άνοδο είναι αυτές που ασκούνται από τη Γη και το συρματόσκοινο.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Όταν ο ανελκυστήρας έχει πλέον έναν επιβάτη κινείται με επιτάχυνση:

$$\alpha) \frac{5}{3} \frac{m}{s^2}, \quad \beta) \frac{8}{3} \frac{m}{s^2}, \quad \gamma) \frac{10}{3} \frac{m}{s^2}.$$

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

Οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ανελκυστήρας – άτομα είναι : η δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί το συρματόσκοινο και το συνολικό βάρος $\vec{B}_{ολ}$ από τη Γη.

Αρχικά η συνολική μάζα ανελκυστήρα – ατόμων είναι $7m$.

Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, άρα :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F - B_{ολ} = 0 \Leftrightarrow F = B_{ολ} = 7mg. \quad (1)$$

Όταν κατέβει 1 άτομο, η συνολική μάζα γίνεται $6m$.

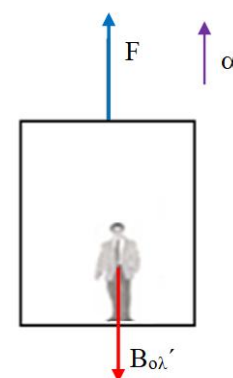
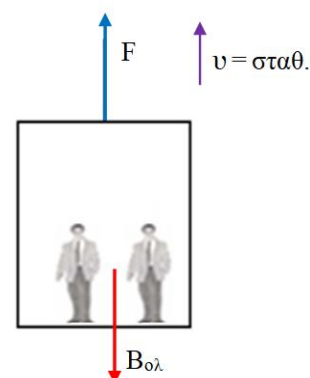
Εφ' όσον η δύναμη από το συρματόσχοινο παραμένει ίδια ενώ το βάρος ελαττώθηκε, άρα : $F > B_{ολ}'$.

Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α .

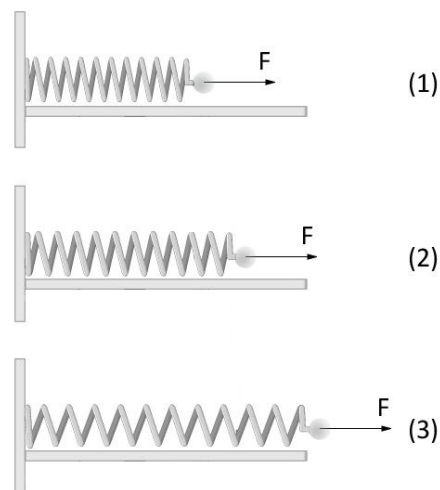
Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow F - B_{ολ}' = 6m\alpha \xrightarrow{(1)} 7mg - 6mg = 6m\alpha \Leftrightarrow$$

$$mg = 6m\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{g}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{10}{6} \frac{m}{s^2} = \frac{5}{3} \frac{m}{s^2}$$



22. (13657, 2.1) Στην εικόνα παρουσιάζεται ένα ελατήριο που στην ελεύθερη άκρη του υπάρχει σώμα μικρής μάζας m . Το ελατήριο ταλαντώνεται οριζοντίως σε λείο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή (1) απεικονίζεται το ελατήριο συσπειρωμένο, στη (2) βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και στην (3) είναι επιμηκυμένο. Και στα τρία πιθανά στιγμιότυπα, στην άκρη του, έχει σχεδιαστεί μόνο η πιθανή δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η δύναμη από το ελατήριο έχει σχεδιαστεί σωστά στο:

- α) Στιγμιότυπο 1,
- β) Στιγμιότυπο 2,
- γ) Στιγμιότυπο 3

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στο σχήμα (1) το ελατήριο είναι συσπειρωμένο, επομένως η δύναμη που ασκεί στο σώμα είναι απωστική, δηλαδή έχει φορά προς τα δεξιά.

Στο σχήμα (2) το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, επομένως δεν ασκεί δύναμη στο σώμα ($F = 0$).

Στο σχήμα (3) το ελατήριο είναι τεντωμένο, επομένως η δύναμη που ασκεί στο σώμα είναι ελκτική, δηλαδή έχει φορά προς τα αριστερά.

Σωστή απάντηση : α).

Σχόλιο : Η έκφραση «το ελατήριο ταλαντώνεται οριζοντίως» είναι λανθασμένη.

Το σώμα ταλαντώνεται με την επίδραση του ελατηρίου.

Στη διάρκεια της ταλάντωσης το ελατήριο συσπειρώνεται και επιμηκώνεται.

Η έννοια της ταλάντωσης δεν διδάσκεται στην Α΄ Λυκείου.

23. (13770, 2.2) Στο σχήμα απεικονίζονται δύο βιβλία B1 και B2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει $m_1 = 2 \cdot m_2$. Τα βιβλία ισορροπούν πάνω σε ένα σχολικό θρανίο Θ.



A. Αν η δύναμη που ασκεί το βιβλίο (B1) στο βιβλίο (B2) έχει μέτρο F , τότε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το θρανίο (Θ), στο βιβλίο (B1) είναι:

- α) F , β) $2 \cdot F$, γ) $3 \cdot F$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στο βιβλίο B2 ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{W}_2$ και η δύναμη $\vec{F}_2$ από το B1 (σχήμα 1).

Για την ισορροπία του B2 ισχύει :

$$\Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow F_2 = W_2 \Rightarrow F_2 = m_2 g. \quad (1)$$

Στο βιβλίο B1 ασκούνται τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{W}_1$, η δύναμη $\vec{N}_1$ από το θρανίο και η δύναμη $\vec{F}_1$ από το B2 (σχήμα 2).

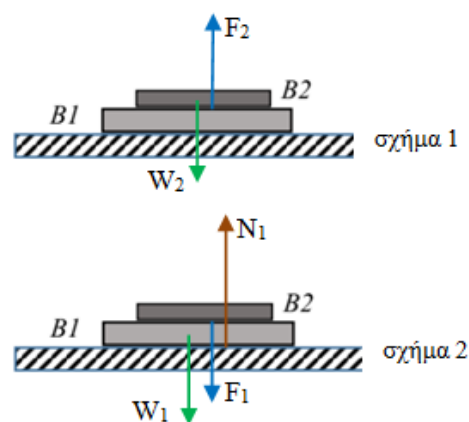
Σύμφωνα με το νόμο δράσης – αντίδρασης ισχύει :

$$F_1 = F_2 \xrightarrow{(1)} F_1 = m_2 g. \quad (2)$$

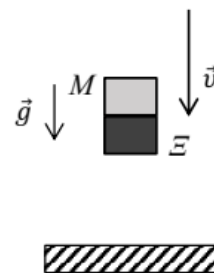
$$\begin{aligned} \text{Για την ισορροπία του B1 ισχύει : } \Sigma F_1 = 0 &\Leftrightarrow N_1 = F_1 + W_1 \xrightarrow{(2)} N_1 = m_2 g + m_1 g \\ &\xrightarrow{m_1 = 2m_2} N_1 = m_2 g + 2m_2 g \Rightarrow N_1 = 3m_2 g. \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Σύμφωνα με την εκφώνηση, ισχύει : } F_2 = F \xrightarrow{(1)} F = m_2 g. \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow N_1 = 3F.$$



24. (13772, 2.2) Δύο μαθητές της Α Λυκείου πειραματίζονται στην ελεύθερη πτώση. Σε κάποιο από τα πειράματά τους επιλέγουν να αφήσουν να πέσουν ελεύθερα ένα κομμάτι μάρμαρο (Μ) και ένα κομμάτι ξύλο (Ξ) από το μπαλκόνι του 1^{ου} ορόφου του σχολείου τους. Το μάρμαρο και το ξύλο έχουν ίδιο σχήμα (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) και όγκο. Ο Νίκος τοποθετεί το μάρμαρο πάνω στο ξύλο και αφήνει τα σώματα να πέσουν, ενώ η Αγγελική βρίσκεται στο προαύλιο και παρατηρεί ότι τα σώματα φτάνουν στο προαύλιο και σε κανένα σημείο της τροχιάς δεν παρατηρείται απομάκρυνση του ενός από το άλλο.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα, η δύναμη που ασκεί το (Μ) στο (Ξ) κατά την πτώση είναι:

- α) ομόρροπη με την ταχύτητα,
- β) μηδέν,
- γ) αντίρροπη με την ταχύτητα.

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

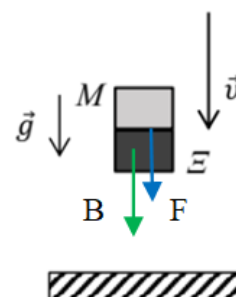
Απάντηση

Έστω ότι το μάρμαρο ασκεί στο ξύλο δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς τα κάτω.

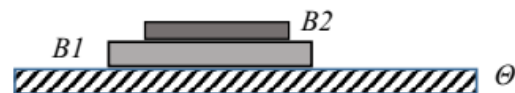
Τα σώματα πέφτουν στο κενό με επιτάχυνση $\alpha = g$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για το ξύλο :

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow B + F = m\alpha \xrightarrow{\alpha=g} mg + F = mg \Rightarrow F = 0.$$



25. (13773, 2.2) Στο σχήμα απεικονίζονται δύο βιβλία B1 και B2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Τα βιβλία ισορροπούν πάνω σε ένα σχολικό θρανίο Θ .



A. Αν η δύναμη που ασκεί το βιβλίο (B1) στο βιβλίο (B2)

έχει μέτρο F , και το μέτρο της δύναμης που ασκεί το θρανίο (Θ), στο βιβλίο (B1) είναι $3 \cdot F$ για το λόγο των μαζών m_1 και m_2 , ισχύει:

$$\alpha) \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1}, \quad \beta) \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{1}, \quad \gamma) \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}.$$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στο βιβλίο B2 ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{W}_2$ και

η δύναμη $\vec{F}_2$ από το B1 (σχήμα 1).

Για την ισορροπία του B2 ισχύει :

$$\Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow F_2 = W_2 \Rightarrow F_2 = m_2 g. \quad (1)$$

Στο βιβλίο B1 ασκούνται τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{W}_1$,

η δύναμη $\vec{N}_1$ από το θρανίο και η δύναμη $\vec{F}_1$ από το B2

(σχήμα 2).

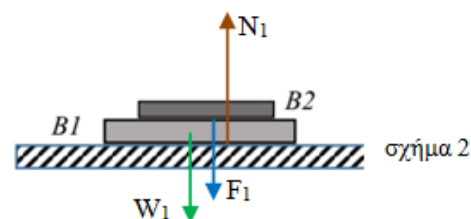
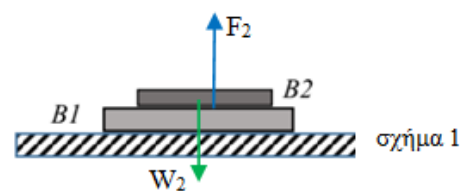
Σύμφωνα με το νόμο δράσης – αντίδρασης ισχύει :

$$F_1 = F_2 = F \xrightarrow{(1)} m_2 g = F. \quad (2)$$

$$\text{Για την ισορροπία του B1 ισχύει : } \Sigma F_1 = 0 \Leftrightarrow N_1 = F_1 + W_1 \Rightarrow N_1 = F + m_1 g \xrightarrow{N_1 = 3F}$$

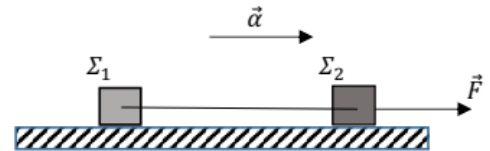
$$3F = F + m_1 g \Leftrightarrow m_1 g = 2F. \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3), (2), προκύπτει : $\frac{m_1}{m_2} = 2$.



26. (13774, 2.2)

Στο σχήμα απεικονίζονται δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με ίσες μάζες που κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τα σώματα συνδέονται με οριζόντιο, αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στο Σ_2 ασκείται



συνεχώς σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με αποτέλεσμα το σύστημα να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\vec{a}$.

A. Η σχέση που συνδέει τα μέτρα της δύναμης $\vec{F}$ και της τάσης $\vec{T}_1$ που ασκεί το νήμα στο Σ_1 , είναι:

α) $F = 2 \cdot T_1$, β) $F = 1,5 \cdot T_1$, γ) $F = T_1$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Επειδή η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, οι δυνάμεις που ασκεί το νήμα στα σώματα έχουν ίσα μέτρα :

$$T_2 = T_1 . \quad (1)$$

Οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες : $m_1 = m_2 = m$.

Ορίζω σαν θετική τη φορά της επιτάχυνσης και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά) για κάθε σώμα :

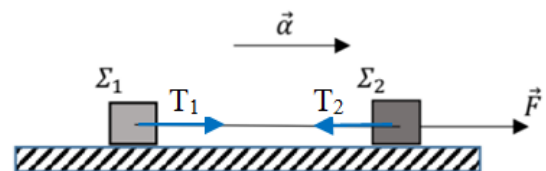
$\underline{\Sigma_2}$:

$$\Sigma F_x = m a \Leftrightarrow F - T_2 = m a \quad (2)$$

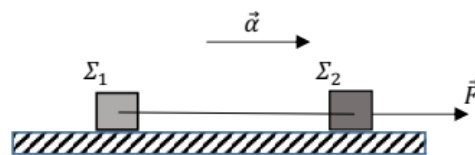
$\underline{\Sigma_1}$:

$$\Sigma F_x = m a \Leftrightarrow T_1 = m a \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow F - T_2 = T_1 \xrightarrow{T_2 = T_1} F - T_1 = T_1 \Leftrightarrow F = 2T_1 .$$



27. (13776, 2.2) Στο σχήμα απεικονίζονται δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 που κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο, με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει $m_1 = 3 \cdot m_2$. Τα σώματα συνδέονται με οριζόντιο, αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στο Σ_2 ασκείται συνεχώς σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με αποτέλεσμα το σύστημα να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\vec{a}$.



A. Η σχέση που συνδέει τα μέτρα της δύναμης $\vec{F}$ και της τάσης $\vec{T}_1$ που ασκεί το νήμα στο Σ_1 , είναι:

α) $F = 3 \cdot T_1$, β) $F = 2 \cdot T_1$, γ) $F = \frac{4}{3} \cdot T_1$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Επειδή η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, οι δυνάμεις που ασκεί το νήμα στα σώματα έχουν ίσα μέτρα :

$$T_2 = T_1. \quad (1)$$

Ορίζω σαν θετική τη φορά της επιτάχυνσης και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά) για κάθε σώμα :

$\underline{\Sigma_2}$:

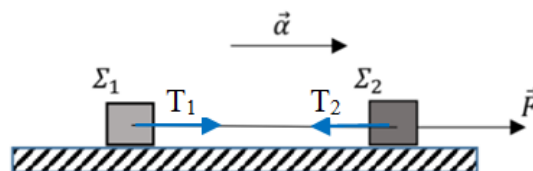
$$\Sigma F_x = m_2 a \Leftrightarrow F - T_2 = m_2 a \quad (2)$$

$\underline{\Sigma_1}$:

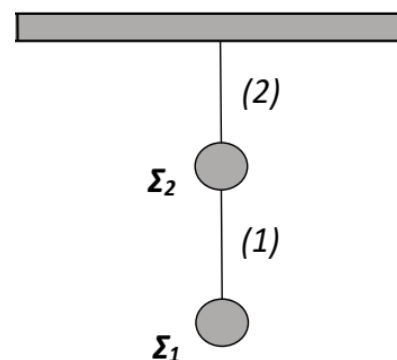
$$\Sigma F_x = m_1 a \xrightarrow{m_1 = 3m_2} T_1 = 3m_2 a \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow T_1 = 3(F - T_2) \Leftrightarrow T_1 = 3F - 3T_2 \xrightarrow{T_2 = T_1} T_1 = 3F - 3T_1 \Leftrightarrow 4T_1 = 3F_2 \Leftrightarrow$$

$$F = \frac{4}{3} T_1.$$



28. (13777, 2.2) Στο σχήμα απεικονίζονται δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με ίσες μάζες που ισορροπούν με τη βοήθεια δύο αβαρών και μη εκτατών νημάτων. Το νήμα (1) συνδέει μεταξύ τους τα σώματα, ενώ το νήμα (2) έχει το ένα άκρο του προσδεμένο στο Σ_2 και το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο ακλόνητα σε οροφή.



Μονάδες 4

A. Η σχέση που συνδέει τα μέτρα της τάσης $\vec{T}_1$ που ασκεί το νήμα (1) στο Σ_1 , και της τάσης $\vec{T}_2$ που ασκεί το νήμα (2) στο Σ_2 είναι:

α) $T_2 = 2 \cdot T_1$, β) $T_2 = T_1$, γ) $T_1 = 2 \cdot T_2$.

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Οι μάζες των σφαιρών είναι ίσες : $m_1 = m_2 = m$.

Εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας για κάθε σφαίρα.

$\underline{\Sigma_1}$:

$$\Sigma F_1 = 0 \Leftrightarrow T_1 = B_1 \Leftrightarrow T_1 = m_1 g \text{ ή } T_1 = mg. \quad (1)$$

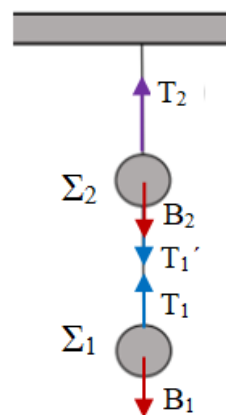
Αφού το νήμα (1) είναι αβαρές, οι δυνάμεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_1'$ που ασκεί στις

σφαίρες έχουν ίσα μέτρα : $T_1' = T_1 \xrightarrow{(1)} T_1' = mg. \quad (2)$

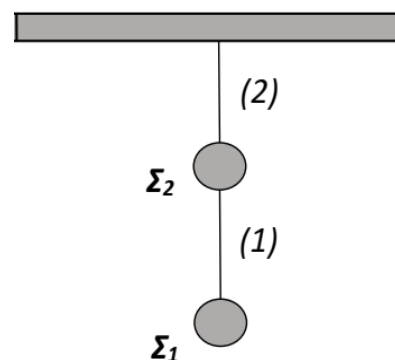
$\underline{\Sigma_2}$:

$$\Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow T_2 = B_2 + T_1' \xrightarrow{(2)} T_2 = mg + mg \Leftrightarrow T_2 = 2mg. \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow T_2 = 2T_1.$$



29. (13778, 2.2) Στο σχήμα απεικονίζονται δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει $m_1 = 2 \cdot m_2$. Τα σώματα ισορροπούν ακίνητα με τη βοήθεια δύο αβαρών και μη εκτατών νημάτων. Το νήμα (1) συνδέει μεταξύ τους τα σώματα, ενώ το νήμα (2) έχει το ένα άκρο του προσδεμένο στο Σ_2 και το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο ακλόνητα σε οροφή.



Α. Ο λόγος των μέτρων της τάσης $\vec{T}_1$ που ασκεί το νήμα (1) στο Σ_1 , και της τάσης $\vec{T}_2$ που ασκεί το νήμα (2) στο Σ_2 είναι:

$$\alpha) \frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{2}, \quad \beta) \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}, \quad \gamma) \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}.$$

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας για κάθε σφαίρα.

Σ_1 :

$$\Sigma F_1 = 0 \Leftrightarrow T_1 = B_1 \Leftrightarrow T_1 = m_1 g \xrightarrow{m_1 = 2m_2} T_1 = 2m_2 g. \quad (1)$$

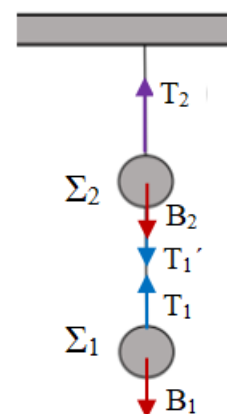
Αφού το νήμα (1) είναι αβαρές, οι δυνάμεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_1'$ που ασκεί στις σφαίρες έχουν ίσα μέτρα : $T_1' = T_1 \xrightarrow{(1)} T_1' = 2m_2 g. \quad (2)$

Σ_2 :

$$\Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow T_2 = B_2 + T_1' \xrightarrow{(2)} T_2 = m_2 g + 2m_2 g \Leftrightarrow$$

$$T_2 = 3m_2 g. \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (3), προκύπτει : $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}.$



Σύνθεση δυνάμεων – Ισορροπία δυνάμεων στο επίπεδο

30. (8008, B2) Μια μικρή σφαίρα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα με την επίδραση δυο μόνο δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σταθερής κατεύθυνσης. Οι δυνάμεις είναι συνεχώς κάθετες μεταξύ τους με μέτρα $F_1 = 3 \text{ N}$ και $F_2 = 4 \text{ N}$.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Η σφαίρα κινείται με επιτάχυνση που έχει μέτρο ίσο με:

α) $3,5 \text{ m/s}^2$

β) $2,5 \text{ m/s}^2$

γ) $0,5 \text{ m/s}^2$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

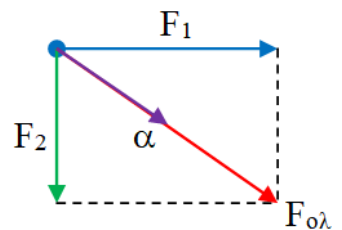
Απάντηση

Αφού οι δύο δυνάμεις είναι κάθετες μεταξύ τους, το μέτρο της συνισταμένης υπολογίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα :

$$F_{\text{ολ}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ N} = \sqrt{16+9} \text{ N} = \sqrt{25} \text{ N} \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 5 \text{ N}.$$

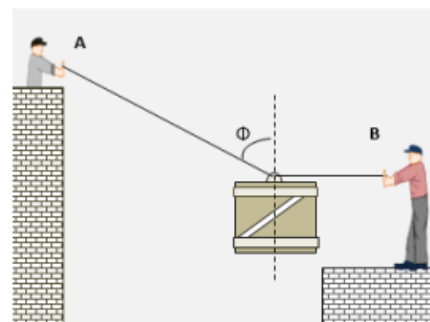
Το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\alpha = \frac{F_{\text{ολ}}}{m} = \frac{5 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



31. (13104, B2) Δύο εργάτες, ο Α και ο Β, προσπαθούν να ισορροπήσουν ένα κιβώτιο βάρους $B = 180 \text{ N}$, το οποίο έχουν δέσει με δύο σχοινιά από έναν κρίκο στο μέσον της επάνω επιφάνειάς του. Κάποια στιγμή το κρατούν ακίνητο στον αέρα, σε θέση όπου το σχοινί του Β είναι οριζόντιο, ενώ το σχοινί του Α σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία φ όπως στο σχήμα. Τα δύο σχοινιά είναι στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

Εκείνη τη στιγμή ο Α μέσω του σχοινιού ασκεί στο κιβώτιο δύναμη $\vec{F}_A$, ενώ ο Β αντίστοιχα, δύναμη $\vec{F}_B$.



Για την γωνία φ δίνονται οι τριγωνομετρικοί της αριθμοί $\eta\mu\varphi = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,6$.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$:

- i. i. $F_A = F_B = 90 \text{ N}$
- ii. ii. $F_A = 300 \text{ N}, F_B = 240 \text{ N}$
- iii. iii. $F_A = 100 \text{ N}, F_B = 180 \text{ N}$
- iv.

Μονάδες 4

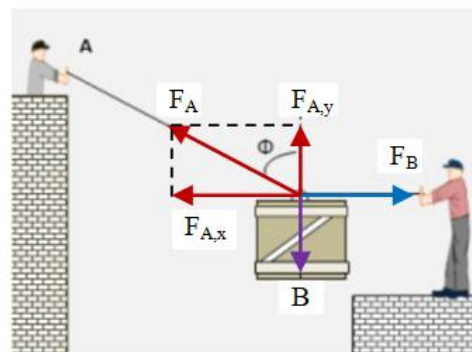
B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Στο κιβώτιο ασκούνται 3 δυνάμεις: το βάρος $\vec{B}$, η δύναμη $\vec{F}_A$ που ασκεί ο εργάτης Α μέσω του πλάγιου σκοινιού και η δύναμη $\vec{F}_B$ που ασκεί ο εργάτης Β μέσω του οριζόντιου σκοινιού.

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}_A$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_{A,x}$ (οριζόντια) και $\vec{F}_{A,y}$ (κατακόρυφη) και εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα:



$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F_{A,y} = B \Rightarrow F_{A,y} = 180 \text{ N}.$$

$$\text{Ισχύει: } \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{F_{A,y}}{F_A} \Leftrightarrow F_A = \frac{F_{A,y}}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow F_A = \frac{180}{0,6} \text{ N} \Rightarrow F_A = 300 \text{ N}.$$

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_B = F_{A,x} = F_A \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow F_B = 300 \cdot 0,8 \text{ N} \Rightarrow F_B = 240 \text{ N}.$$

32. (13271, B2) Σημειακό αντικείμενο δέχεται την επίδραση τριών ομοεπίπεδων δυνάμεων, ίσου μέτρου F , οι φορείς των οποίων σχηματίζουν, ανά δύο, γωνία $\varphi = 120^\circ$.

A. Η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο:

- α) 0 , β) F , γ) $2 \cdot F$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Δίνονται: $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Απάντηση

Σχεδιάζω τις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ώστε να σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120° .

Με αρχή το σημείο εφαρμογής των δυνάμεων σχεδιάζω δύο κάθετους άξονες $x'x$, $y'y$, ώστε ο άξονας y να έχει τη διεύθυνση της $\vec{F}_3$.

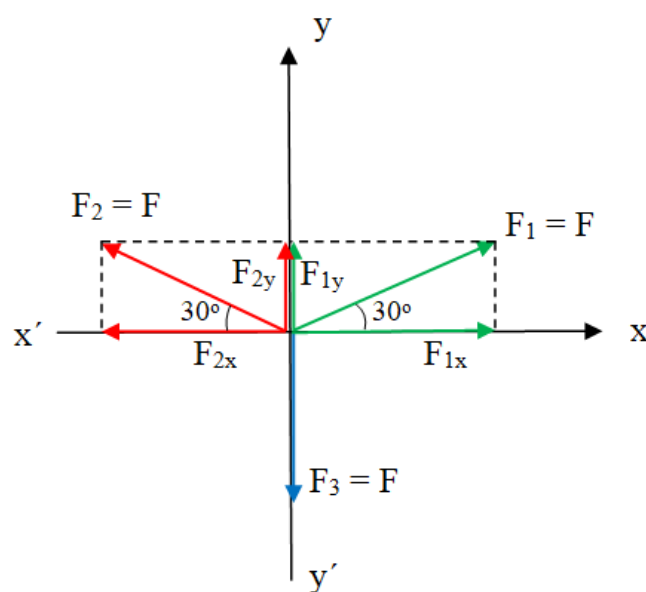
Αναλύω τις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ στους άξονες και υπολογίζω τις συνιστώσες τους.

$$F_{1x} = F_1 \sigma\upsilon\nu 30^\circ = F \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$F_{2x} = F_2 \sigma\upsilon\nu 30^\circ = F \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$F_{1y} = F_1 \eta\mu 30^\circ = \frac{F}{2}.$$

$$F_{2y} = F_2 \eta\mu 30^\circ = \frac{F}{2}.$$



Υπολογίζω το αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών των δυνάμεων σε κάθε άξονα :

$$\Sigma F_x = F_{1x} - F_{2x} = F \frac{\sqrt{3}}{2} - F \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Sigma F_x = 0.$$

$$\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} - F_3 = \frac{F}{2} + \frac{F}{2} - F \Rightarrow \Sigma F_y = 0.$$

$$\text{Το μέτρο της συνισταμένης είναι : } F_{\text{ολ}} = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 0.$$

33. (13346, B2) Ένα ιστιοφόρο πλέει με σταθερή ταχύτητα και κατεύθυνση προς τον Βορρά. Η κατεύθυνση πλεύσης καθορίζεται από την πλάγια δύναμη ($\vec{F}_{αερ.}$), που ασκείται από τον δυτικό άνεμο στο «φουσκωμένο» πανί του και τη δύναμη ($\vec{F}_κ$), που ασκείται από το νερό στην καρίνα του σκάφους, κάθετα στην κατεύθυνση πλεύσης του.

Η δύναμη $\vec{F}_{αερ.}$ είναι σταθερή, έχει μέτρο $F_{αερ.} = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$ και η κατεύθυνσή της σχηματίζει γωνία φ με την κατεύθυνση πλεύσης.

Για τη γωνία δίνεται $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$.

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_κ$, την οποία δέχεται η καρίνα του σκάφους από το νερό, κάθετα στην κατεύθυνση πλεύσης είναι:

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

- α) $F_κ = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$, β) $F_κ = 1,2 \cdot 10^4 \text{ N}$, γ) $F_κ = 1,6 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Μονάδες 4

B) Αιτιολογήστε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

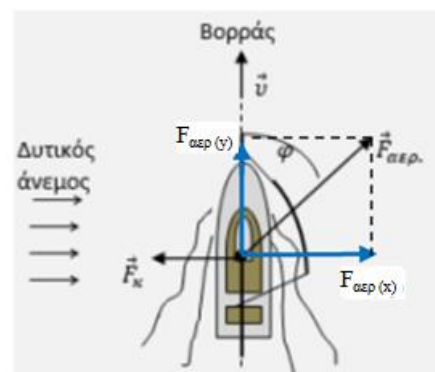
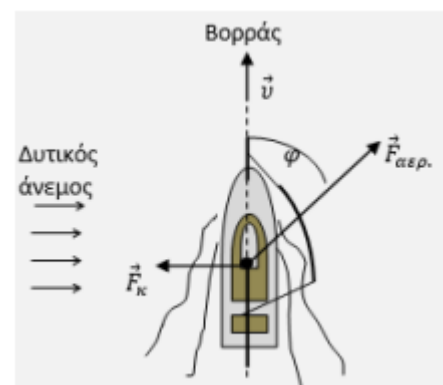
Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}_{αερ.}$ που ασκεί ο άνεμος σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_{αερ.(x)}$, $\vec{F}_{αερ.(y)}$ και υπολογίζω το μέτρο της $\vec{F}_{αερ.(x)}$:

$$\eta\mu\varphi = \frac{F_{αερ.(x)}}{F_{αερ.}} \Leftrightarrow F_{αερ.(x)} = F_{αερ.} \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow F_{αερ.(x)} = 2 \cdot 10^4 \cdot 0,6 \text{ N}$$

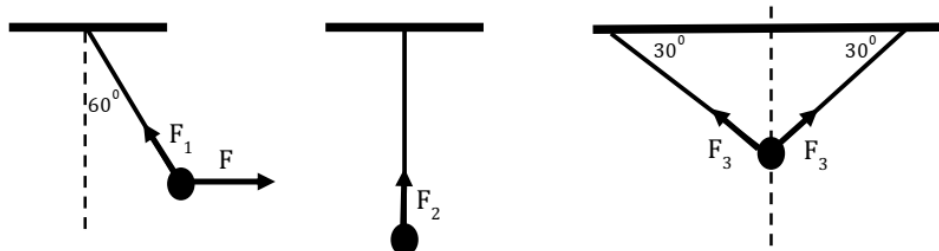
$$\Rightarrow F_{αερ.(x)} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Στον άξονα x το ιστιοφόρο ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_κ = F_{αερ.(x)} \Rightarrow F_κ = 1,2 \cdot 10^4 \text{ N}.$$



34. (13508, 2.2) Το σώμα βάρους $\vec{B}$ και στις τρεις περιπτώσεις, όπως φαίνονται στα παρακάτω σχήματα, ισορροπεί δεμένο στο αντίστοιχο νήμα ή στα νήματα. Για τα μέτρα των δυνάμεων F_1 , F_2 , F_3 , που δέχεται το σώμα από το νήμα ή τα νήματα ισχύει:



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

α. $F_1 > F_2 > F_3$

β. $F_1 > F_2 = F_3$

γ. $F_1 < F_2 = F_3$

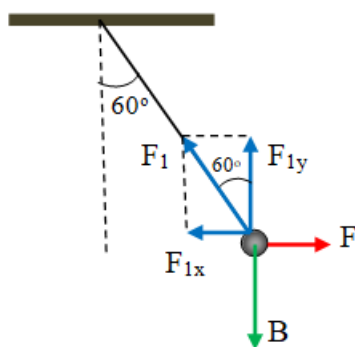
Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

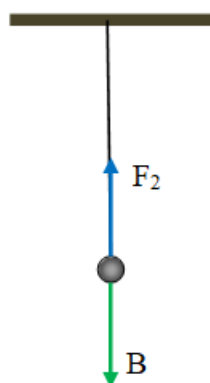
Μονάδες 9

Δίνεται $\sin 60^\circ = 1/2$.

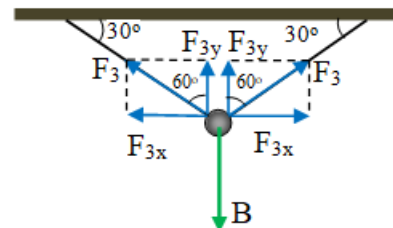
Απάντηση



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Αναλύω τις δυνάμεις σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων $x'x$, $y'y$ (στα σχήματα 1, 3) και εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας στον άξονα y .

Σχήμα 1 :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F_{1y} = B \Leftrightarrow F_1 \sin 60^\circ = B \Leftrightarrow F_1 \cdot \frac{1}{2} = B \Leftrightarrow F_1 = 2B. \quad (1)$$

Σχήμα 2 :

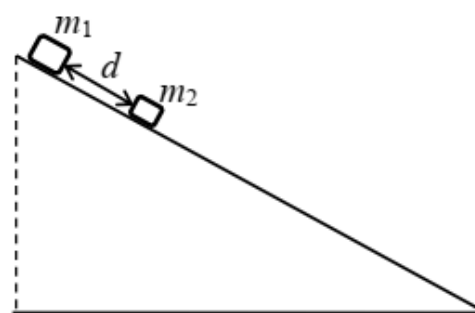
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F_2 = B. \quad (2)$$

Σχήμα 3 :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F_{3y} + F_{3y} = B \Leftrightarrow 2F_3 \sin 60^\circ = B \Leftrightarrow 2F_3 \cdot \frac{1}{2} = B \Leftrightarrow F_3 = B. \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow F_1 > F_2 = F_3.$$

35. (13544, 2.2) Δύο σώματα m_1 και m_2 ($m_1 > m_2$) αφήνονται ταυτόχρονα να ολισθήσουν κατά μήκος ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου. Τη χρονική στιγμή ($t_0 = 0$ s) που αφέθηκαν, η απόσταση μεταξύ τους ήταν d .



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Τη χρονική στιγμή που το σώμα m_2 θα φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων d' θα είναι:

(α) $d' > d$,

(β) $d' = d$,

(γ) $d' < d$.

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σε κάθε σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την επιφάνεια.

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$ (παράλληλη στην επιφάνεια) και $\vec{B}_y$ (κάθετη στην επιφάνεια).

Ισχύει : $B_x = mg \sin \varphi$. (1)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow B_x = m\alpha \xrightarrow{(1)} mg \sin \varphi = m\alpha \Rightarrow \alpha = g \sin \varphi.$$

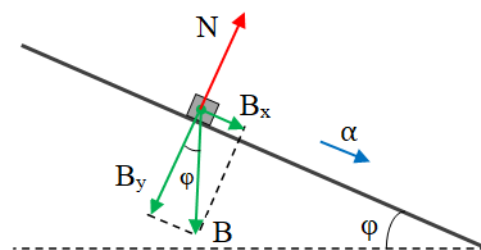
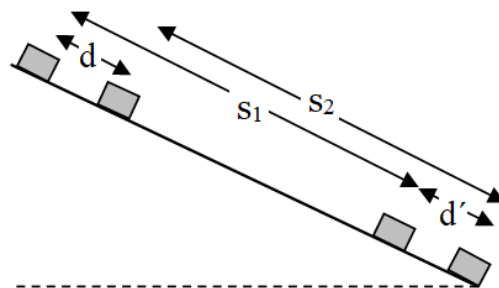
Η επιτάχυνση δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος, άρα τα δύο σώματα κατεβαίνουν με την ίδια σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$.

Τα σώματα αφήνονται ταυτόχρονα, άρα στο χρόνο t που χρειάζεται το Σ_2 μέχρι να φτάσει στη βάση, διανύουν ίσες αποστάσεις :

$$s_1 = s_2 = s = \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

Τη στιγμή που το Σ_1 φτάνει στη βάση, η μεταξύ τους απόσταση d' είναι :

$$d' = d + s_2 - s_1 = d + s - s \Rightarrow d' = d.$$

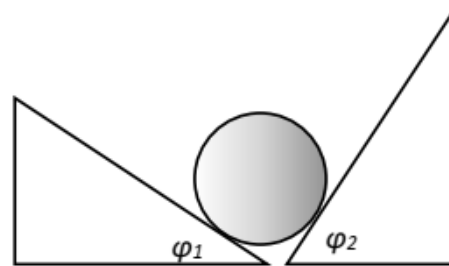


36. (13572, 2.2) Λεία σφαίρα μάζας 100 kg ισορροπεί ακουμπώντας σε δύο αμετακίνητες σφήνες γωνιών βάσης $\varphi_1=30^\circ$ (Σφήνα 1) και $\varphi_2=60^\circ$ (Σφήνα 2), όπως στο σχήμα. Τα μέτρα των δυνάμεων που δέχεται η σφαίρα στα σημεία επαφής από τις σφήνες είναι:

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

- α) $m \cdot g \cdot \sin 30^\circ$, $m \cdot g \cdot \sin 60^\circ$,
 β) $m \cdot g \cdot \eta\mu 30^\circ$, $m \cdot g \cdot \eta\mu 60^\circ$,
 γ) $m \cdot g \cdot \eta\mu 30^\circ$, $m \cdot g \cdot \sin 60^\circ$.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

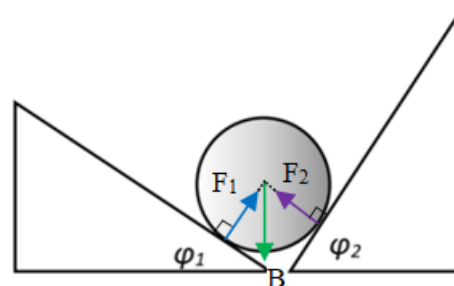
Μονάδες 9

Απάντηση

Η σφαίρα είναι λεία, άρα οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ που δέχεται από τις σφήνες είναι κάθετες στις επιφάνειες επαφής και διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας.

Αφού $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$, οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

Αν η σφαίρα είναι ομογενής, τότε ο φορέας του βάρους διέρχεται από το κέντρο της.

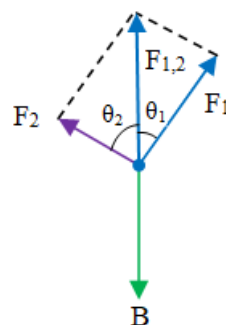


1ος τρόπος (ισορροπία 3 δυνάμεων)

Αφού η σφαίρα ισορροπεί, η συνισταμένη $\vec{F}_{1,2}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ είναι αντίθετη από το βάρος, άρα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και έχει μέτρο: $F_{1,2} = mg$. (1)

Η γωνία θ_1 που σχηματίζει η $\vec{F}_1$ με την $\vec{F}_{1,2}$ είναι ίση με τη γωνία φ_1 γιατί είναι οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές: $\theta_1 = \varphi_1 = 30^\circ$.
 Όμοια: $\theta_2 = \varphi_2 = 60^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Ισχύουν οι σχέσεις: } F_1 &= F_{1,2} \cdot \sin \theta_1 \xrightarrow{(1)} F_1 = mg \sin 30^\circ, \\ F_2 &= F_{1,2} \cdot \sin \theta_2 \xrightarrow{(1)} F_2 = mg \sin 60^\circ. \end{aligned}$$



2ος τρόπος (ανάλυση σε άξονες)

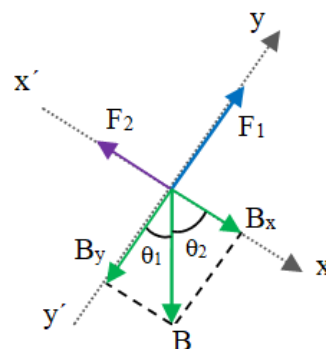
Σχεδιάζω δύο κάθετους άξονες $y'y$, $x'x$ ώστε να έχουν τη διεύθυνση των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ αντίστοιχα και αναλύω το βάρος στους άξονες.

Η γωνία θ_1 που σχηματίζει το βάρος $\vec{B}$ με τη $\vec{B}_y$ είναι ίση με τη γωνία φ_1 γιατί είναι οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές: $\theta_1 = \varphi_1 = 30^\circ$.
 Όμοια: $\theta_2 = \varphi_2 = 60^\circ$.

Εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Leftrightarrow F_1 - B_y = 0 \Leftrightarrow F_1 = B_y \Leftrightarrow F_1 = mg \sin \theta_1 \Rightarrow \\ &F_1 = mg \sin 30^\circ. \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow B_x - F_2 = 0 \Leftrightarrow F_2 = B_x \Leftrightarrow F_2 = mg \sin \theta_2 \Rightarrow F_2 = mg \sin 60^\circ.$$



Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η σφαίρα είναι ομογενής.
- 2) Η απάντηση προϋποθέτει γνώσεις Φυσικής που δεν διαθέτουν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου (ισορροπία στερεού, κέντρο μάζας ομογενούς σφαίρας).

37. (13573, 2.2) Λεία σφαίρα μάζας m ισορροπεί όπως στο σχήμα με το νήμα να σχηματίζει γωνία φ με τον κατακόρυφο τοίχο.

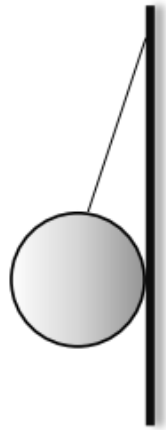
A. Επιλέξτε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σφαίρα από τον τοίχο και σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα :

α) $\frac{m \cdot g}{\sin \varphi} \eta \mu \varphi$, β) $\frac{m \cdot g}{\eta \mu \varphi} \sigma \upsilon \nu \varphi$, γ) $m \cdot g$.

Μονάδες 6

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 7



Απάντηση

Στη σφαίρα ασκούνται 3 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, η δύναμη $\vec{F}$ από τον τοίχο και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Αφού η σφαίρα είναι λεία, η δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στον τοίχο άρα διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

Αν η σφαίρα είναι ομογενής, τότε ο φορέας του βάρους διέρχεται από το κέντρο της.

Για να ισορροπεί η σφαίρα, πρέπει και ο φορέας της τάσης $\vec{T}$ να διέρχεται από το κέντρο της.

Σχεδιάζω τις δυνάμεις και αναλύω την $\vec{T}$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$.

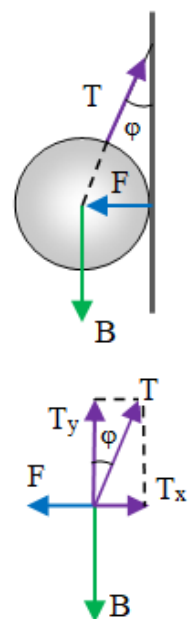
Εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F = T_x \Leftrightarrow F = T \eta \mu \varphi. \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow B = T_y \Leftrightarrow B = T \sigma \upsilon \nu \varphi. \quad (2)$$

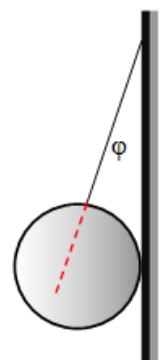
Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{F}{B} = \frac{\eta \mu \varphi}{\sigma \upsilon \nu \varphi} \Leftrightarrow F = mg \cdot \frac{\eta \mu \varphi}{\sigma \upsilon \nu \varphi}. \quad (\text{δηλ. } F = mg \epsilon \varphi \varphi)$$



Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η σφαίρα είναι ομογενής.
- 2) Το νήμα δεν έχει σχεδιαστεί σωστά, ώστε η προέκτασή του να διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.
- 3) Η απάντηση προϋποθέτει γνώσεις Φυσικής που δεν διαθέτουν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου (ισορροπία στερεού, κέντρο μάζας ομογενούς σφαίρας).

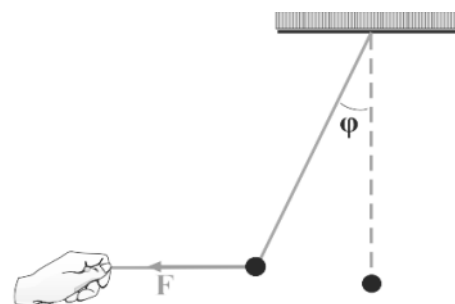


38. (13574, 2.1) Σφαίρα μάζας 1 kg ισορροπεί όπως στο σχήμα υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης μέτρου $F = 10 \text{ N}$. Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A. Η γωνία απόκλισης του (αβαρούς) νήματος από την κατακόρυφο στην θέση ισορροπίας της σφαίρας είναι:

α) 30° , β) 45° , γ) 60° .

Δίνονται: $\sin 60^\circ = \eta\mu 30^\circ = 0,5$, $\eta\mu 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\eta\mu 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Μονάδες 6

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 6

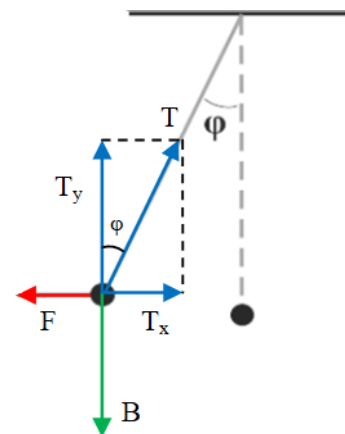
Απάντηση

Εκτός από την οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, στη σφαίρα ασκούνται : το βάρος $\vec{B}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$.

Αναλύω την τάση του νήματος σε κάθετες συνιστώσες $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$ και εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα.

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow T_x = F \Leftrightarrow T \eta\mu\varphi = F. \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow T_y = B \Leftrightarrow T \sin\varphi = B. \quad (2)$$



Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{T \eta\mu\varphi}{T \sin\varphi} = \frac{F}{B} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\varphi}{\sin\varphi} = \frac{F}{mg} \Rightarrow \frac{\eta\mu\varphi}{\sin\varphi} = \frac{10}{1 \cdot 10} = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi = \sin\varphi \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

39. (13578, 2.2) Λεία σφαίρα μάζας m ισορροπεί όπως στο σχήμα με το νήμα να σχηματίζει γωνία φ με τον κατακόρυφο τοίχο.

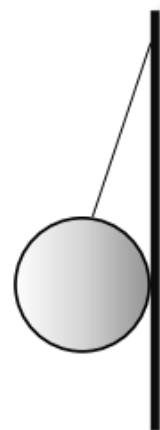
A. Αν η δύναμη που ασκεί το νήμα στη σφαίρα είναι διπλάσιο της δύναμης που ασκεί ο τοίχος στη σφαίρα, επιλέξτε ποια σχέση ισχύει για τη γωνία φ :

- α) $\eta\mu\varphi = 0,5$,
- β) $\eta\mu\varphi = 0,6$,
- γ) $\eta\mu\varphi = \sin\varphi$.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9



Απάντηση

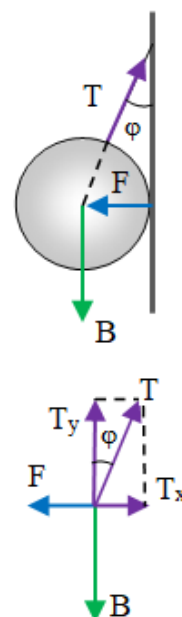
Στη σφαίρα ασκούνται 3 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, η δύναμη $\vec{F}$ από τον τοίχο και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Αφού η σφαίρα είναι λεία, η δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στον τοίχο άρα διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

Αν η σφαίρα είναι ομογενής, τότε ο φορέας του βάρους διέρχεται από το κέντρο της. Για να ισορροπεί η σφαίρα, πρέπει και ο φορέας της τάσης $\vec{T}$ να διέρχεται από το κέντρο της.

Σχεδιάζω τις δυνάμεις και αναλύω την $\vec{T}$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$.

Εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F = T_x \Leftrightarrow F = T\eta\mu\varphi \xrightarrow{T=2F} F = 2F\eta\mu\varphi \Leftrightarrow \eta\mu\varphi = 0,5 .$$



Σχόλια :

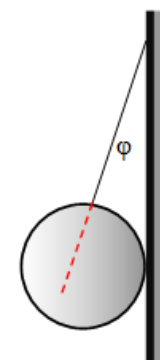
1) Το ερώτημα A δεν έχει διατυπωθεί σωστά.

Η σωστή διατύπωση είναι : «Αν η δύναμη που ασκεί το νήμα στη σφαίρα έχει διπλάσιο μέτρο από τη δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη σφαίρα, . . . ».

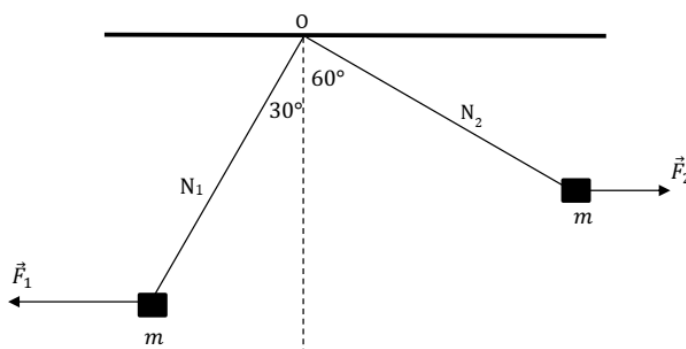
2) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η σφαίρα είναι ομογενής.

3) Το νήμα δεν έχει σχεδιαστεί σωστά ώστε η προέκτασή του να διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

4) Η απάντηση προϋποθέτει γνώσεις Φυσικής που δεν διαθέτουν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου (ισορροπία στερεού, κέντρο μάζας ομογενούς σφαίρας).



40. (13614, 2.2) Δύο σώματα ίσων μαζών m ισορροπούν δεμένα στα ελεύθερα άκρα δύο ιδανικών νημάτων N_1 και N_2 (τα άλλα άκρα των οποίων είναι στερεωμένα ακλόνητα σε σημείο O), με την επίδραση δύο οριζόντιων, σταθερών δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, όπως στο σχήμα. Το νήμα N_1 σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία 30° και το νήμα N_2 60° .



A. Για τα μέτρα των δυνάμεων F_1 και F_2 ισχύει

α) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{3}$ β) $\frac{F_1}{F_2} = 3$ γ) $\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{3}$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Δίνονται: $\varepsilon\phi 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\varepsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$.

Απάντηση

Σχεδιάζω τα βάρη $\vec{B}_1, \vec{B}_2$ των σωμάτων και τις τάσεις $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ των νημάτων.

1ος τρόπος (ισορροπία 3 δυνάμεων)

Σώμα Σ_1

Αφού το σώμα ισορροπεί, η συνισταμένη $\vec{F}_1'$ των δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{B}_1$ είναι αντίθετη από την $\vec{T}_1$.

Άρα, οι δυνάμεις $\vec{F}_1', \vec{B}_1$ σχηματίζουν γωνία 30° . Ισχύει :

$$\varepsilon\phi 30^\circ = \frac{F_1}{B_1} \Leftrightarrow F_1 = B_1 \varepsilon\phi 30^\circ. \quad (1)$$

Σώμα Σ_2

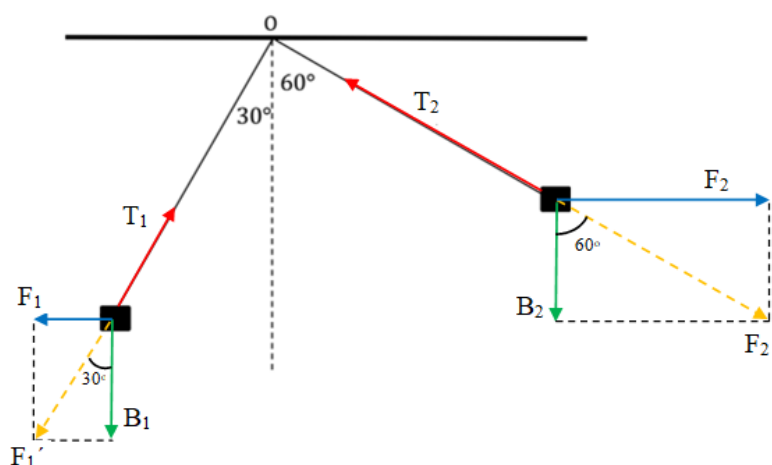
Αφού το σώμα ισορροπεί, η συνισταμένη $\vec{F}_2'$ των δυνάμεων $\vec{F}_2, \vec{B}_2$ είναι αντίθετη από την $\vec{T}_2$.

Άρα, οι δυνάμεις $\vec{F}_2', \vec{B}_2$ σχηματίζουν γωνία 60° . Ισχύει :

$$\varepsilon\phi 60^\circ = \frac{F_2}{B_2} \Leftrightarrow F_2 = B_2 \varepsilon\phi 60^\circ. \quad (2)$$

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{B_1 \varepsilon\phi 30^\circ}{B_2 \varepsilon\phi 60^\circ} = \frac{mg \frac{1}{\sqrt{3}}}{mg \sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{3}.$$



2ος τρόπος (ανάλυση σε άξονες)

Αναλύω τις τάσεις $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ σε συνιστώσες και εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα.

Σώμα Σ_1

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_1 = T_{1x}. \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow B_1 = T_{1y}. \quad (2)$$

Ισχύει :

$$\frac{T_{1x}}{T_{1y}} = \varepsilon\phi 30^\circ \xrightarrow{(1),(2)} \frac{F_1}{B_1} = \varepsilon\phi 30^\circ \Leftrightarrow F_1 = mg\varepsilon\phi 30^\circ. \quad (3)$$

Σώμα Σ_2

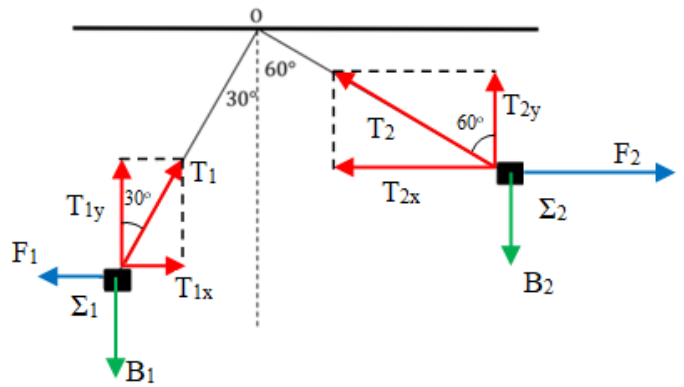
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_2 = T_{2x}. \quad (4)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow B_2 = T_{2y}. \quad (5)$$

Ισχύει :

$$\frac{T_{2x}}{T_{2y}} = \varepsilon\phi 60^\circ \xrightarrow{(4),(5)} \frac{F_2}{B_2} = \varepsilon\phi 60^\circ \Leftrightarrow F_2 = mg\varepsilon\phi 60^\circ. \quad (6)$$

$$\text{Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (3), (6):} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{mg\varepsilon\phi 30^\circ}{mg\varepsilon\phi 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{3}.$$



Σχόλιο

Το σχήμα της εκφώνησης δεν έχει σχεδιαστεί σωστά, ώστε η δύναμη $\vec{F}_1$ να έχει μικρότερο μέτρο από την $\vec{F}_2$.

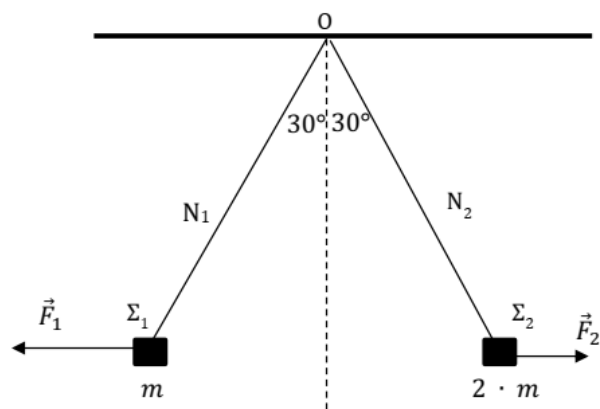
41. (13615, 2.2) Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 , με μάζες $m = 1 \text{ Kg}$ και $2 \cdot m$ αντίστοιχα ισορροπούν δεμένα στα ελεύθερα άκρα δύο ιδανικών νημάτων N_1 και N_2 , τα άλλα άκρα των οποίων είναι δεμένα ακλόνητα σε σημείο O , με την επίδραση δύο οριζόντιων, σταθερών δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, όπως στο σχήμα. Τα νήματα N_1 και N_2 σχηματίζουν με την κατακόρυφο γωνία 30° .

Α. Για τα μέτρα των δυνάμεων F_1 και F_2 ισχύει

α) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2}$, β) $\frac{F_1}{F_2} = 2$, γ) $\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{2}$.

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δίνεται: $\epsilon\phi 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Σχεδιάζω τα βάρη $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ των σωμάτων και τις τάσεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ των νημάτων.

1ος τρόπος (ισορροπία 3 δυνάμεων)

Σώμα Σ_1

Αφού το σώμα ισορροπεί, η συνισταμένη $\vec{F}_1'$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{B}_1$ είναι αντίθετη από την $\vec{T}_1$.

Άρα, οι δυνάμεις $\vec{F}_1'$, $\vec{B}_1$ σχηματίζουν γωνία 30° .

Ισχύει :

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{F_1}{B_1} \Leftrightarrow F_1 = B_1 \epsilon\phi 30^\circ. \quad (1)$$

Σώμα Σ_2

Αφού το σώμα ισορροπεί, η συνισταμένη $\vec{F}_2'$ των δυνάμεων $\vec{F}_2$, $\vec{B}_2$ είναι αντίθετη από την $\vec{T}_2$.

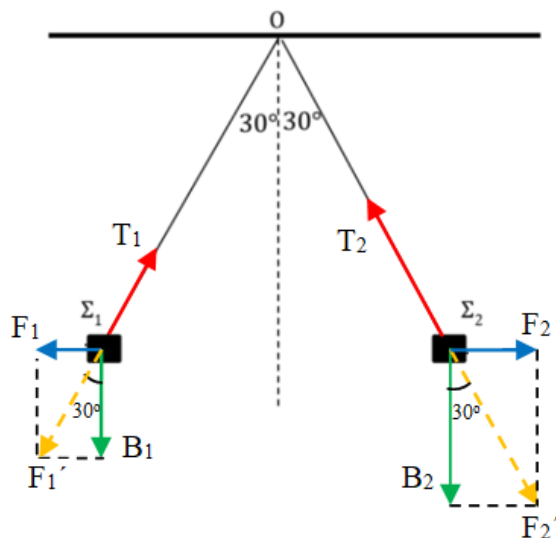
Άρα, οι δυνάμεις $\vec{F}_2'$, $\vec{B}_2$ σχηματίζουν γωνία 30° .

Ισχύει :

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{F_2}{B_2} \Leftrightarrow F_2 = B_2 \epsilon\phi 30^\circ. \quad (2)$$

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{B_1 \epsilon\phi 30^\circ}{B_2 \epsilon\phi 30^\circ} = \frac{mg}{2mg} \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2}.$$



2ος τρόπος (ανάλυση σε άξονες)

Αναλύω τις τάσεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ σε συνιστώσες και εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα.

Σώμα Σ_1

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_1 = T_{1x}. \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow B_1 = T_{1y}. \quad (2)$$

Ισχύει :

$$\frac{T_{1x}}{T_{1y}} = \varepsilon\varphi 30^\circ \xrightarrow{(1), (2)} \frac{F_1}{B_1} = \varepsilon\varphi 30^\circ. \quad (3)$$

Σώμα Σ_2

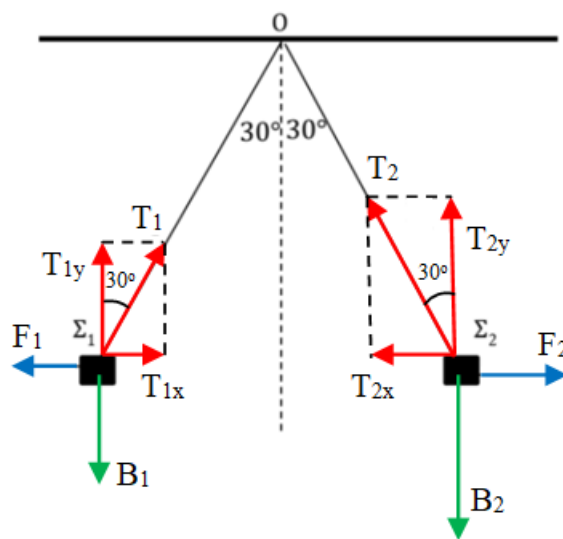
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_2 = T_{2x}. \quad (4)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow B_2 = T_{2y}. \quad (5)$$

Ισχύει :

$$\frac{T_{2x}}{T_{2y}} = \varepsilon\varphi 30^\circ \xrightarrow{(4), (5)} \frac{F_2}{B_2} = \varepsilon\varphi 30^\circ. \quad (6)$$

$$(3), (6) \Rightarrow \frac{F_1}{B_1} = \frac{F_2}{B_2} \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{mg}{2mg} \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2}.$$



Σχόλια :

- 1) Το σχήμα της εκφώνησης δεν έχει σχεδιαστεί σωστά, ώστε η δύναμη $\vec{F}_1$ να έχει μικρότερο μέτρο από την $\vec{F}_2$.
- 2) Δεν είναι απαραίτητη η τιμή της μάζας m ούτε η τιμή της $\varepsilon\varphi 30^\circ$.

42. (14842, 2.1) Σε μια μικρή σφαίρα ασκούνται δυο δυνάμεις με μέτρα 80 N και 60 N.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Αν η συνισταμένη των δυνάμεων έχει μέτρο 100 N τότε τα διανύσματα των δυνάμεων σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία

(α) 0°

(β) 90°

(γ) 180°

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

* Όταν οι δύο δυνάμεις σχηματίζουν γωνία 0° , τα διανύσματά τους έχουν την ίδια κατεύθυνση.

Στην περίπτωση αυτή το μέτρο της συνισταμένης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$F_{\text{ολ}} = F_1 + F_2 = 80 \text{ N} + 60 \text{ N} \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 140 \text{ N}.$$

Άρα η απάντηση (α) είναι λάθος.

* Όταν οι δύο δυνάμεις σχηματίζουν γωνία 90° , τα διανύσματα των δυνάμεων είναι κάθετα μεταξύ τους.

Στην περίπτωση αυτή το μέτρο της συνισταμένης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$F_{\text{ολ}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} \text{ N} = \sqrt{6400 + 3600} \text{ N} = \sqrt{10000} \text{ N} \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 100 \text{ N}.$$

Άρα η απάντηση (β) είναι σωστή.

* Όταν οι δύο δυνάμεις σχηματίζουν γωνία 180° , τα διανύσματά τους έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.

Στην περίπτωση αυτή το μέτρο της συνισταμένης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$F_{\text{ολ}} = F_1 - F_2 = 80 \text{ N} - 60 \text{ N} \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 20 \text{ N}.$$

Άρα η απάντηση (γ) είναι λάθος.

Γενικός τρόπος

Εφαρμόζω το νόμο του συνημιτόνου :

$$F_{\text{ολ}}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi \Leftrightarrow 2F_1F_2\cos\varphi = F_{\text{ολ}}^2 - F_1^2 - F_2^2 \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{F_{\text{ολ}}^2 - F_1^2 - F_2^2}{2F_1F_2}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \cos\varphi = \frac{100^2 - 80^2 - 60^2}{2 \cdot 80 \cdot 60} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{10000 - 6400 - 3600}{9600} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

43. (14846, 2.1) Σε μια σφαίρα μάζας m , που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, ασκούνται μόνο δυο οριζόντιες δυνάμεις σε κάθετες διευθύνσεις μεταξύ τους, με μέτρο ίσο προς F η κάθε μια.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Η σφαίρα κινείται με επιτάχυνση μέτρου:

(α) $\frac{\sqrt{2} \cdot F}{m}$

(β) $\frac{F}{m}$

(γ) $\frac{2 \cdot F}{m}$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

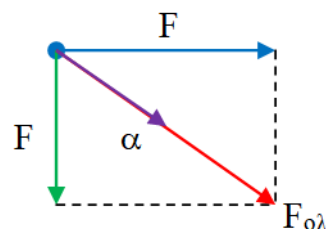
Απάντηση

Αφού οι δύο δυνάμεις είναι κάθετες μεταξύ τους, το μέτρο της συνισταμένης υπολογίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα :

$$F_{\text{ολ}} = \sqrt{F^2 + F^2} \Leftrightarrow F_{\text{ολ}} = \sqrt{2F^2} \Rightarrow F_{\text{ολ}} = F\sqrt{2}. \quad (1)$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\alpha = \frac{F_{\text{ολ}}}{m} \xrightarrow{(1)} \alpha = \frac{F\sqrt{2}}{m}.$$



44. (14847, 2.1) Σε μια σφαίρα μάζας m , που βρίσκεται σε ορισμένο ύψος από το έδαφος, ασκούνται μόνο το βάρος της και μια οριζόντια δύναμη με μέτρο ίσο με το μέτρο του βάρους της.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Αν g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας τότε η σφαίρα κινείται με επιτάχυνση μέτρου:

(α) $\sqrt{2} \cdot g$

(β) g

(γ) $2 \cdot g$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

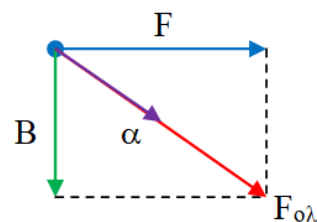
Στη σφαίρα ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος της $\vec{B}$ (κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω) και η οριζόντια δύναμη $\vec{F}$.

Αφού οι δύο δυνάμεις είναι κάθετες μεταξύ τους, το μέτρο της συνισταμένης υπολογίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα :

$$F_{\text{ολ}} = \sqrt{B^2 + F^2} \xrightarrow{F=B} F_{\text{ολ}} = \sqrt{B^2 + B^2} = \sqrt{2B^2} \Rightarrow F_{\text{ολ}} = B\sqrt{2}. \quad (1)$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\alpha = \frac{F_{\text{ολ}}}{m} \xrightarrow{(1)} \alpha = \frac{B\sqrt{2}}{m} = \frac{mg\sqrt{2}}{m} \Rightarrow \alpha = g\sqrt{2}.$$



Τριβή

45. (7972, B2) Θέλετε να μειώσετε τη δύναμη της τριβής μεταξύ ενός «συγκρουόμενου αυτοκινήτου» του Λούνα Παρκ, το οποίο συνηθίζετε να οδηγείτε μαζί με ένα φίλο σας, και της οριζόντιας πίστας του Λούνα Πάρκ.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Για να πετύχετε κάτι τέτοιο θα πρέπει:

- α) να οδηγείτε το αυτοκίνητο με μεγαλύτερη ταχύτητα,
- β) να επιλέξετε το αυτοκίνητο που έχει τη μικρότερη βάση (επιφάνεια επαφής),
- γ) να μην πάρετε μαζί σας το φίλο σας και να οδηγήσετε μόνος σας το αυτοκίνητο.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σύμφωνα με το νόμο της τριβής, το μέτρο της τριβής ολίσθησης δεν εξαρτάται από την ταχύτητα ούτε από το εμβαδό της επιφάνειας επαφής.

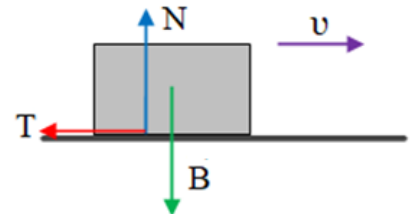
Το μέτρο της τριβής ολίσθησης $\vec{T}$ είναι ανάλογο με το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα : $T = \mu N$, όπου μ ο συντελεστής τριβής (που έχει την ίδια τιμή για τις ίδιες επιφάνειες).

Όταν το σώμα κινείται σε οριζόντια επιφάνεια, ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B$.

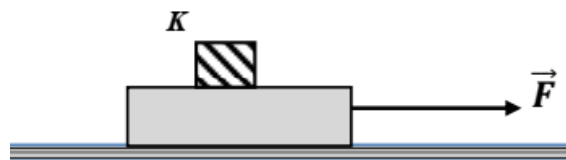
Άρα, όταν το σώμα κινείται σε οριζόντια επιφάνεια, το μέτρο της τριβής είναι ανάλογο με το βάρος του : $T = \mu B$.

Για να μειωθεί το μέτρο της τριβής, πρέπει να μειωθεί το βάρος του συστήματος.

Σωστή απάντηση : γ.



46. (7996, B1) Ο κύβος K βρίσκεται πάνω σε μια σανίδα, η οποία κινείται οριζόντια με επιτάχυνση μέτρου a , με την επίδραση οριζόντιας δύναμης μέτρου F , όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κύβος K κινείται μαζί με την σανίδα χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε αυτή.



A) Να αντιγράψετε το σχήμα στη κόλλα του γραπτού σας και να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο.

Μονάδες 4

B) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Ποια δύναμη από τις παρακάτω, αναγκάζει τον κύβο να κινείται μαζί με τη σανίδα ;

- α) Η δύναμη $\vec{F}$ β) Το βάρος του γ) Η στατική τριβή

Μονάδες 4

Γ) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

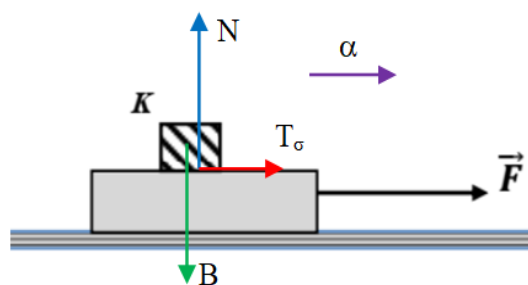
Απάντηση

A) Στον κύβο ασκούνται 3 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη σανίδα και η στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$.

B) Ο κύβος δεν ολισθαίνει πάνω στη σανίδα αλλά κινείται μαζί της με την ίδια επιτάχυνση $\vec{a}$.

Ανάμεσα στον κύβο και τη σανίδα αναπτύσσεται στατική τριβή, η οποία εμποδίζει την ολίσθηση του κύβου πάνω σε αυτή και έχει φορά προς τα δεξιά, ώστε να του προκαλεί επιτάχυνση $\vec{a}$ με φορά προς τα δεξιά.

Επομένως, η δύναμη που επιταχύνει τον κύβο είναι η στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$.



47. (7997, B1) Ένα σώμα κινείται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια που δεν είναι λεία.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Εάν το σώμα το μετακινεί ένας άνθρωπος ασκώντας σε αυτό οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, όπως φαίνεται στο σχήμα τότε :

α) η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή όταν η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή και μεγαλύτερη της τριβής ολίσθησης.

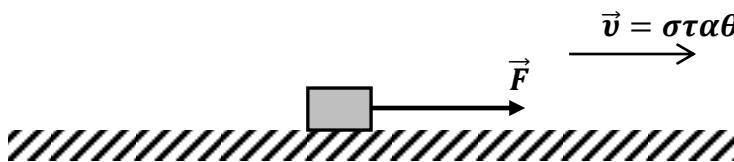
β) η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή όταν η συνισταμένη της δύναμης $\vec{F}$ και της τριβής ολίσθησης είναι μηδενική.

γ) η επιτάχυνση του σώματος είναι σταθερή όταν η συνισταμένη της δύναμης $\vec{F}$ και της τριβής ολίσθησης είναι μηδενική.

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 4

Μονάδες 8



Απάντηση

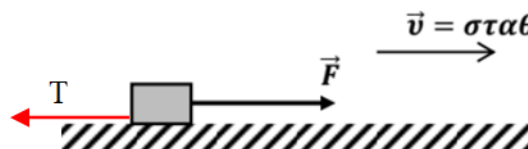
Σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton, όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδενική τότε η ταχύτητά του είναι σταθερή.

Στο σώμα του σχήματος ασκούνται δύο δυνάμεις (στη

διεύθυνση της κίνησης) : η δύναμη $\vec{F}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, η οποία έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα.

Επομένως, η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή όταν η συνισταμένη της δύναμης $\vec{F}$ και της τριβής ολίσθησης είναι μηδενική.

Σωστή απάντηση : β.



48. (8020, B2) Ένα κιβώτιο μάζας 2 kg ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Το κιβώτιο ολισθαίνει με επιτάχυνση μέτρου $a = 1 \text{ m/s}^2$. Διπλασιάζουμε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ οπότε το κιβώτιο ολισθαίνει με επιτάχυνση μέτρου ίσου με 3 m/s^2 . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με

(α) 8 N

(β) 4 N

(γ) 6 N



Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, στην οριζόντια διεύθυνση ασκείται και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Ορίζω σαν θετική τη φορά της επιτάχυνσης και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στις δύο περιπτώσεις (αλγεβρικά) :

1η περίπτωση

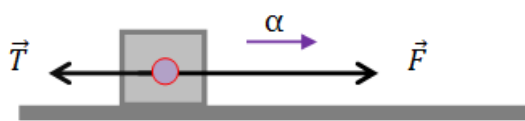
$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F - T = m\alpha. \quad (1)$$

2η περίπτωση

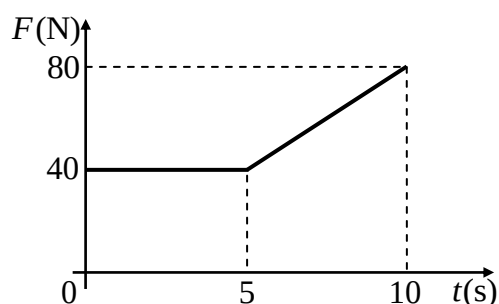
$$\Sigma F_x' = m\alpha' \Leftrightarrow 2F - T = m\alpha'. \quad (2)$$

Αφαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$(2) - (1) \Rightarrow 2F - T - F + T = m\alpha' - m\alpha \Leftrightarrow F = m(\alpha' - \alpha) \Rightarrow F = 2 \cdot (3 - 1) \text{ N} = 4 \text{ N}.$$



49. (8041, B2) Ένα σώμα είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει να ασκείται οριζόντια δύναμη F , της οποίας το μέτρο σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διάγραμμα. Το σώμα στο χρονικό διάστημα από $0 \rightarrow 10$ s παραμένει ακίνητο ενώ τη χρονική στιγμή $t = 10$ s αρχίζει να κινείται.



Α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Η δύναμη τριβής που ασκείται στο σώμα τη χρονική στιγμή $t = 10$ s έχει μέτρο 80 N.

Ο σωστότερος χαρακτηρισμός για αυτή είναι:

α) Στατική τριβή

β) Τριβή ολίσθησης

γ) Οριακή τριβή

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Το σώμα παραμένει ακίνητο, άρα στην οριζόντια διεύθυνση η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική. Επομένως το σώμα δέχεται από την επιφάνεια μία οριζόντια δύναμη, η οποία είναι συνεχώς αντίθετη από τη δύναμη $\vec{F}$. Η δύναμη αυτή είναι η στατική τριβή $\vec{T}_s$.

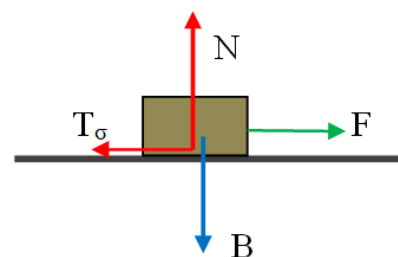
Ισχύει: $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F = T_s$. (μέτρο)

Κατά το χρονικό διάστημα $5 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$ το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ αυξάνεται, άρα και το μέτρο της στατικής τριβής αυξάνεται.

Μετά τη χρονική στιγμή $t = 10$ s το σώμα επιταχύνεται, άρα τη χρονική στιγμή $t = 10$ s η στατική τριβή αποκτά τη μέγιστη τιμή $T_{op} = 80 \text{ N}$ (οριακή τριβή).

Στη συνέχεια αλλάζει το είδος τριβής (τριβή ολίσθησης $\vec{T}$) και το μέτρο της είναι μικρότερο από της οριακής τριβής ($T < 80 \text{ N}$).

Σωστή απάντηση: γ).



Σχόλια

1) Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει: «**τη χρονική στιγμή $t = 10$ s το σώμα είναι έτοιμο να κινηθεί**».

Κατά τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$ το σώμα είναι ακίνητο και η τριβή είναι στατική.

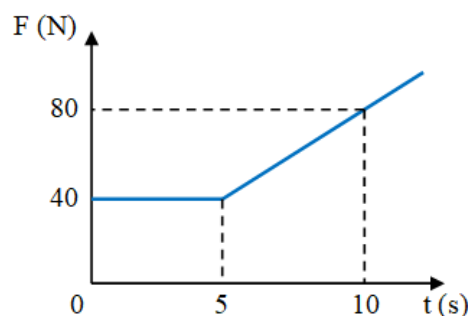
Τη χρονική στιγμή $t = 10$ s η τριβή αποκτά τη μέγιστη τιμή

$T_{op} = 80 \text{ N}$ και το σώμα είναι έτοιμο να κινηθεί.

Άρα, το σώμα θα αρχίσει να κινείται μετά τη χρονική στιγμή $t = 10$ s.

2) Για να επιταχυνθεί το σώμα, πρέπει το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ να ξεπεράσει το μέτρο της $\vec{T}_{op}$: $F > T_{op} = 80 \text{ N}$.

Άρα, το διάγραμμα της δύναμης πρέπει να επεκταθεί και μετά τη χρονική στιγμή $t = 10$ s.



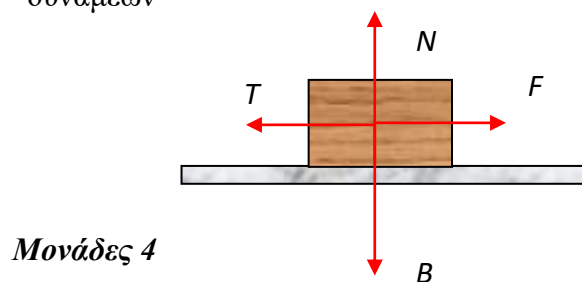
50. (12053, B1) Ένα σώμα βάρους $\vec{B}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε ένα οριζόντιο δάπεδο, υπό την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν N είναι το μέτρο της κάθετης αντίδρασης από το έδαφος και T το μέτρο της δύναμης της τριβής ολίσθησης,

A. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις των μέτρων των δυνάμεων περιγράφουν το φαινόμενο;

α. $F > T$ και $N = B$

β. $F = T$ και $N = B$

γ. $F > T$ και $N < B$



Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την άποψη σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, στον άξονα κίνησης x ισχύει ο 1ος νόμος του Newton :

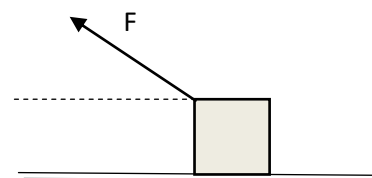
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \Leftrightarrow F = T.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = B.$$

Σωστή απάντηση : β.

51. (12353, 2.2) Σώμα αμελητέων διαστάσεων κινείται επιταχυνόμενο πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$, μέσω δύναμης που ασκούμε, κατά τρόπο ώστε ο φορέας της να σχηματίζει γωνία φ με το δάπεδο. Η κίνηση γίνεται με τόσο μικρή ταχύτητα, ώστε η αντίσταση του αέρα να θεωρείται αμελητέα.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να αντιγράψετε το σχήμα της εκφώνησης στο τετράδιο σας και να το συμπληρώσετε με το διάνυσμα της τριβής ολίσθησης.

Η τριβή ολίσθησης που ασκεί το δάπεδο στο σώμα:

- α) έχει μέτρο $F \cdot \sin \varphi - m \cdot a$ και φορά προς τα δεξιά,
- β) έχει μέτρο $F \cdot \sin \varphi - m \cdot a$ και φορά προς τα αριστερά,
- γ) έχει μέτρο $F \cdot \eta \mu \varphi - m \cdot a$ και φορά προς τα αριστερά

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

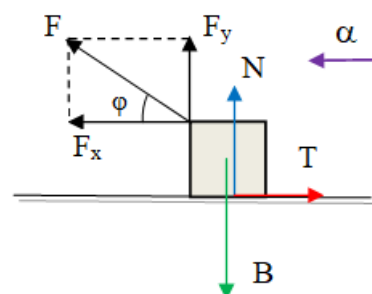
Με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα επιταχύνεται κινούμενο προς τα αριστερά, επομένως η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ έχει φορά προς τα δεξιά.

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$.

Για το μέτρο της $\vec{F}_x$ ισχύει: $F_x = F \cdot \sin \varphi$. (1)

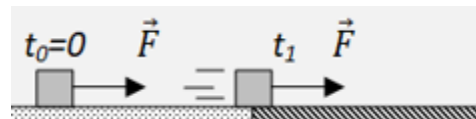
Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα $x'x$ (με θετική φορά προς τα αριστερά):

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow F_x - T = ma \Leftrightarrow T = F_x - ma \xrightarrow{(1)} T = F \cdot \sin \varphi - ma.$$



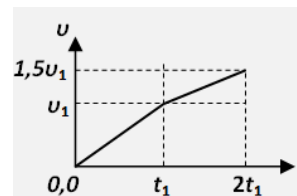
52. (13097, B2) Ένας κύβος αρχικά ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο λείο δάπεδο. Τη στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στον κύβο οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και αρχίζει να κινείται.

Τη στιγμή t_1 ο κύβος περνάει σε τραχύ τμήμα του δαπέδου, με το οποίο εμφανίζει σταθερή δύναμη τριβής, ενώ η δύναμη $\vec{F}$ εξακολουθεί να ασκείται πάνω του. Το πέρασμα από το λείο στο τραχύ τμήμα του οριζόντιου δαπέδου διαρκεί ασήμαντο χρόνο.



Στο διάγραμμα αποδίδεται το μέτρο της ταχύτητας του κύβου με το χρόνο που κινείται.

Με τη βοήθεια του διαγράμματος αυτού, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για το μέτρο T της τριβής που δέχεται από το τραχύ δάπεδο και το μέτρο F της οριζόντιας δύναμης που συνεχώς ασκείται πάνω στον κύβο, ισχύει:



A) Να επιλέξετε τη σωστή σχέση

- i. $F = T$ ii. $T = 0,5F$ iii. $T = 0,25F$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Από το διάγραμμα $v - t$ υπολογίζω τις τιμές της επιτάχυνσης του κύβου σε κάθε χρονική διάρκεια :

$$0 \rightarrow t_1 : \alpha_1 = \frac{v_1}{t_1}. \quad (1)$$

$$t_1 \rightarrow 2t_1 : \alpha_2 = \frac{1,5v_1 - v_1}{2t_1 - t_1} \Rightarrow \alpha_2 = 0,5 \frac{v_1}{t_1}. \quad (2)$$

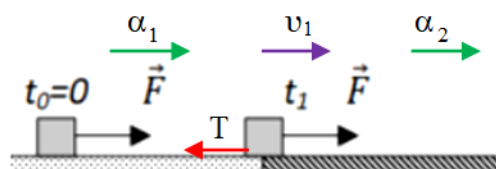
$$(1), (2) \Rightarrow \alpha_2 = 0,5\alpha_1. \quad (3)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε κάθε χρονική διάρκεια :

$$0 \rightarrow t_1 : \Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F = m\alpha_1. \quad (4)$$

$$t_1 \rightarrow 2t_1 : \Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow F - T = m\alpha_2. \quad (5)$$

$$\text{Ισχύει : } \alpha_2 = 0,5\alpha_1 \xrightarrow{(4),(5)} F - T = 0,5F \Leftrightarrow F - 0,5F = T \Leftrightarrow T = 0,5F.$$



Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή.

53. (13098, B2) Μια σκιέρ κατεβαίνει μια χιονισμένη πλαγιά η οποία αποτελεί κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης φ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, για την οποία δίνονται $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$. Η σκιέρ εμφανίζει με τη χιονισμένη πλαγιά τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_1 = 0,25$.



Στη βάση της πλαγιάς, η σκιέρ συνεχίζει σε οριζόντιο χιονισμένο δάπεδο με διαφορετική κατάσταση χιονιού, με το οποίο εμφανίζει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης μ_2 .

Αν δίνεται ότι το μέτρο της επιτάχυνσης της σκιέρ στη χιονισμένη πλαγιά, είναι ίσο με το μέτρο της επιβράδυνσής της στο οριζόντιο χιονισμένο δάπεδο, τότε:

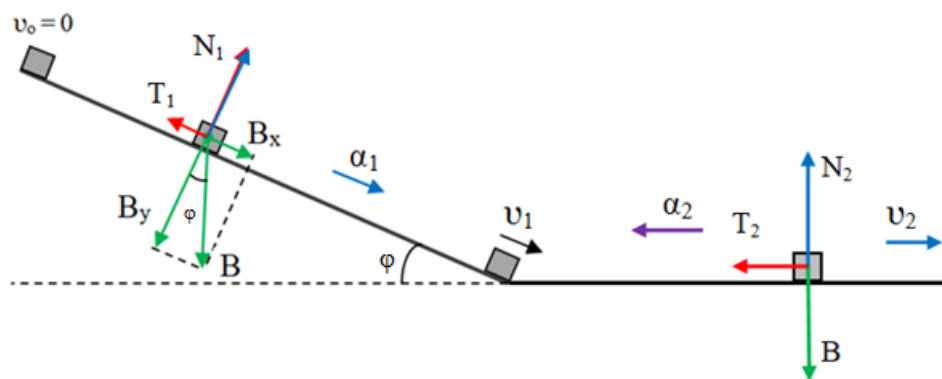
- A) Να επιλέξετε τη σωστή τιμή για το συντελεστή τριβής μ_2 :
- i. $\mu_2 = 0,25$ ii. $\mu_2 = 0,4$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση



Στο κεκλιμένο επίπεδο

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει : } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_1 = B_y \Leftrightarrow N_1 = mg\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (1)$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T_1 = \mu_1 N_1 \xrightarrow{(1)} T_1 = \mu_1 mg\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (2)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow B_x - T_1 = m\alpha_1 \xrightarrow{(2)} mg\eta\mu\varphi - \mu_1 mg\sigma\upsilon\nu\varphi = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = g(\eta\mu\varphi - \mu_1\sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow \alpha_1 = g(0,6 - 0,25 \cdot 0,8) \Rightarrow \alpha_1 = 0,4g. \quad (3)$$

Στο οριζόντιο επίπεδο

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει : } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 = B \Leftrightarrow N_2 = mg. \quad (4)$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T_2 = \mu_2 N_2 \xrightarrow{(4)} T_2 = \mu_2 mg. \quad (5)$$

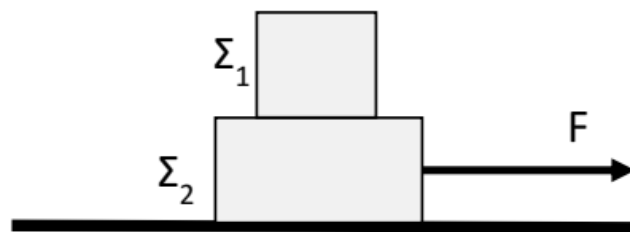
Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική φορά προς τα αριστερά) :

$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow T_2 = m\alpha_2 \xrightarrow{(5)} \mu_2 mg = m\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \mu_2 g. \quad (6)$$

$$\text{Ισχύει : } \alpha_2 = \alpha_1 \xrightarrow{(3),(6)} \mu_2 g = 0,4g \Leftrightarrow \mu_2 = 0,4.$$

Σχόλιο : Η αιτιολόγηση απαιτεί συνδυασμό πολλών σχέσεων και είναι ιδιαίτερα δύσκολη για το επίπεδο της Α' Λυκείου.

54. (13464) Τα κιβώτια Σ_1 και Σ_2 του σχήματος έχουν μάζες $m_1 = 3 \text{ Kg}$ και $m_2 = 5 \text{ Kg}$ αντίστοιχα. Ένας μαθητής τραβά απότομα το κιβώτιο Σ_2 ασκώντας του σταθερή, οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 80 \text{ N}$. Το δάπεδο επάνω στο οποίο κινείται το κιβώτιο Σ_2 είναι ακλόνητο και λείο. Τα κιβώτια Σ_1 και Σ_2 κινούνται μαζί ως ένα σώμα. Το κιβώτιο Σ_1 δέχεται κατά την διεύθυνση της επιφάνειας επαφής του με το Σ_2 :



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

- α. οριζόντια δύναμη τριβής μέτρου $T = 30 \text{ N}$ με φορά προς τα δεξιά.
- β. οριζόντια δύναμη τριβής μέτρου $T = 30 \text{ N}$ με φορά προς τα αριστερά.
- γ. μηδενική δύναμη.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Τα δύο σώματα κινούνται προς τα δεξιά με την ίδια επιτάχυνση $\vec{a}$.

Η δύναμη που επιταχύνει το Σ_1 είναι η στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$ από το Σ_2 , η οποία εμποδίζει την ολίσθησή του πάνω σε αυτό και έχει φορά προς τα δεξιά.

Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton, το Σ_1 ασκεί στο Σ_2 δύναμη $\vec{T}_\sigma'$ αντίθετη της $\vec{T}_\sigma$, δηλαδή με φορά προς τα αριστερά και μέτρο $T_\sigma' = T_\sigma$.

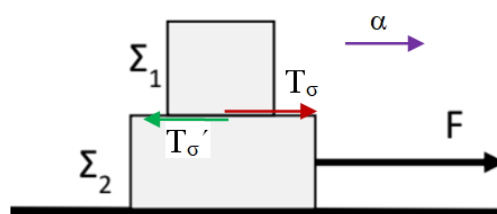
Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα.

Σώμα Σ_1

$$\Sigma F_x = m_1 a \Leftrightarrow T_\sigma = m_1 a. \quad (1)$$

Σώμα Σ_2

$$\Sigma F_x = m_2 a \Leftrightarrow F - T_\sigma' = m_2 a. \quad (2)$$



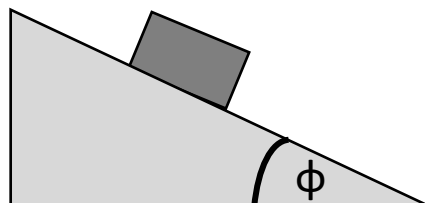
Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$T_\sigma + F - T_\sigma' = m_1 a + m_2 a \xrightarrow{T_\sigma = T_\sigma'} F = (m_1 + m_2) a \Leftrightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{80 \text{ N}}{8 \text{ Kg}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$(1) \Rightarrow T_\sigma = 3 \cdot 10 \text{ N} = 30 \text{ N}.$$

Άρα, η στατική τριβή που ασκείται στο Σ_1 έχει φορά προς τα δεξιά και μέτρο $T_\sigma = 30 \text{ N}$.

55. (13465, B2) Στο κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος με γωνία κλίσης $\varphi = 30^\circ$, ισορροπεί σώμα μάζας m . Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου ΔΕΝ μπορεί να είναι:



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. 0,8

β. 0,6

γ. 0,4

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Δίνονται: $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3} \cong 1,7$.

Απάντηση

Το κιβώτιο δεν κινείται γιατί υπάρχει στατική τριβή ανάμεσα σ' αυτό και την επιφάνεια, η οποία το εμποδίζει να ολισθήσει.

Εκτός από τη στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$, στο κιβώτιο ασκούνται: το βάρος $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$.

Αναλύω το βάρος σε κάθετες συνιστώσες $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$, ώστε η $\vec{B}_x$ να είναι παράλληλη στην επιφάνεια.

Εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα.

Άξονας x

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow B_x = T_\sigma \text{ ή } T_\sigma = m g \eta\mu\varphi. \quad (1)$$

Άξονας y

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow B_y = N \text{ ή } N = m g \sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (2)$$

Σύμφωνα με τον νόμο της οριακής τριβής:

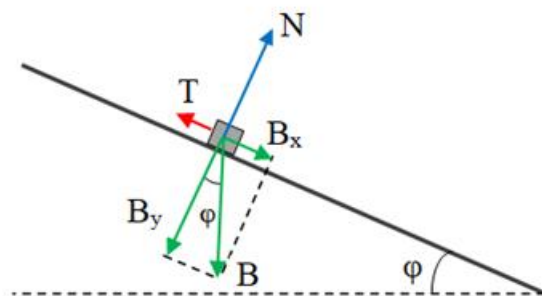
$$T_{op} = \mu_{op} N \xrightarrow{(2)} T_{op} = \mu_{op} m g \sigma\upsilon\nu\varphi, \quad (3)$$

όπου: μ_{op} ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής.

$$\text{Ισχύει: } T_\sigma \leq T_{op} \xrightarrow{(1),(3)} m g \eta\mu\varphi \leq \mu_{op} m g \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \eta\mu\varphi \leq \mu_{op} \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \mu_{op} \geq \epsilon\varphi\varphi \Rightarrow$$

$$\mu_{op} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } \mu_{op} \geq 0,577.$$

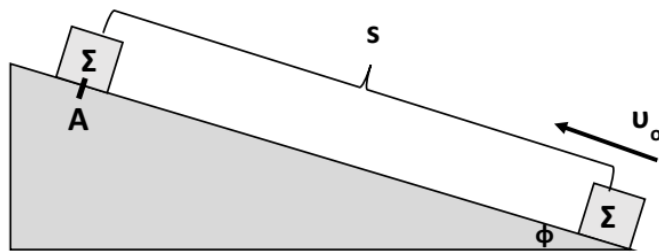
Άρα, ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής δεν μπορεί να έχει τιμή: 0,4.



Σχόλιο:

Η έννοια του συντελεστή οριακής στατικής τριβής και ο νόμος της οριακής στατικής τριβής δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, επομένως η ερώτηση είναι εκτός ύλης.

56. (13468, B2) Το σώμα Σ του σχήματος εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου, το οποίο δεν είναι λείο. Στην θέση A και αφού διανύσει διάστημα s επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, η ταχύτητά του μηδενίζεται στιγμιαία και στη συνέχεια επιστρέφει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε περνώντας από αυτό με ταχύτητα μέτρου v . Αν είναι α_1 το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος κατά την άνοδό του και α_2 το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος κατά την κάθοδό του, κινούμενο επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο:



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

α. $\alpha_1 > \alpha_2$,

β. $\alpha_1 < \alpha_2$,

γ. $\alpha_1 = \alpha_2$.

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται 3 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Κατά την άνοδο η τριβή έχει φορά προς τα κάτω, ενώ κατά την κάθοδο έχει φορά προς τα πάνω.

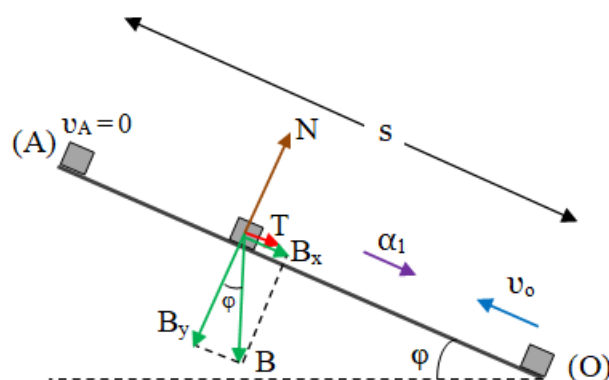
Αναλύω το βάρος σε κάθετες συνιστώσες $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$, ώστε η $\vec{B}_x$ να είναι παράλληλη στην επιφάνεια.

Ορίζω σαν θετική τη φορά της επιτάχυνσης και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε κάθε περίπτωση.

άνοδος

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow B_x + T = m\alpha_1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{B_x + T}{m}. \quad (1)$$

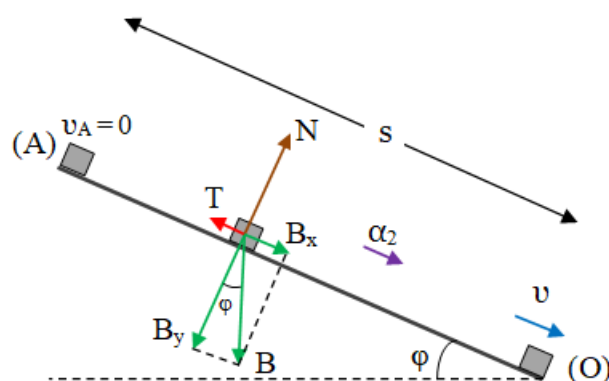


κάθοδος

$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow B_x - T = m\alpha_2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{B_x - T}{m}. \quad (2)$$

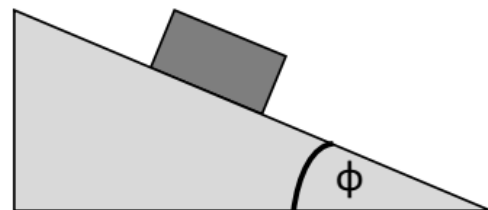
$$(1), (2) \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2.$$



57. (13469, B2) Στο κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος με γωνία κλίσης $\varphi = 30^\circ$, σώμα μάζας m ολισθαίνει κατεβαίνοντας με σταθερή ταχύτητα.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4



- α. Το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο.
- β. Υπάρχει τριβή μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου και η τιμή του συντελεστή τριβής ολίσθησης μπορεί να υπολογιστεί.
- γ. Υπάρχει τριβή μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου, αλλά τα δεδομένα δεν επαρκούν ώστε να υπολογίσουμε η τιμή του συντελεστή τριβής ολίσθησης.

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Δίνονται: $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3} \cong 1,7$.

Απάντηση

Σχεδιάζω το βάρος $\vec{B}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$ (παράλληλη στην επιφάνεια) και $\vec{B}_y$ (κάθετη στην επιφάνεια).

Αφού το σώμα κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, άρα :

$$\Sigma F_x = 0.$$

Επομένως υπάρχει τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, με φορά προς τα πάνω. Ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow B_x = T \Leftrightarrow T = m\eta\mu\varphi. \quad (1)$$

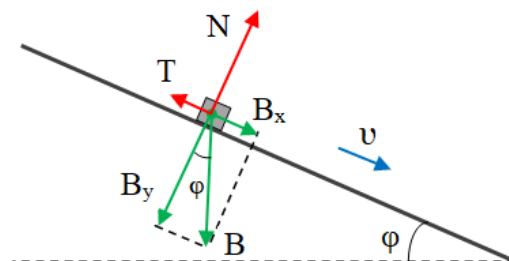
Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y \Leftrightarrow N = m\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (2)$$

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1),(2)} m\eta\mu\varphi = \mu m\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \eta\mu\varphi = \mu\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \mu = \epsilon\varphi\varphi \xrightarrow{\varphi=30^\circ} \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως, υπάρχει τριβή ολίσθησης και ο συντελεστής τριβής μπορεί να υπολογιστεί.



58. (13510, 2.2) Σώμα μάζας m ολισθαίνει κατεβαίνοντας με σταθερή ταχύτητα, επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος. Η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varphi = 45^\circ$.

Δίνονται: $\eta\mu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου είναι:

α. $\mu > 1$

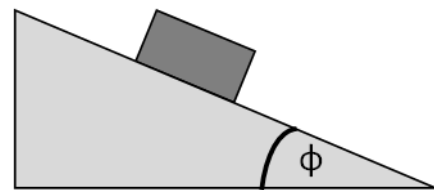
β. $\mu < 1$

γ. $\mu = 1$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Σχεδιάζω το βάρος $\vec{B}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και την τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (με φορά προς τα πάνω).

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$ (παράλληλη στην επιφάνεια) και $\vec{B}_y$ (κάθετη στην επιφάνεια).

Αφού το σώμα κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, άρα :

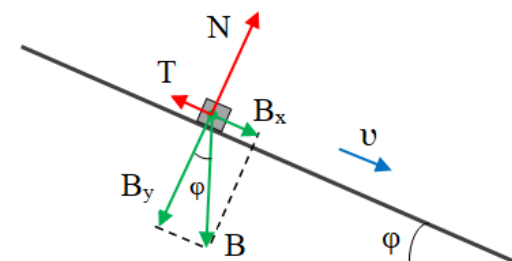
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow B_x = T \Leftrightarrow T = m\eta\mu\varphi. \quad (1)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

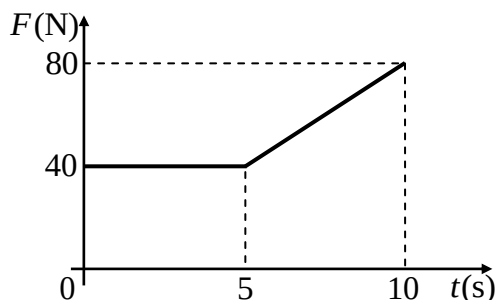
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y \Leftrightarrow N = m\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (2)$$

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1),(2)} m\eta\mu\varphi = \mu m\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \eta\mu\varphi = \mu\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \mu = \epsilon\varphi\varphi \xrightarrow{\varphi=45^\circ} \mu = 1.$$



59. (13551, 2.2) Ένα σώμα είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s αρχίζει να ασκείται στο σώμα οριζόντια δύναμη F , της οποίας το μέτρο σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διάγραμμα. Το σώμα καθ' όλη την διάρκεια των 10 s παραμένει ακίνητο.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η τριβή που ασκείται στο σώμα είναι:

(α) Στατική τριβή

(β) Τριβή ολίσθησης

(γ) Οριακή τριβή

Μονάδες 4

B) Για το χρονικό διάστημα 0 s - 10 s, να κάνετε τη γραφική παράσταση του μέτρου της τριβής που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμονομημένους άξονες, αιτιολογώντας την μορφή της.

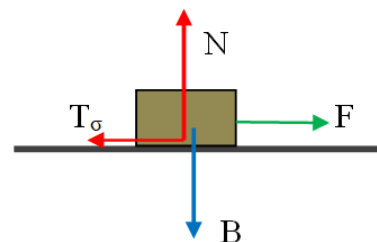
Μονάδες 9

Απάντηση

A) Το σώμα παραμένει ακίνητο, άρα στην οριζόντια διεύθυνση η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική.

Επομένως το σώμα δέχεται από την επιφάνεια μία οριζόντια δύναμη, η οποία είναι συνεχώς αντίθετη από τη δύναμη $\vec{F}$.

Η δύναμη αυτή είναι η **στατική τριβή** $\vec{T}_\sigma$.

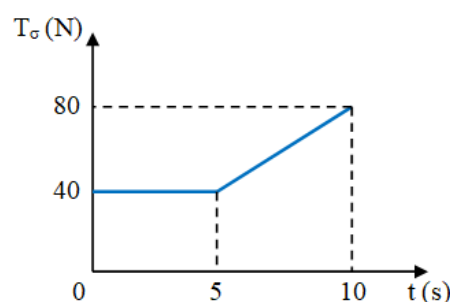


B) Στον άξονα x που είναι παράλληλος στην επιφάνεια, ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F = T_\sigma.$$

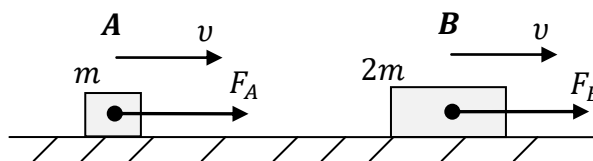
Δηλαδή, η στατική τριβή έχει σε κάθε χρονική στιγμή το ίδιο μέτρο με τη δύναμη $\vec{F}$.

Το διάγραμμα του μέτρου της στατικής τριβής $\vec{T}_\sigma$ σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



60. (13554, 2.2) Στο σχήμα φαίνονται δύο κιβώτια, το Α με μάζα m και το Β με μάζα $2m$. Τα κιβώτια κινούνται ευθύγραμμα ομαλά, με ταχύτητες ίδιου μέτρου, πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$ αντίστοιχα.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δαπέδου και των κιβωτίων είναι μ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g .



A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Για τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$ ισχύει:

α. $F_A = 2F_B$

β. $F_B = 2F_A$

γ. $F_B = F_A$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, σε κάθε σώμα ασκούνται οι εξής δυνάμεις : η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (αντίρροπη από την ταχύτητα), το βάρος $\vec{W}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την επιφάνεια.

Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton σε κάθε άξονα και το νόμο της τριβής ολίσθησης.

Σώμα Α :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_A = W_A \Leftrightarrow N_A = mg. \quad (1)$$

$$T_A = \mu N_A \xrightarrow{(1)} T_A = \mu mg. \quad (2)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_A = T_A \xrightarrow{(2)} F_A = \mu mg. \quad (3)$$

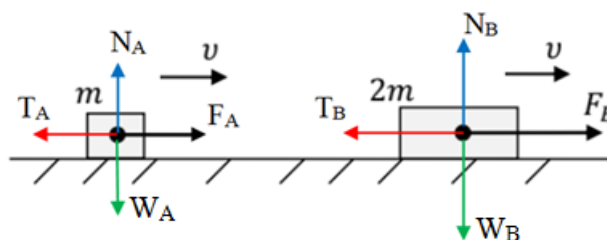
Σώμα Β :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_B = W_B \Leftrightarrow N_B = 2mg. \quad (4)$$

$$T_B = \mu N_B \xrightarrow{(4)} T_B = 2\mu mg. \quad (5)$$

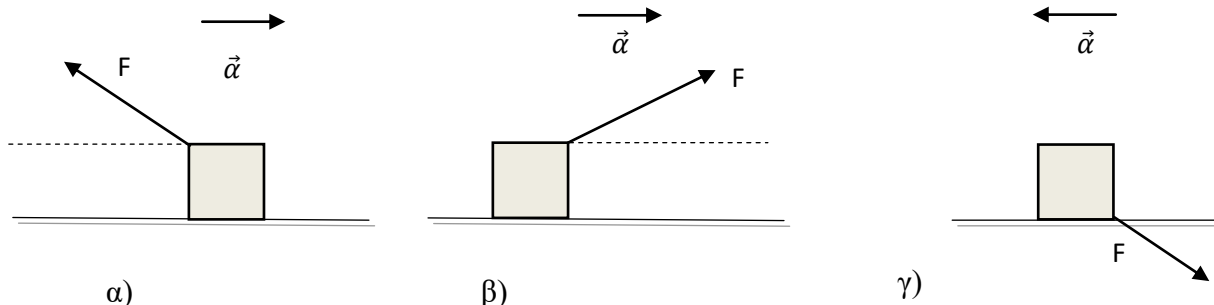
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_B = T_B \xrightarrow{(5)} F_B = 2\mu mg. \quad (6)$$

$$(3), (6) \Rightarrow F_B = 2F_A.$$



61. (13570, 2.2) Σώμα αμελητέων διαστάσεων κινείται πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο με σταθερή (θετική σε μέτρο) επιτάχυνση $\vec{a}$. Η κατεύθυνση της δύναμης που ασκούμε στο σώμα σχηματίζει γωνία 30° με το δάπεδο. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Η δύναμη της τριβής ολίσθησης που ασκείται στο σώμα από το δάπεδο έχει μέτρο $F \sin 30^\circ - ma$.

A. Επιλέξτε ποιο από τα ακόλουθα σχήματα ανταποκρίνεται στα πιο πάνω δεδομένα:



Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Από την εκφώνηση δίνεται ότι η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο :

$$T = F \sin 30^\circ - ma.$$

Η προηγούμενη σχέση γράφεται : $F \sin 30^\circ - T = ma.$ (1)

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$,

ώστε η $\vec{F}_x$ να είναι οριζόντια.

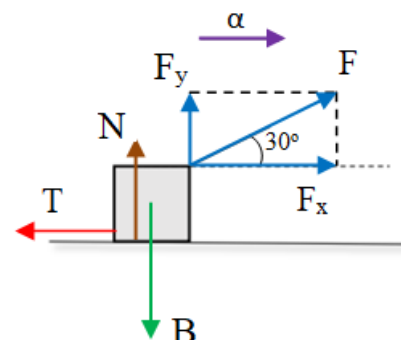
Για το μέτρο της $\vec{F}_x$ ισχύει : $F_x = F \sin 30^\circ.$ (2)

Αντικαθιστώντας το μέτρο της $\vec{F}_x$ από τη σχέση (2) στη σχέση (1), προκύπτει :

$$F_x - T = ma.$$

Αυτό σημαίνει ότι η οριζόντια συνιστώσα $\vec{F}_x$ έχει την ίδια φορά με την επιτάχυνση $\vec{a}$, ενώ η τριβή $\vec{T}$ έχει αντίθετη φορά.

Άρα, το σωστό σχήμα είναι το (β).

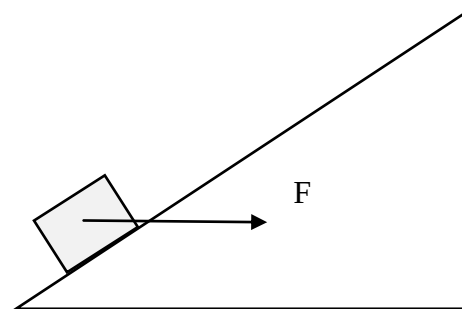


Σχόλιο : Η έκφραση «θετική σε μέτρο επιτάχυνση» δεν έχει νόημα.

Το μέτρο ενός μεγέθους είναι πάντοτε θετικό ή μηδέν.

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «Σώμα . . . κινείται πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$, η οποία έχει τη θετική φορά του άξονα x».

62. (13575, 2.2) Σώμα μάζας 1 kg γλιστράει με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο (γωνίας φ) υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F (όπως στο σχήμα). Δίνονται ως δεδομένα: ο συντελεστής τριβής του επιπέδου $\mu = 0,2$, $g = 10 \frac{m}{s^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.



Μονάδες 4

Α. Αν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα και ισχύει: $\eta\mu\varphi = \sigma\upsilon\nu\varphi$ ποια από τις επόμενες επιλογές είναι σωστή;

- α) $F = \frac{3}{2} \cdot B$, β) $\frac{3}{2} \cdot F = B$, γ) $F = B$.

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σχεδιάζω και τις υπόλοιπες δυνάμεις: το βάρος $\vec{B}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και την τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ και το βάρος σε άξονες x', y' , ώστε ο άξονας x να είναι παράλληλος στην επιφάνεια.

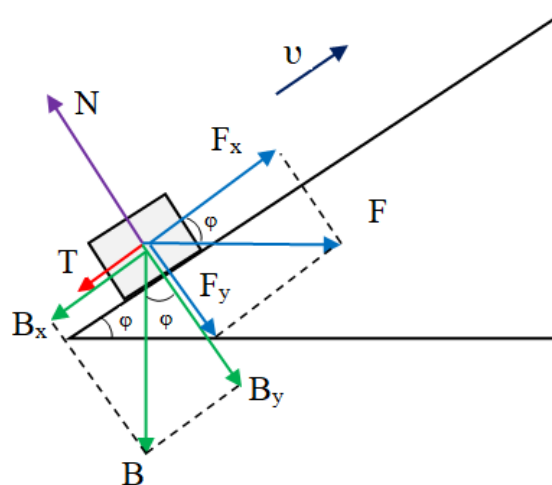
Ισχύουν οι σχέσεις:

$$F_x = F \sigma\upsilon\nu\varphi \quad (1)$$

$$F_y = F \eta\mu\varphi \quad (2)$$

$$B_x = B \eta\mu\varphi \quad (3)$$

$$B_y = B \sigma\upsilon\nu\varphi \quad (4)$$



Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα στον άξονα x ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_x - B_x - T = 0 \Leftrightarrow F_x - B_x = T \xrightarrow{(1),(3)} T = F \sigma\upsilon\nu\varphi - B \eta\mu\varphi \xrightarrow{\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\varphi} T = (F - B) \eta\mu\varphi. \quad (5)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - F_y - B_y = 0 \xrightarrow{(2),(4)} N = F \eta\mu\varphi + B \sigma\upsilon\nu\varphi \xrightarrow{\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\varphi} N = (F + B) \eta\mu\varphi. \quad (6)$$

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης:

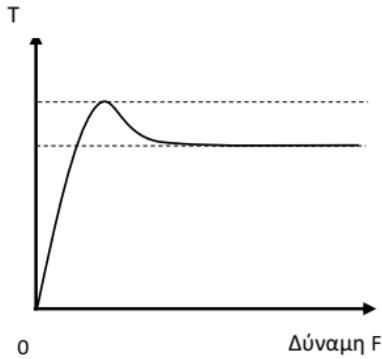
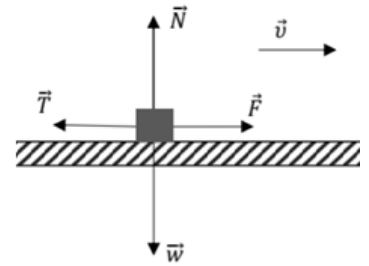
$$T = \mu N \xrightarrow{(5),(6)} (F - B) \eta\mu\varphi = \mu (F + B) \eta\mu\varphi \xrightarrow{\eta\mu\varphi \neq 0} F - B = \mu (F + B) \Rightarrow$$

$$F(1 - \mu) = B(1 + \mu) \xrightarrow{\mu=0,2} 0,8F = 1,2B \Rightarrow F = \frac{3}{2} \cdot B.$$

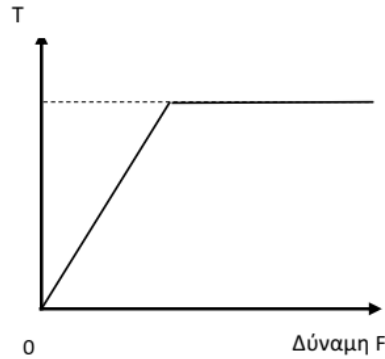
Σχόλια

- 1) Η εκφώνηση έχει περιττά δεδομένα. Δεν είναι απαραίτητη η τιμή της μάζας, ούτε η τιμή του g .
- 2) Η ερώτηση είναι ιδιαίτερα δύσκολη για το επίπεδο της Α' Λυκείου γιατί απαιτεί την ανάλυση δύο δυνάμεων και τον συνδυασμό αρκετών σχέσεων.

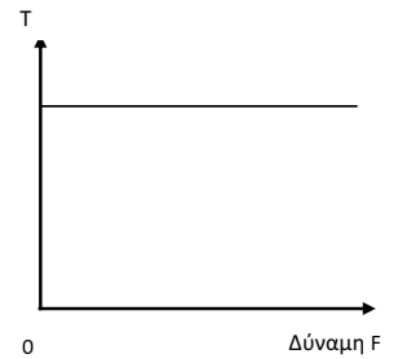
63. (13577, 2.1) Σε σώμα μάζας m που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται δύναμη $\vec{F}$, οριζόντιας διεύθυνσης το μέτρο της οποίας αυξάνεται προοδευτικά. Κάποια στιγμή το σώμα τίθεται σε ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Η επιφάνεια στην οποία ολισθαίνει το σώμα εμφανίζει τριβή και η αντίσταση του αέρα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Α. Ποιο από τα πιο κάτω διαγράμματα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της τριβής ως προς την δύναμη $\vec{F}$;



(α)



(β)



(γ)

Μονάδες 6

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 6

Απάντηση

Αρχικά το σώμα είναι ακίνητο και η τριβή είναι στατική, άρα ισχύει : $T = F$.

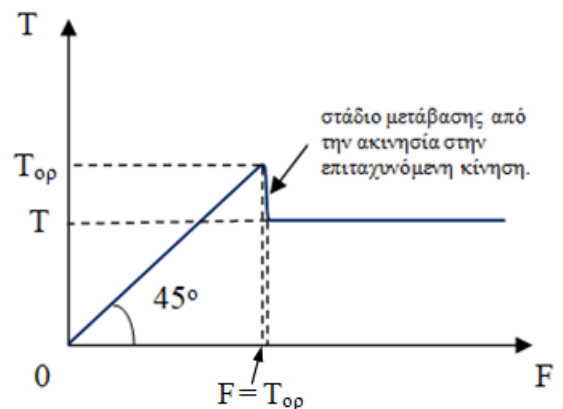
Επομένως σε αυτό το διάστημα, το διάγραμμα $T = f(F)$ είναι πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα που

σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα F : $\epsilon\phi\theta = \frac{T}{F} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$.

Τη στιγμή που η στατική τριβή αποκτά τη μέγιστη τιμή (οριακή τριβή T_{op}) το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει. Αυξάνοντας ελάχιστα το μέτρο της δύναμης το σώμα ξεκινά και αλλάζει το είδος τριβής (τριβή ολίσθησης T). Το μέτρο της τριβής ελαττώνεται (σχεδόν ακαριαία) από T_{op} σε T και στη συνέχεια παραμένει σταθερό.

Αφού η τριβή ολίσθησης είναι σταθερή, σε αυτό το διάστημα το διάγραμμα είναι ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στον άξονα F .

Το διάγραμμα που περιγράφει (ποιοτικά) τη σχέση ανάμεσα στο μέτρο της τριβής και της δύναμης F έχει σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα.



Σχόλιο:

Από τη στιγμή που ξεκινά το σώμα, κινείται με επιτάχυνση μέτρου : $\alpha = \frac{F - T}{m}$.

Αφού το μέτρο της δύναμης F αυξάνεται συνεχώς ενώ το μέτρο της τριβής ολίσθησης είναι σταθερό, το μέτρο της επιτάχυνσης αυξάνεται, άρα η κίνηση δεν είναι ομαλά επιταχυνόμενη.

Συμπέρασμα

Η ερώτηση είναι λανθασμένη, αφού κανένα διάγραμμα δεν περιγράφει σωστά το φαινόμενο.

Σε κάθε περίπτωση, η ερώτηση δεν αντιστοιχεί στο επίπεδο γνώσεων των μαθητών της Α' Λυκείου.

64. (13616, 2.1) Ένα σώμα ολισθαίνει σε οριζόντιο, τραχύ και ακλόνητο δάπεδο.

Το σώμα έχει βάρος $\vec{B}$.

A. Η δύναμη που δέχεται το σώμα από το δάπεδο έχει μέτρο:

- α) ίσο με το μέτρο του βάρους,
- β) μεγαλύτερο από το μέτρο του βάρους,
- γ) μικρότερο από το μέτρο του βάρους.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Υποθέτω ότι δεν ασκείται στο σώμα εξωτερική δύναμη $\vec{F}$.

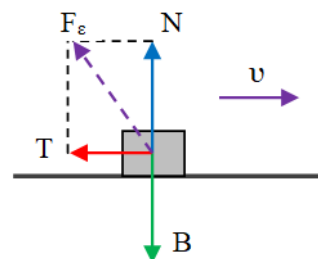
Αφού το δάπεδο είναι τραχύ, υπάρχει τριβή : $T \neq 0$.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B. \quad (1)$$

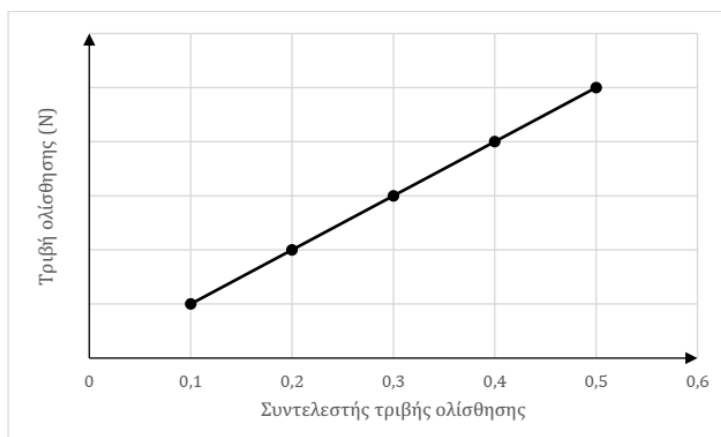
Η δύναμη $\vec{F}_\varepsilon$ που ασκεί το δάπεδο στο σώμα είναι η συνισταμένη της τριβής $\vec{T}$ και της κάθετης δύναμης $\vec{N}$, άρα έχει μέτρο :

$$F_\varepsilon = \sqrt{T^2 + N^2} \xrightarrow{(1)} F_\varepsilon = \sqrt{T^2 + B^2} \xrightarrow{T \neq 0} F_\varepsilon > B.$$



Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «Ένα σώμα ολισθαίνει σε οριζόντιο, τραχύ και ακλόνητο δάπεδο χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$ ».

65. (13617, 2.2) Σημειακό αντικείμενο μάζας m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ σε οριζόντιο, ακλόνητο δάπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, που παρουσιάζει το σημειακό αντικείμενο με το δάπεδο, μπορεί να μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,1, 0,5)$, οπότε μεταβάλλεται και το μέτρο της τριβής ολίσθησης που δέχεται το σημειακό αντικείμενο, όπως στο διάγραμμα.



Ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος του γραφήματος είναι 10 N.

A. Αν $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, η μάζα του σώματος είναι:

- α) $m = 1 \text{ Kg}$, β) $m = 2 \text{ Kg}$, γ) $m = 0,5 \text{ Kg}$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

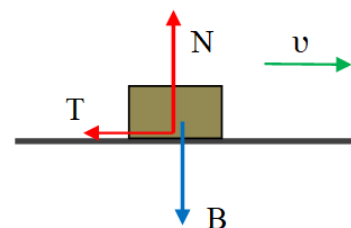
Απάντηση

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B. \quad (1)$$

Σύμφωνα με το νόμο της τριβής :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu \cdot B \quad (2)$$



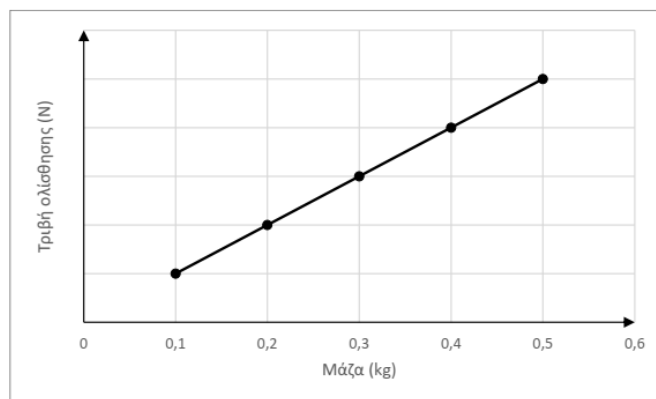
Σύμφωνα με τη σχέση (2) ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος στο διάγραμμα της σχέσης $T = f(\mu)$ είναι ίσος με το μέτρο του βάρους του σώματος.

Άρα : $B = 10 \text{ N}$.

Επομένως :

$$B = mg \Leftrightarrow m = \frac{B}{g} \Rightarrow m = \frac{10 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow m = 1 \text{ Kg}.$$

66. (13618, 2.2) Σημειακό αντικείμενο έχει μάζα που μπορεί να μεταβάλλεται στο διάστημα (0,1 kg , 0,5 kg) και εκτοξεύεται, με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ σε οριζόντιο, ακλόνητο δάπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ολ}$. Επειδή η μάζα του μπορεί να μεταβάλλεται, αλλάζει και το μέτρο της τριβής ολίσθησης που δέχεται, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



Ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος, του διαγράμματος είναι $10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$.

A. Αν $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του σημειακού αντικειμένου με το δάπεδο είναι:

- α) $\mu_{ολ} = 1$, β) $\mu_{ολ} = 2$ γ) $\mu_{ολ} = 0,5$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B. \quad (1)$$

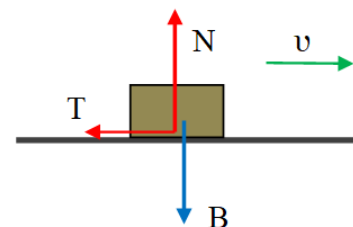
Σύμφωνα με το νόμο της τριβής :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu \cdot B \Leftrightarrow T = \mu mg \Leftrightarrow T = (\mu g) \cdot m \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ του ευθύγραμμου τμήματος στο διάγραμμα της σχέσης $T = f(m)$

$$\text{είναι: } \lambda = \mu g = 10 \frac{\text{N}}{\text{Kg}}.$$

$$\text{Άρα: } \mu g = \lambda \Leftrightarrow \mu = \frac{\lambda}{g} \Rightarrow \mu = \frac{10 \frac{\text{N}}{\text{Kg}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \mu = 1.$$



67. (13657, 2.2) Ένας τσιμεντένιος κύβος μάζας m ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ . Αντιστοιχίστε τις δυνάμεις τις αριστερής στήλης με μια από τις πιθανές απαντήσεις στη δεξιά στήλη.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση για τα μέτρα των παρακάτω δυνάμεων.

α) Η κάθετη δύναμη επαφής που ασκεί το επίπεδο στον κύβο	i) $m \cdot g$
β) Στατική τριβή μεταξύ κύβου και επιπέδου	ii) $m \cdot g \cdot \eta \mu \varphi$
γ) Η δύναμη που ασκεί το επίπεδο στον κύβο	iii) $m \cdot g \cdot \sigma \nu \nu \varphi$

Μονάδες 6

B. Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Μονάδες 7

Απάντηση

Σχεδιάζω τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο : το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και η στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$ (η οποία εμποδίζει την ολίσθηση του κύβου προς τα κάτω, άρα έχει φορά προς τα πάνω).

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$ (παράλληλη στην επιφάνεια) και $\vec{B}_y$ (κάθετη στην επιφάνεια).

Στον άξονα x το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow B_x = T_\sigma \Leftrightarrow T_\sigma = mg \eta \mu \varphi. \quad (1)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y \Leftrightarrow N = mg \sigma \nu \nu \varphi. \quad (2)$$

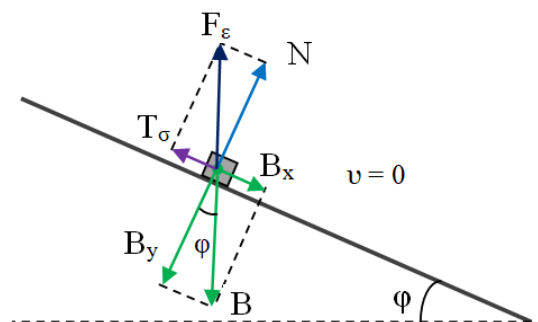
➤ Η δύναμη $\vec{F}_\epsilon$ που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα είναι η συνισταμένη της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ και της στατικής τριβής $\vec{T}_\sigma$.

Το μέτρο της υπολογίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα :

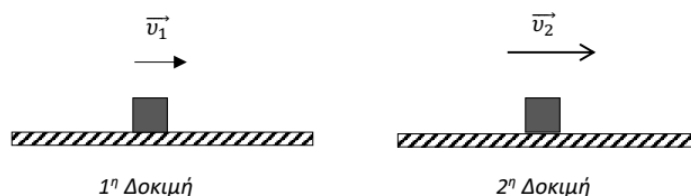
$$F_\epsilon = \sqrt{N^2 + T_\sigma^2} \xrightarrow{(1), (2)} F_\epsilon = \sqrt{(mg \sigma \nu \nu \varphi)^2 + (mg \eta \mu \varphi)^2} = \sqrt{(mg)^2 (\eta \mu^2 \varphi + \sigma \nu \nu^2 \varphi)} \Rightarrow F_\epsilon = mg.$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του μέτρου της $\vec{F}_\epsilon$:

Ο κύβος ισορροπεί με την επίδραση του βάρους $\vec{B}$ και της δύναμης $\vec{F}_\epsilon$ που ασκεί η επιφάνεια, άρα οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες και επομένως έχουν ίσα μέτρα : $F_\epsilon = B \Rightarrow F_\epsilon = mg$.



68. (13773, 2.1)



Μία ομάδα μαθητών της Α Λυκείου πειραματίζεται στο Εργαστήριο Φυσικής του σχολείου της, πραγματοποιώντας μία εργαστηριακή άσκηση με θέμα την τριβή ολίσθησης. Για τις ανάγκες της άσκησης χρησιμοποιούν ομογενές σώμα κυβικού σχήματος, το οποίο θέτουν επαναληπτικά σε κίνηση πάνω σε οριζόντιο πάγκο εργασίας, ασκώντας κάθε φορά κατάλληλη οριζόντια δύναμη, ώστε το σώμα να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Δύο από τις δοκιμές τους φαίνονται στο σχήμα. Στην πρώτη ο κύβος κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_1 και στη δεύτερη με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_2 .

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν T_1 και T_2 είναι τα μέτρα των δυνάμεων της τριβής ολίσθησης που ασκούνται στον κύβο στην 1^η και 2^η δοκιμή αντίστοιχα και για τις ταχύτητες που κινείται ο κύβος ισχύει η σχέση $\vec{v}_1 < \vec{v}_2$ τότε :

- α) $T_1 = T_2$, β) $T_1 > T_2$, γ) $T_1 < T_2$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

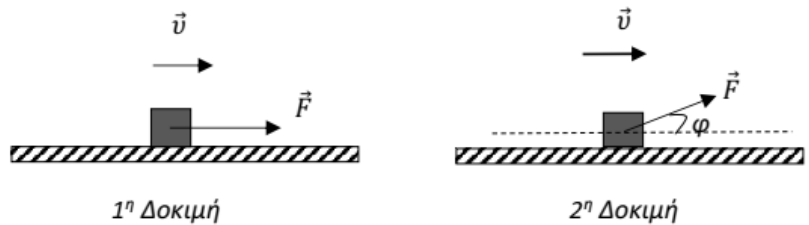
Σύμφωνα με το νόμο της τριβής ολίσθησης, **το μέτρο της τριβής ολίσθησης δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος.**

Επομένως, η τριβή ολίσθησης έχει το ίδιο μέτρο στις δύο δοκιμές, δηλαδή ισχύει : $T_1 = T_2$.

Σχόλιο :

Η εκφώνηση έπρεπε να δίνει τη σχέση των μέτρων των ταχυτήτων του κύβου ($v_1 < v_2$).

69. (13776, 2.1) Μία ομάδα μαθητών της Α Λυκείου πειραματίζεται στο Εργαστήριο Φυσικής του σχολείου της, πραγματοποιώντας μία εργαστηριακή άσκηση με θέμα την τριβή ολίσθησης.



Για τις ανάγκες της άσκησης χρησιμοποιούν ομογενές σώμα κυβικού σχήματος το οποίο θέτουν επαναληπτικά σε κίνηση πάνω σε οριζόντιο πάγκο εργασίας, ασκώντας κάθε φορά κατάλληλη σταθερή δύναμη, ώστε το σώμα να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα ίδιου μέτρου v . Δύο από τις δοκιμές τους φαίνονται στο σχήμα. Στην 1^η δοκιμή η δύναμη $\vec{F}$ είναι οριζόντια, ενώ στην 2^η δοκιμή έχει διεύθυνση που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια, για την οποία ισχύει, $\eta\mu\varphi = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,6$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ είναι οι δυνάμεις της τριβής ολίσθησης που ασκούνται στον κύβο από τον πάγκο εργασίας στην 1^η και 2^η δοκιμή αντίστοιχα, τότε για τον λόγο των μέτρων τους ισχύει:

α) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1}$, β) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{5}$, γ) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{5}{3}$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, στον κύβο ασκούνται : η τριβή $\vec{T}$ (οριζόντια με φορά προς τα αριστερά), το βάρος $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την επιφάνεια.

Υποθέτω ότι η δύναμη έχει το ίδιο μέτρο F στις δύο δοκιμές.

1η δοκιμή

Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F = T_1. \quad (1)$$

2η δοκιμή

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε συνιστώσες : $\vec{F}_x$ (παράλληλη στην επιφάνεια) και $\vec{F}_y$ (κάθετη στην επιφάνεια).

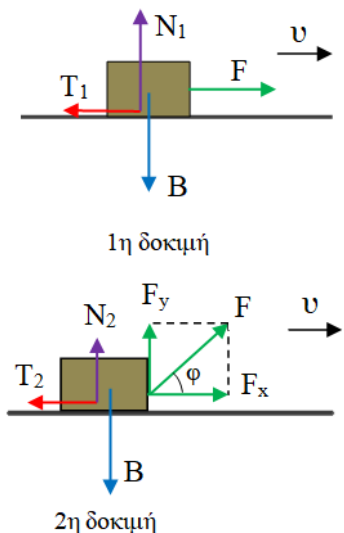
Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_x = T_2 \Leftrightarrow F\sigma\upsilon\nu\varphi = T_2. \quad (2)$$

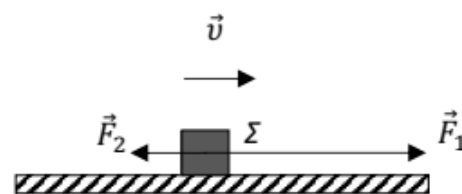
$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{F}{F\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{5}{3}.$$

Σχόλιο :

Η εκφώνηση έπρεπε να διευκρινίζει ότι το μέτρο της δύναμης είναι ίδιο στις δύο περιπτώσεις.



70. (13777, 2.1) Το σώμα Σ με βάρος $\vec{w}$ κινείται σε ευθύγραμμο και τραχύ οριζόντιο επίπεδο. Στην οριζόντια διεύθυνση ασκούνται στο Σ δύο αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ και η τριβή ολίσθησης, υπό την επίδραση των οποίων το Σ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα μέτρου v . Γνωρίζουμε ότι για τα μέτρα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ισχύει $F_1 = 3 \cdot F_2$.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν η δύναμη $\vec{F}_1$ είναι ίση κατά μέτρο με το βάρος $\vec{w}$ του σώματος, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζοντίου επιπέδου είναι ίσος με:

α) $\mu = \frac{1}{3}$, β) $\mu = \frac{2}{3}$, γ) $\mu = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Σύμφωνα με την εκφώνηση :

$$F_1 = B, \quad (1)$$

$$F_1 = 3F_2 \xrightarrow{(1)} B = 3F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{B}{3}. \quad (2)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

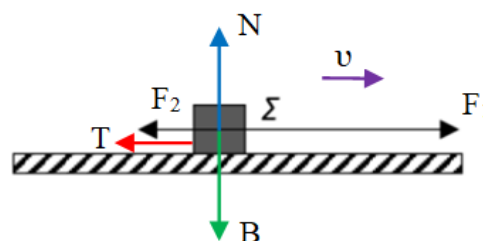
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B. \quad (3)$$

$$\text{Σύμφωνα με το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T = \mu N \xrightarrow{(3)} T = \mu B. \quad (4)$$

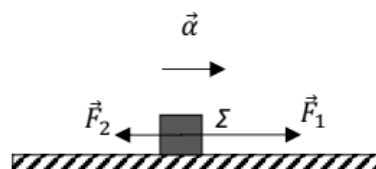
Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_1 - F_2 - T = 0 \Leftrightarrow F_1 - F_2 = T \xrightarrow{(1), (2), (4)} B - \frac{B}{3} = \mu B \Leftrightarrow \frac{2B}{3} = \mu B \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{2}{3}.$$



71. (13778, 2.1) Το σώμα Σ με βάρος $\vec{w}$ κινείται σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο. Στην οριζόντια διεύθυνση ασκούνται στο Σ δύο αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ και η τριβή ολίσθησης, υπό την επίδραση των οποίων το Σ κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα με επιτάχυνση μέτρου $a = \frac{g}{5}$, όπου g το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας.



Επίσης γνωρίζουμε ότι για τα μέτρα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ισχύει $F_1 = 2 \cdot F_2$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν η δύναμη $\vec{F}_1$ είναι ίση κατά μέτρο με το βάρος $\vec{w}$ του σώματος, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζοντίου επιπέδου είναι ίσος με:

α) $\mu = 0,1$, **β)** $\mu = 0,2$, **γ)** $\mu = 0,3$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Σύμφωνα με την εκφώνηση :

$$F_1 = B, \quad (1)$$

$$F_1 = 2F_2 \xrightarrow{(1)} B = 2F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{B}{2}. \quad (2)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

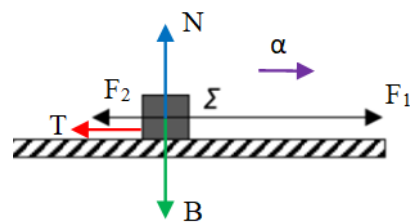
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B. \quad (3)$$

$$\text{Σύμφωνα με το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T = \mu N \xrightarrow{(3)} T = \mu B. \quad (4)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική τη φορά της επιτάχυνσης) :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F_1 - F_2 - T = m\alpha \Leftrightarrow F_1 - F_2 - m\alpha = T \xrightarrow[\alpha = \frac{g}{5}]{(1), (2), (4)} B - \frac{B}{2} - m\frac{g}{5} = \mu B \Leftrightarrow$$

$$\frac{B}{2} - \frac{B}{5} = \mu B \Leftrightarrow \frac{3B}{10} = \mu B \Leftrightarrow \mu = 0,3.$$



72. (13780, 2.1) Ένα κιβώτιο με βάρος $\vec{w}$ ισορροπεί ακίνητο σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Θεωρώντας ως θετική τη φορά του σχήματος, για την τιμή της στατικής τριβής $\vec{T}_{\sigma\tau}$ που ασκείται από το κεκλιμένο επίπεδο στο κιβώτιο ισχύει:

α) $T_{\sigma\tau} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi$,

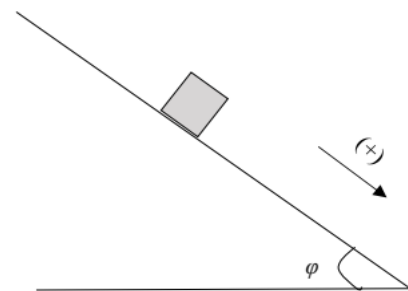
β) $T_{\sigma\tau} = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi$,

γ) $T_{\sigma\tau} = -m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Στο κιβώτιο ασκούνται οι εξής δυνάμεις :

το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την επιφάνεια και η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma}$.

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$, ώστε η $\vec{B}_x$ να είναι παράλληλη στην επιφάνεια.

Για το μέτρο της $\vec{B}_x$ ισχύει η σχέση :

$$B_x = mg\eta\mu\varphi. \quad (1)$$

Η συνιστώσα $\vec{B}_x$ τείνει να κινήσει το κιβώτιο προς τα

κάτω, επομένως η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma}$ (η οποία εμποδίζει την ολίσθηση) έχει φορά προς τα πάνω.

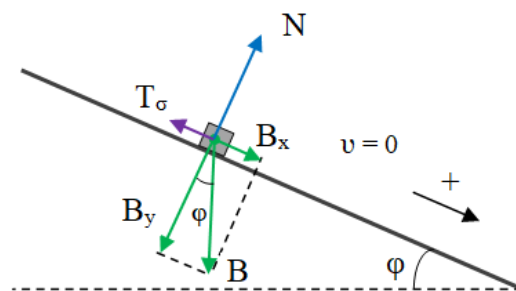
Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow B_x = T_{\sigma} \xrightarrow{(1)} mg\eta\mu\varphi = T_{\sigma}.$$

Άρα, το **μέτρο** της στατικής τριβής δίνεται από τη σχέση : $T_{\sigma} = mg\eta\mu\varphi$.

Αφού η θετική φορά είναι προς τα κάτω, άρα η **αλγεβρική τιμή** της στατικής τριβής είναι :

$$T_{\sigma} = -mg\eta\mu\varphi.$$



Σχόλιο :

Η διατύπωση : « . . . για την τιμή της στατικής τριβής . . . » είναι ασαφής (το σχολικό βιβλίο με τον όρο «τιμή» ενός μεγέθους εννοεί άλλοτε την αλγεβρική τιμή και άλλοτε το μέτρο του).

Επομένως, είναι πιθανό να σχηματίσει ο/η εξεταζόμενος/η την εντύπωση ότι ο όρος «τιμή» αναφέρεται στο **μέτρο** της στατικής τριβής και να δώσει σωστή την απάντηση β.

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : « . . . για την **αλγεβρική τιμή** της στατικής τριβής . . . », η οποία παραπέμπει σαφώς στην απάντηση γ.

73. (13782, 2.1) Ένα κιβώτιο με βάρος $\vec{w}$ ισορροπεί ακίνητο σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση με τη βοήθεια αβαρούς και μη εκτατού νήματος το ένα άκρο του οποίου δένεται στο κιβώτιο ενώ το άλλο του άκρο είναι προσδεμένο σε ακλόνητο σημείο.

Δίνεται $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

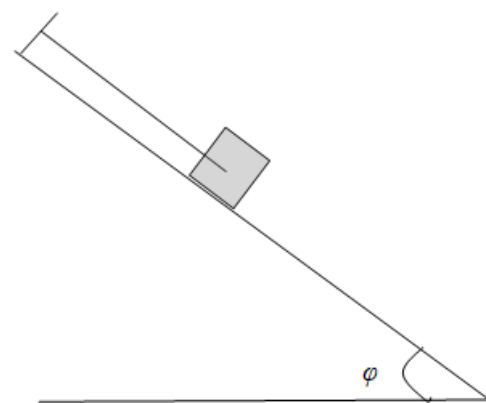
Αν η τάση του νήματος $\vec{T}$ που ασκείται στο κιβώτιο έχει μέτρο που συνδέεται με το μέτρο του βάρους $\vec{w}$ με τη σχέση $w = 2 \cdot T$, για την στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ που ασκείται από το κεκλιμένο επίπεδο στο κιβώτιο ισχύει:

- α) Έχει μέτρο $T_{\sigma\tau} = 0,2 \cdot m \cdot g$ και είναι ομόρροπη της $\vec{T}$,
- β) Έχει μέτρο $T_{\sigma\tau} = 0,1 \cdot m \cdot g$ και είναι αντίρροπη της $\vec{T}$,
- γ) Έχει μέτρο $T_{\sigma\tau} = 0,1 \cdot m \cdot g$ και είναι ομόρροπη της $\vec{T}$.

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 8



Απάντηση

Στο κιβώτιο ασκούνται οι εξής δυνάμεις :

το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την επιφάνεια, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma}$.

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$, ώστε η $\vec{B}_x$ να είναι παράλληλη στην επιφάνεια.

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$B_x = B\eta\mu\varphi \Rightarrow B_x = 0,6 B. \quad (1)$$

$$T = \frac{B}{2} = 0,5 B. \quad (2)$$

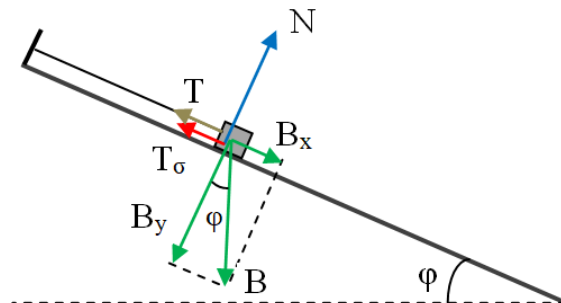
$$(1), (2) \Rightarrow B_x > T.$$

Για να ισορροπεί το σώμα πρέπει η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma}$ να έχει φορά προς τα πάνω.

Στον άξονα x το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow B_x - T - T_{\sigma} = 0 \Leftrightarrow T_{\sigma} = B_x - T \xrightarrow{(1), (2)} T_{\sigma} = 0,6 B - 0,5 B \Rightarrow$$

$$T_{\sigma} = 0,1 B = 0,1 mg.$$



74. (13784, 2.1) Ένα κιβώτιο με μάζα m ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

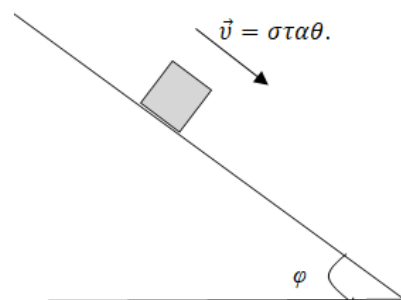
Για τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και κεκλιμένου επιπέδου μ ισχύει:

- α) $\mu = \varepsilon\varphi\varphi$, β) $\mu = \frac{1}{\varepsilon\varphi\varphi}$, γ) ότι δεν εξαρτάται από τη γωνία φ .

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Σχεδιάζω το βάρος $\vec{B}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$ (παράλληλη στην επιφάνεια) και $\vec{B}_y$ (κάθετη στην επιφάνεια).

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$B_x = B \sin \varphi \Rightarrow B_x = mg \sin \varphi \quad (1)$$

$$B_y = B \cos \varphi \Rightarrow B_y = mg \cos \varphi. \quad (2)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y \xrightarrow{(2)} N = mg \cos \varphi. \quad (3)$$

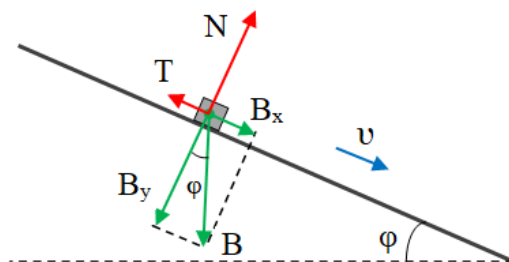
Αφού το σώμα κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ έχει φορά προς τα πάνω.

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(3)} T = \mu mg \cos \varphi. \quad (4)$$

Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow B_x = T \xrightarrow{(1),(4)} mg \sin \varphi = \mu mg \cos \varphi \Leftrightarrow \sin \varphi = \mu \cos \varphi \Leftrightarrow \mu = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi.$$



75. (13785, 2.1) Ένα κιβώτιο με μάζα m κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\frac{g}{5}$ (όπου g το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας) σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση. Δίνεται $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

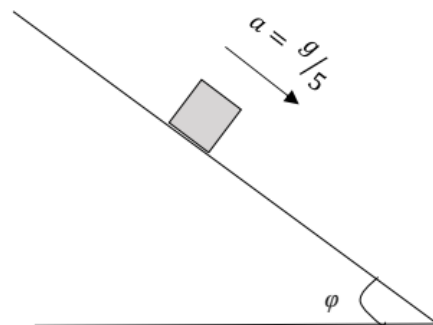
Για τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και κεκλιμένου επιπέδου μ ισχύει :

$\alpha) \mu = \frac{3}{4}$, $\beta) \mu = \frac{1}{2}$, $\gamma) \mu = \frac{1}{3}$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Σχεδιάζω το βάρος $\vec{B}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και την τριβή $\vec{T}$.

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$ (παράλληλη στην επιφάνεια) και $\vec{B}_y$ (κάθετη στην επιφάνεια).

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$B_x = m g \eta\mu\varphi \Rightarrow B_x = 0,6 m g. \quad (1)$$

$$B_y = m g \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow B_y = 0,8 m g. \quad (2)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y \Leftrightarrow N = 0,8 m g. \quad (3)$$

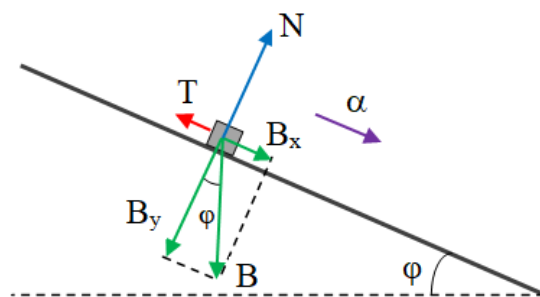
Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(3)} T = 0,8 \mu m g. \quad (4)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m a \Leftrightarrow B_x - T = m a \xrightarrow{(1),(4)} 0,6 m g - 0,8 \mu m g = m a \xrightarrow{\alpha = 0,2 g}$$

$$0,6 g - 0,8 \mu g = 0,2 g \Leftrightarrow 0,6 - 0,2 = 0,8 \mu \Leftrightarrow 0,4 = 0,8 \mu \Leftrightarrow \mu = 0,5.$$



76. (13785, 2.2) Για τις ανάγκες μίας εργαστηριακής άσκησης χρησιμοποιείται η πειραματική διάταξη του σχήματος. Το ομογενές σώμα Σ τίθεται επαναληπτικά σε κίνηση πάνω σε οριζόντιο πάγκο εργασίας, δεχόμενο κάθε φορά κατάλληλη σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, ώστε να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Σε κάθε δοκιμή προστίθενται στο Σ βαρίδια, με αποτέλεσμα η μάζα του να μεταβάλλεται. Πριν από κάθε δοκιμή το Σ ζυγίζεται και στη συνέχεια μετριέται, με κατάλληλο αισθητήρα δύναμης, η σταθερή δύναμη $\vec{F}$ που εξασφαλίζει την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων απεικονίζονται στο πίνακα τιμών με βάση τις οποίες κατασκευάστηκε η γραφική παράσταση της δύναμης $\vec{F}$ ως συνάρτηση της μάζας του Σ .

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν σε όλες τις δοκιμές ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ Σ και πάγκου εργασίας είναι $\mu = 0,5$, η πειραματική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι ίση με:

α) $g = 9,8 \text{ m/s}^2$,

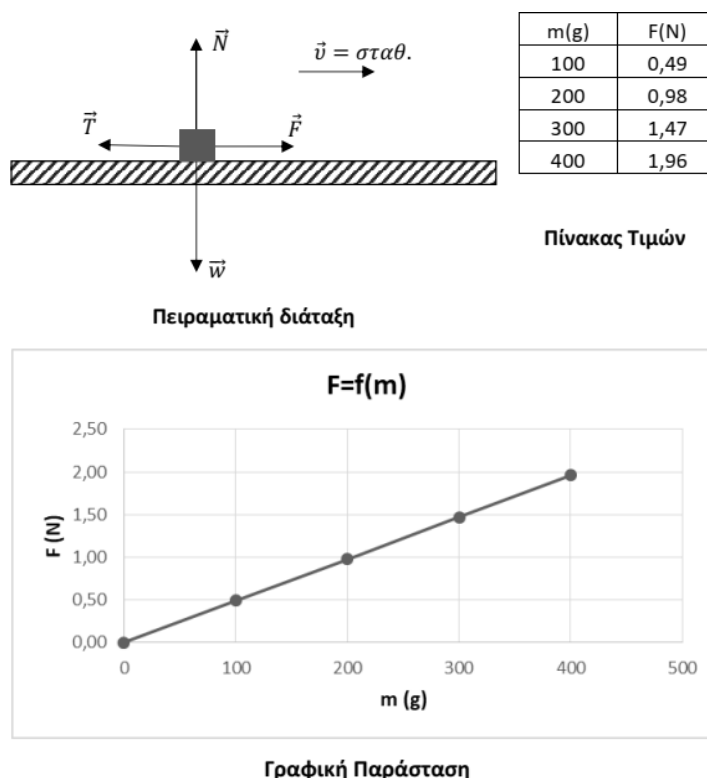
β) $g = 9,6 \text{ m/s}^2$,

γ) $g = 9,5 \text{ m/s}^2$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9



Γραφική Παράσταση

Απάντηση

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα στον άξονα x ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F = T. \quad (1)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg. \quad (2)$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

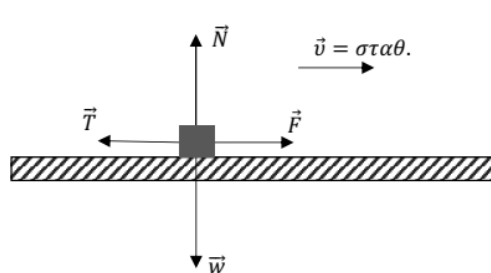
$$T = \mu N \xrightarrow{(2)} T = \mu mg. \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow F = \mu mg \Leftrightarrow g = \frac{F}{\mu m}. \quad (4)$$

Όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται στην ίδια ευθεία, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε ζευγάρι τιμών (m, F) του πίνακα.

$$\text{Για } m = 0,1 \text{ Kg και } F = 0,49 \text{ N} \xrightarrow{(4)} g = \frac{0,49 \text{ N}}{0,5 \cdot 0,1 \text{ Kg}} \Rightarrow g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

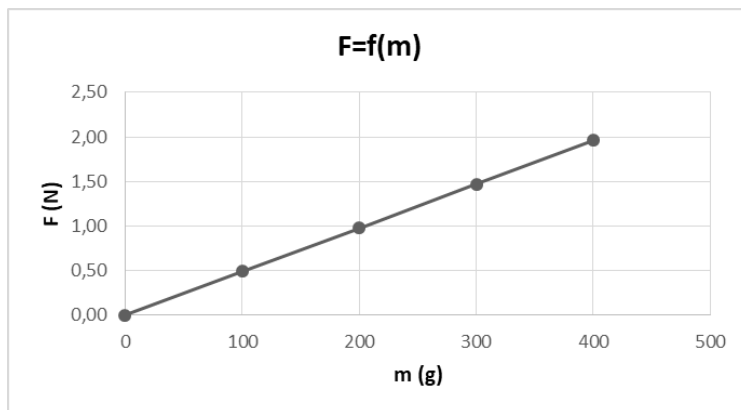
77. (13790, 2.2) Για τις ανάγκες μίας εργαστηριακής άσκησης χρησιμοποιείται η πειραματική διάταξη του σχήματος. Το ομογενές σώμα Σ τίθεται επαναληπτικά σε κίνηση πάνω σε οριζόντιο πάγκο εργασίας, δεχόμενο κάθε φορά κατάλληλη σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, ώστε να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Σε κάθε δοκιμή προστίθενται στο Σ βαρίδια, με αποτέλεσμα η μάζα του να μεταβάλλεται. Πριν από κάθε δοκιμή το Σ ζυγίζεται και στη συνέχεια μετριέται, με κατάλληλο αισθητήρα δύναμης, η σταθερή δύναμη $\vec{F}$ που εξασφαλίζει την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων απεικονίζονται στο πίνακα τιμών με βάση τις



m(g)	F(N)
100	0,49
200	0,98
300	1,47
400	1,96

Πίνακας Τιμών

Πειραματική διάταξη



οποίες κατασκευάστηκε η γραφική παράσταση της δύναμης $\vec{F}$ ως συνάρτηση της μάζας του Σ. Δίνεται η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας ίση με $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν σε όλες τις δοκιμές ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ Σ και πάγκου εργασίας είναι ίδιος, η τιμή του είναι ίση με :

- α) 0,5 , β) 0,05 , γ) Δεν επαρκούν τα δεδομένα για να την υπολογίσουμε.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα στον άξονα x ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F = T. \quad (1)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg. \quad (2)$$

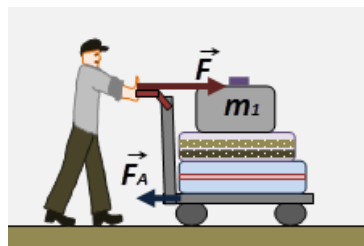
$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T = \mu N \xrightarrow{(2)} T = \mu mg. \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow F = \mu mg \Leftrightarrow \mu = \frac{F}{mg}. \quad (4)$$

Όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται στην ίδια ευθεία, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε ζευγάρι τιμών (m, F) του πίνακα.

$$\text{Για } m = 0,1 \text{ Kg και } F = 0,49 \text{ N} \xrightarrow{(4)} \mu = \frac{0,49 \text{ N}}{0,1 \text{ Kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{0,49 \text{ N}}{0,98 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,5.$$

78. (14209, 2.1) Ένας άνθρωπος μεταφέρει τις αποσκευές του με ένα καρότσι μεταφοράς, σπρώχνοντάς το έτσι, ώστε να κινείται ευθύγραμμα πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, όπως στην εικόνα. Η συνολική μάζα του καροτσιού και των αποσκευών είναι M , ενώ η αποσκευή που βρίσκεται πάνω από όλες τις άλλες, έχει μάζα m_1 και ισχύει η σχέση $M = 4,2 \cdot m_1$. Ο άνθρωπος ασκεί σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και το καρότσι δέχεται στην κίνησή του σταθερή οριζόντια αντίσταση $\vec{F}_A$, για τα μέτρα των οποίων ισχύει η σχέση $F_A = 0,3 \cdot F$.



Αν οι αποσκευές κινούνται έτσι ώστε καμιά να μην ολισθαίνει πάνω στην άλλη, τότε η τριβή $\vec{T}_1$, την οποία δέχεται η αποσκευή μάζας m_1 , η οποία βρίσκεται πάνω από όλες τις άλλες, έχει μέτρο:

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

- i. $T_1 = F$ ii. $T_1 = 0,7 \cdot F$ iii. $T_1 = \frac{F}{6}$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Τα σώματα κινούνται προς τα δεξιά με την ίδια επιτάχυνση $\vec{\alpha}$.

Η πάνω αποσκευή μάζας m_1 δέχεται (από τη μεσαία αποσκευή) στατική τριβή $\vec{T}_1$ με φορά προς τα δεξιά, η οποία της προκαλεί επιτάχυνση $\vec{\alpha}$.

Σύμφωνα με το αξίωμα δράσης – αντίδρασης, η πάνω αποσκευή ασκεί στη μεσαία αντίθετη δύναμη $\vec{T}_1'$ ($T_1' = T_1$).

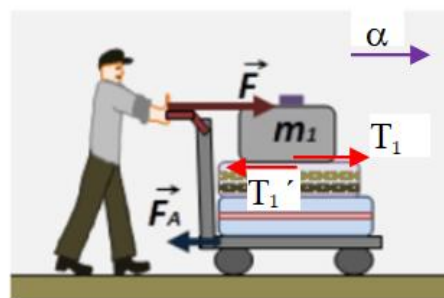
Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x για το σύστημα καρότσι – αποσκευές :

$$\Sigma F_x = M\alpha \Leftrightarrow F + T_1 - T_1' - F_A = M\alpha \xrightarrow{T_1' = T_1} F - F_A = M\alpha \Rightarrow F - 0,3F = M\alpha \Leftrightarrow 0,7F = M\alpha$$

$$\xrightarrow{M = 4,2m_1} \alpha = \frac{0,7F}{4,2m_1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{F}{6m_1}. \quad (1)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x για την πάνω αποσκευή μάζας m_1 :

$$\Sigma F_x = m_1\alpha \Leftrightarrow T_1 = m_1\alpha \xrightarrow{(1)} T_1 = m_1 \cdot \frac{F}{6m_1} \Rightarrow T_1 = \frac{F}{6}.$$



79. (14834, 2.2) Κιβώτιο μάζας 10Kg βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο. Με τη βοήθεια δυο σκοινιών ασκούνται σε αυτό δύο δυνάμεις, όπως δείχνονται στη διπλανή εικόνα, με μέτρα $F_1 = 25\text{N}$ και $F_2 = 5\text{N}$.



A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Αν το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα και ομαλά και $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, τότε ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου είναι:

(α) $\mu = 0,1$

(β) $\mu = 0,2$

(γ) $\mu = 0,3$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού $F_1 > F_2$, το σώμα κινείται προς τα δεξιά, άρα η τριβή έχει φορά προς τα αριστερά.

Στον άξονα x το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα ισχύει :

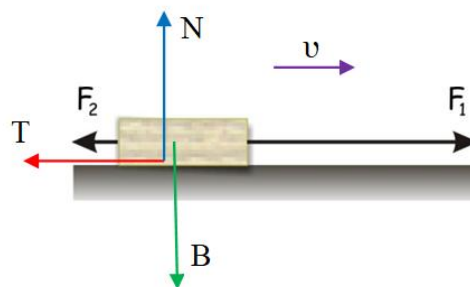
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_1 - F_2 - T = 0 \Leftrightarrow T = F_1 - F_2 \Rightarrow T = 20 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = B = mg \Rightarrow N = 100 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{20 \text{ N}}{100 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,2.$$



Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Απαντήσεις Ερωτήσεων Τράπεζας Θεμάτων

Έργο δύναμης

1. (7972, B1) Κιβώτιο μάζας 500 kg βρίσκεται σε κατάστρωμα караβιού. Γερανός μεταφέρει το κιβώτιο κατακόρυφα κατά 10 m κάτω από την αρχική του θέση και το τοποθετεί σε βαγόνι (διαδρομή I). Στη συνέχεια το βαγόνι κινείται σε ευθύγραμμες οριζόντιες ράγες και μεταφέρει το κιβώτιο σε απόσταση 100 m από τη θέση που το τοποθέτησε ο γερανός (διαδρομή II).

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν W_1 και W_2 είναι το έργο που παράγεται από το βάρος του κιβωτίου κατά τις διαδρομές (I) και (II) αντίστοιχα, τότε ισχύει :

α) $W_1 = W_2$

β) $W_1 > W_2$

γ) $W_1 < W_2$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κατακόρυφη διαδρομή (I)

Κατά τη διαδρομή I (K→Λ) το βάρος του κιβωτίου έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση, οπότε το έργο του βάρους είναι θετικό :

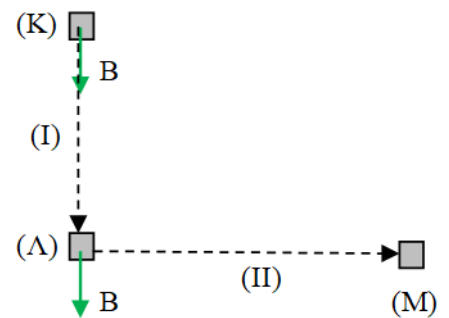
$$W_1 = mg(K\Lambda) > 0. \quad (1)$$

Οριζόντια διαδρομή (II)

Κατά τη διαδρομή II (Λ→M) το βάρος του κιβωτίου είναι κάθετο στη μετατόπιση, οπότε το έργο του βάρους είναι μηδενικό :

$$W_2 = 0. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow W_1 > W_2.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση περιέχει περιττά δεδομένα.

Για την απάντηση δεν χρειάζεται η μάζα του κιβωτίου ούτε οι αποστάσεις που διανύει.

2. (7999, B1) Δύο μεταλλικές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 , ίσης μάζας, βρίσκονται στο ίδιο ύψος πάνω από το έδαφος. Αφήνουμε τη σφαίρα Σ_1 να πέσει ελεύθερα ενώ ταυτόχρονα δίνουμε κατακόρυφη αρχική ταχύτητα v_0 με φορά προς τα κάτω στη σφαίρα Σ_2 .

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Αν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) είναι σταθερή, τότε:

α) τα έργα που παράγουν τα βάρη των δύο σφαιρών μέχρι να φτάσουν στο έδαφος είναι ίσα.

β) οι δύο σφαίρες φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος.

γ) οι δύο σφαίρες όταν φτάνουν στο έδαφος έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Υπολογίζω το έργο του βάρους κάθε σφαίρας μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Σφαίρα Σ_1

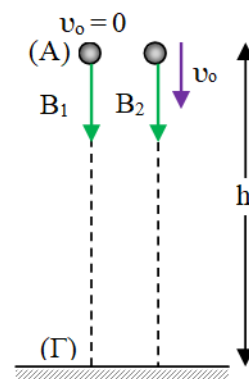
$$W_{B_1} = m_1 gh. \quad (1)$$

Σφαίρα Σ_2

$$W_{B_2} = m_2 gh. \quad (2)$$

$$\text{Αφού } m_1 = m_2 \xrightarrow{(1),(2)} W_{B_1} = W_{B_2}.$$

Σωστή απάντηση : α).



Εναλλακτική απάντηση

Το έργο του βάρους και η βαρυτική δυναμική ενέργεια συνδέονται με τη σχέση :

$$W_B = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}}. \quad (1)$$

Αν ορίσουμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος, τότε $U_{\text{τελ}} = 0$, οπότε η σχέση (1) γράφεται : $W_B = U_{\text{αρχ}} = mgh$.

Αφού οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες και ξεκινούν από το ίδιο ύψος h , τα έργα των βαρών τους μέχρι να φτάσουν στο έδαφος είναι ίσα :

$$W_{B_1} = W_{B_2} = mgh.$$

3. (8011, B2) Ένας κουβάς με νερό, βάρους 50 N βρίσκεται μέσα σε ανελκυστήρα στο ισόγειο μίας πολυκατοικίας. Κάποια στιγμή ο ανελκυστήρας ανεβαίνει από το ισόγειο στον 1^ο όροφο με αποτέλεσμα να μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά 3 m και στην συνέχεια επιστρέφει πάλι στο ισόγειο.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Το έργο του βάρους του κουβά, για τη συνολική μετατόπιση, είναι ίσο με:

α) 150 J

β) 300 J

γ) 0 J

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

1ος τρόπος

Το βάρος είναι διατηρητική δύναμη, δηλαδή το έργο του βάρους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά μόνο από την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης.

Αφού ο κουβάς επιστρέφει στο έδαφος, το συνολικό έργο του βάρους του είναι μηδενικό : $W_{B(ολ)} = 0$.

2ος τρόπος

Κατά την άνοδο : $W_{B(α)} = - mgh$. (1)

Κατά την κάθοδο : $W_{B(κ)} = + mgh$. (2)

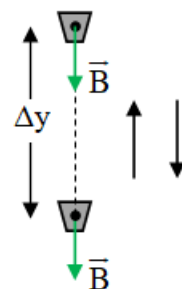
$$W_{B(ολ)} = W_{B(α)} + W_{B(κ)} \xrightarrow{(1),(2)} W_{B(ολ)} = -mgh + mgh \Rightarrow W_{B(ολ)} = 0.$$

3ος τρόπος

Το έργο του βάρους και η βαρυτική δυναμική ενέργεια συνδέονται με τη σχέση :

$$W_B = U_{αρχ} - U_{τελ} . \quad (1)$$

Όταν ο κουβάς επιστρέφει στο έδαφος : $U_{τελ} = U_{αρχ} \xrightarrow{(1)} W_B = 0.$



4. (8012, B1) Ένας μαθητής πετά ένα κέρμα κατακόρυφα προς τα πάνω, το οποίο σε εύλογο χρόνο επιστρέφει στα χέρια του.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Το πρόσημο του έργου του βάρους είναι:

α) θετικό κατά την άνοδο του κέρματος και αρνητικό κατά την κάθοδο.

β) αρνητικό κατά την άνοδο του κέρματος και θετικό κατά την κάθοδο.

γ) θετικό κατά την άνοδο του κέρματος και θετικό κατά την κάθοδο.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

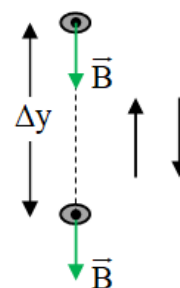
Μονάδες 8

Απάντηση

Κατά την άνοδο το βάρος έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση, άρα το έργο του βάρους είναι αρνητικό.

Κατά την κάθοδο το βάρος έχει την ίδια φορά με τη μετατόπιση, άρα το έργο του βάρους είναι θετικό.

Σωστή απάντηση : β).



5. (8024, B1) Δυο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα με $m_2 = 2m_1$, αφήνονται ταυτόχρονα να πέσουν από δυο σημεία που βρίσκονται σε ύψη h_1 και h_2 αντίστοιχα με $h_1 = 2h_2$. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει σταθερή τιμή ίση με g .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν W_1 και W_2 είναι τα έργα των βαρών της Σ_1 και της Σ_2 από το σημείο που αφέθηκαν και μέχρι να φτάσουν στο έδαφος, τότε ισχύει:

(α) $W_1 = 2W_2$

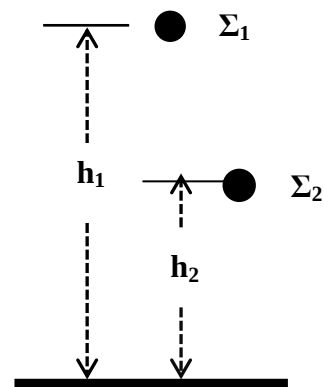
(β) $W_1 = W_2$

(γ) $W_2 = 2W_1$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Στη διάρκεια της κίνησης το βάρος της σφαίρας έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπισή της.

Υπολογίζω το έργο του βάρους κάθε σφαίρας μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

$$\underline{\Sigma}_1: W_1 = m_1 g h_1. \quad (1)$$

$$\underline{\Sigma}_2: W_2 = m_2 g h_2 = (2m_1) g \frac{h_1}{2} = m_1 g h_1. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow W_1 = W_2.$$

6. (8028, B1) Μια σφαίρα μάζας m βάλλεται από την επιφάνεια του εδάφους κατακόρυφα προς τα πάνω. Η σφαίρα φτάνει στο μέγιστο ύψος h και επιστρέφει στο έδαφος.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Αν γνωρίζετε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή και η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα τότε το έργο του βάρους της σφαίρας κατά τη συνολική κίνησή της είναι ίσο με:

- α) $m \cdot g \cdot h$ β) 0 γ) $2 \cdot m \cdot g \cdot h$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

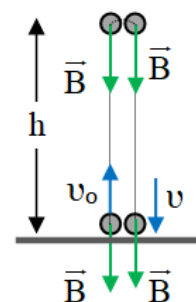
Μονάδες 8

Απάντηση

1ος τρόπος

Το βάρος είναι διατηρητική δύναμη, δηλαδή το έργο του βάρους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά μόνο από την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης.

Αφού η σφαίρα επιστρέφει στο έδαφος, το συνολικό έργο του βάρους της είναι μηδενικό : $W_{B(ολ)} = 0$.



2ος τρόπος

Κατά την άνοδο : $W_{B(α)} = - mgh$. (1)

Κατά την κάθοδο : $W_{B(κ)} = + mgh$. (2)

$$W_{B(ολ)} = W_{B(α)} + W_{B(κ)} \xrightarrow{(1),(2)} W_{B(ολ)} = -mgh + mgh \Rightarrow W_{B(ολ)} = 0.$$

3ος τρόπος

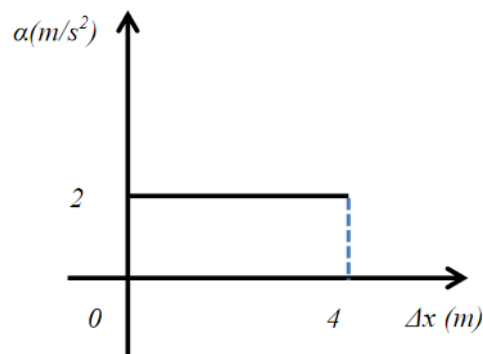
Το έργο του βάρους και η βαρυτική δυναμική ενέργεια συνδέονται με τη σχέση :

$$W_B = U_{αρχ} - U_{τελ} . \quad (1)$$

Όταν η σφαίρα επιστρέφει στο έδαφος : $U_{τελ} = U_{αρχ} \xrightarrow{(1)} W_B = 0$.

7. (8038, B2) Ένα κιβώτιο μάζας 2 kg είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε λείο **ευθύγραμμο** και οριζόντιο **δάπεδο**. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζει να ασκείται στο κιβώτιο οριζόντια και σταθερή δύναμη $\vec{F}$.

Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση του μέτρου της επιτάχυνσης του κιβωτίου σε συνάρτηση με την μετατόπιση του.



A) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

α) Η δύναμη που ασκείται στο κιβώτιο έχει μέτρο, $F = 2 \text{ N}$.

β) η κίνηση του κιβωτίου είναι ευθύγραμμη ομαλή.

γ) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ όταν το κιβώτιο έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 4 \text{ m}$ είναι ίσο με 16 J.

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η επιτάχυνση έχει σταθερό μέτρο : $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

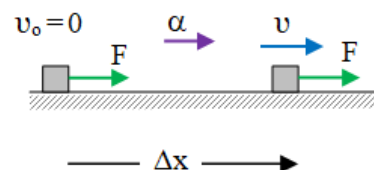
Αφού το δάπεδο είναι λείο, ισχύει :

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow F = ma \Rightarrow F = 2 \cdot 2 \text{ N} = 4 \text{ N}. \quad [\alpha) : \text{Λάθος}]$$

Το κιβώτιο είναι αρχικά ακίνητο και αποκτά σταθερή επιτάχυνση, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, $[\beta) : \text{Λάθος}]$

Το έργο της σταθερής δύναμης $\vec{F}$ για μετατόπιση $\Delta x = 4 \text{ m}$ είναι :

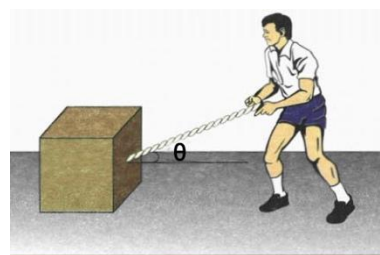
$$W = F(\Delta x) = (4 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow W = 16 \text{ J}. \quad [\gamma) : \text{Σωστό}]$$



Σχόλια

- 1) Η έκφραση «ευθύγραμμο δάπεδο» δεν έχει νόημα. Ο συγγραφέας εννοεί «επίπεδη επιφάνεια».
- 2) Το διάγραμμα έπρεπε να δείχνει πως μεταβάλλεται το μέτρο της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τη θέση x του κιβωτίου και όχι με τη μετατόπιση Δx .

8. (8044, B1) Εργάτης δένει με αβαρές σκοινί ένα κιβώτιο και το σύρει σε οριζόντιο δάπεδο, όπως παριστάνεται στη διπλανή εικόνα. Το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η επίδραση του αέρα παραλείπεται.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Αν συμβολίσουμε με W_F το έργο της δύναμης που ασκεί ο εργάτης στο κιβώτιο, και W_T το έργο της δύναμης της τριβής ολίσθησης τότε για κάθε μετατόπιση του κιβωτίου θα ισχύει:

α) $W_F > W_T$ **β)** $W_T = -W_F$ **γ)** $W_F < W_T$

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

1) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_F = F(\Delta x) \cos \theta \Rightarrow W_F = F_x(\Delta x). \quad (1)$$

Επομένως : $W_F > 0$.

Το έργο της τριβής ολίσθησης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_T = T(\Delta x) \cos 180^\circ \Rightarrow W_T = -T(\Delta x). \quad (2)$$

Επομένως : $W_T < 0$.

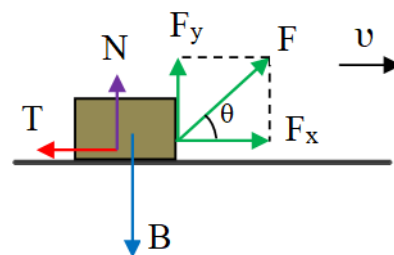
Αφού $W_F > 0$ και $W_T < 0$, άρα : **$W_F > W_T$** . **[α) : Σωστή]**

2) Το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα ισχύει : $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_x = T$. (3)

(1), (3) $\Rightarrow W_F = T(\Delta x) \xrightarrow{(2)} W_T = -W_F$. **[β) : Σωστή]**

εναλλακτικός τρόπος για το 2)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ : $\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_F + W_T = 0 \Leftrightarrow W_T = -W_F$.

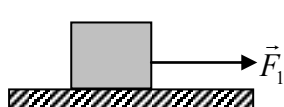


Σχόλιο : Υπάρχουν **δύο σωστές απαντήσεις !**

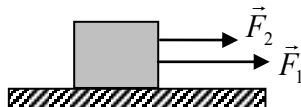
9. (8045, B2) Θέλουμε να διερευνήσουμε πότε μια δύναμη παράγει μεγαλύτερο έργο σε ένα χρονικό διάστημα Δt , όταν ασκείται μόνη της σε ένα σώμα ή όταν ασκείται ταυτόχρονα με μια άλλη δύναμη. Για το λόγο αυτό, θα διερευνήσουμε δύο περιπτώσεις άσκησης δυνάμεων σε ένα κιβώτιο που είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο.

Περίπτωση I: Την στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ αρχίζει να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$.

Περίπτωση II: Την στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ αρχίζει να ασκείται η δύναμη $\vec{F}_1$ (που ασκείται και στην περίπτωση I) ταυτόχρονα με μια άλλη ομόρροπη σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_2$.



Περίπτωση I



Περίπτωση II

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Ονομάζουμε $W_{F1(I)}$ το έργο που παράγει η $\vec{F}_1$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t_0$ στην περίπτωση I και $W_{F1(II)}$ το έργο που παράγει η $\vec{F}_1$ ίδιο χρονικό διάστημα Δt στην περίπτωση II. Θα ισχύει

(α) $W_{F1(I)} < W_{F1(II)}$

(β) $W_{F1(I)} > W_{F1(II)}$

(γ) $W_{F1(I)} = W_{F1(II)}$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \text{σταθερή.} \quad (1)$$

Αφού το σώμα είναι αρχικά ακίνητο, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της μετατόπισης μετά από χρονική διάρκεια Δt υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \xrightarrow{(1)} \Delta x = \frac{1}{2} \left(\frac{\Sigma F}{m} \right) (\Delta t)^2. \quad (2)$$

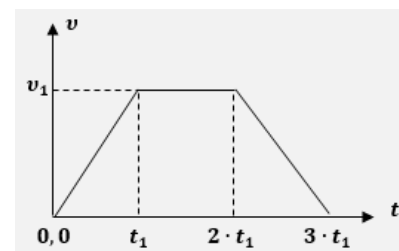
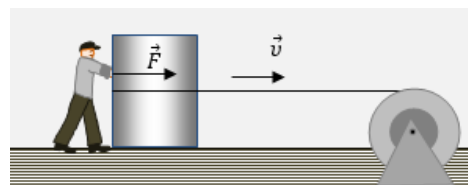
Το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$W_{F1} = F_1 (\Delta x) \xrightarrow{(2)} W_{F1} = \frac{1}{2} F_1 \left(\frac{\Sigma F}{m} \right) (\Delta t)^2. \quad (3)$$

Στην περίπτωση I η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο : $\Sigma F_I = F_1$, ενώ στην περίπτωση II η συνισταμένη έχει μέτρο $\Sigma F_{II} = F_1 + F_2$.

$$\text{Αφού } \Sigma F_{II} > \Sigma F_I \xrightarrow{(3)} W_{F1(II)} > W_{F1(I)}.$$

10. (13107, 2.2) Ένας μεγάλος μαρμάρινος όγκος πρέπει να μετακινηθεί πάνω στο ακίνητο οριζόντιο δάπεδο, σε ένα εργοστάσιο μαρμάρων. Για να γίνει αυτό, χρησιμοποιείται ένας μηχανισμός που περιστρέφεται και τραβάει το οριζόντιο σχοινί με το οποίο έχουν δέσει το μαρμάρινο αυτό σώμα. Ταυτόχρονα, ένας εργάτης σπρώχνει το σώμα, ασκώντας σε αυτό συνεχώς μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, όπως στο σχήμα.



Στο διπλανό διάγραμμα αποδίδεται το μέτρο της ταχύτητας του σώματος από τη στιγμή που άρχισε να κινείται, μέχρι κάποια στιγμή που ακινητοποιείται ξανά.

A) Να επιλέξετε τη σωστή σχέση, η οποία ισχύει για το έργο της δύναμης του ανθρώπου (W_F), σε αυτή του την προσπάθεια :

- i. $W_F = 2 \cdot F \cdot v_1 \cdot t_1$ ii. $W_F = 3 \cdot F \cdot v_1 \cdot t_1$ iii. $W_F = 4 \cdot F \cdot v_1 \cdot t_1$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραpezίου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$\Delta x = E_{\text{τραπ.}} = \frac{(3t_1 + t_1) \cdot v_1}{2} \Rightarrow \Delta x = 2t_1 v_1. \quad (1)$$

Το έργο της σταθερής οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί ο άνθρωπος υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_F = F(\Delta x) \xrightarrow{(1)} W_F = 2Fv_1 t_1.$$

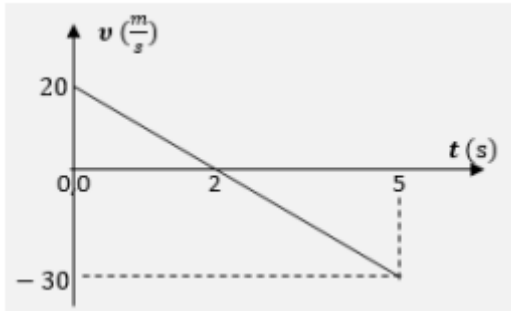
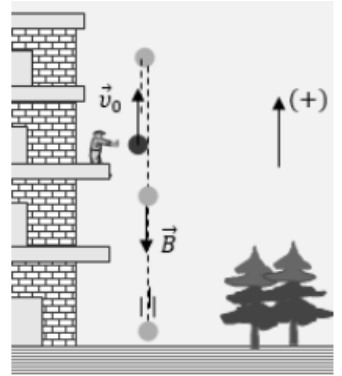
11. (13348, B2) Από το μπαλκόνι του δευτέρου ορόφου ενός κτιρίου, με τη βοήθεια κάποιου μηχανισμού, εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω μια μικρή μπαλίτσα. Η μπαλίτσα κινείται ελεύθερα ανεβαίνοντας μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά της και αμέσως μετά επιστρέφει κινούμενη κατακόρυφα προς το έδαφος, όπως στο διπλανό σχήμα.

Η εκτόξευση της μπαλίτσας γίνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η αρχική της

ταχύτητα έχει μέτρο $v_0 = 20 \frac{m}{s}$ και το βάρος της $B = 2 \text{ N}$.

Με θετική την προς τα πάνω φορά, η διπλανή γραφική παράσταση αποδίδει τις τιμές ταχύτητας της μπαλίτσας, σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη στιγμή της εκτόξευσής της, μέχρι να κτυπήσει στο έδαφος.

Το έργο του βάρους της μπαλίτσας από τη στιγμή της εκτόξευσής της, μέχρι να καταλήξει στο έδαφος είναι:



A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

α) $W_B = 50 \text{ J}$

β) $W_B = -50 \text{ J}$

γ) $W_B = 130 \text{ J}$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

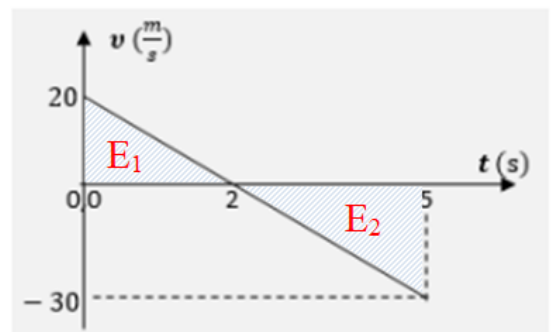
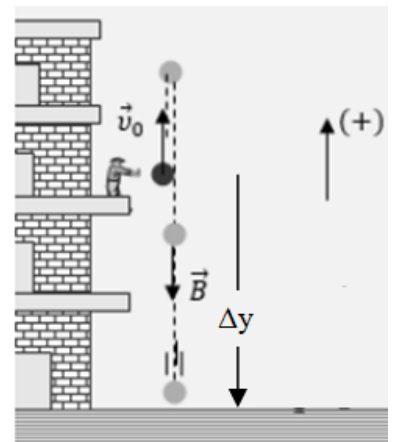
Η τιμή της μετατόπισης Δy της μπάλας από το σημείο εκτόξευσης μέχρι να φτάσει στο έδαφος, είναι ίση (αριθμητικά) με το αλγεβρικό άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου :

$$\Delta y = E_1 + E_2 = \frac{20 \cdot 2}{2} \text{ m} + \frac{(-30) \cdot 3}{2} \text{ m} = 20 \text{ m} - 45 \text{ m} \Rightarrow \Delta y = -25 \text{ m}.$$

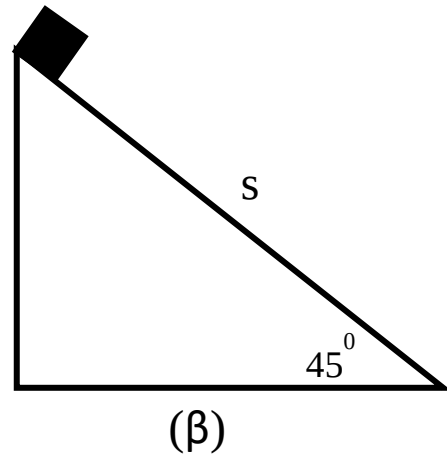
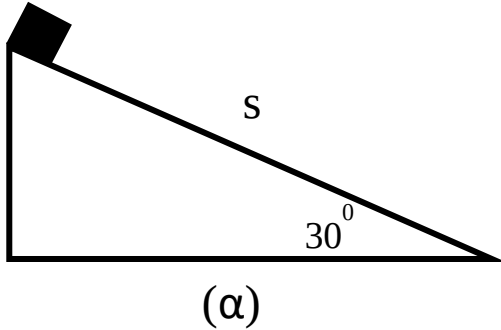
Αφού η τιμή της μετατόπισης Δy είναι αρνητική, το διάνυσμα της μετατόπισης $\vec{\Delta y}$ έχει φορά προς τα κάτω, επομένως έχει την ίδια φορά με το βάρος της μπάλας.

Το έργο του βάρους κατά τη μετατόπιση αυτή είναι :

$$W_B = B \cdot |\Delta y| \cdot \cos 0^\circ = (2 \text{ N}) \cdot (25 \text{ m}) \Rightarrow W_B = 50 \text{ J}.$$



12. (13509, 2.2) Το κιβώτιο μάζας m ολισθαίνει κατά μήκος των κεκλιμένων επιπέδων (α) και (β), διανύοντας σε καθένα από αυτά μήκος S . Το κιβώτιο παρουσιάζει με τα δύο κεκλιμένα επίπεδα τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης μ .



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για τις απόλυτες τιμές των έργων της τριβής ολίσθησης στις περιπτώσεις (α) και (β) ισχύει:

- α. $|W_{T(\alpha)}| > |W_{T(\beta)}|$ β. $|W_{T(\alpha)}| = |W_{T(\beta)}|$ γ. $|W_{T(\alpha)}| < |W_{T(\beta)}|$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

$$\text{Δίνονται: } \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \eta\mu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια της κίνησης ασκούνται στο σώμα τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (με φορά προς τα πάνω).

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$.

Για τα μέτρα τους ισχύουν οι σχέσεις :

$$B_x = mg\eta\mu\varphi, \quad (1)$$

$$B_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (2)$$

Στον άξονα y εφαρμόζω τη συνθήκη ισορροπίας :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y \xrightarrow{(2)} N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (3)$$

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης :

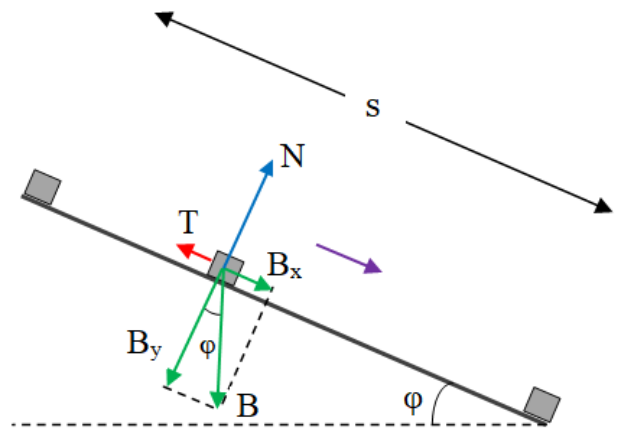
$$T = \mu N \xrightarrow{(3)} T = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (4)$$

Όταν το σώμα έχει μετακινηθεί κατά s , το έργο της τριβής ολίσθησης είναι :

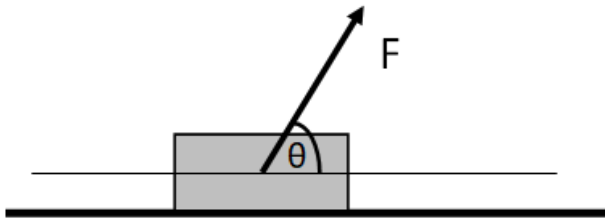
$$W_T = -T s \xrightarrow{(4)} W_T = -\mu mg s \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow |W_T| = \mu mg s \sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι η απόλυτη τιμή του έργου της τριβής είναι ανάλογη με το $\sigma\upsilon\nu\varphi$.

$$\text{Αφού } \sigma\upsilon\nu 30^\circ > \sigma\upsilon\nu 45^\circ \Rightarrow |W_{T(\alpha)}| > |W_{T(\beta)}|.$$



13. (13513, 2.2) Το σώμα του διπλανού σχήματος ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα επάνω στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ . Το έργο της τριβής ολίσθησης για μετατόπιση του σώματος κατά Δx είναι:



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

α. $W_T = -\mu mg \Delta x$

β. $W_T = \mu(mg - F\eta\mu\theta)\Delta x$

γ. $W_T = -F\sigma\eta\nu\theta\Delta x$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σχεδιάζω και τις υπόλοιπες δυνάμεις (βάρος $\vec{B}$, κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και τριβή ολίσθησης $\vec{T}$).

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$.

Για τα μέτρα τους ισχύουν οι σχέσεις :

$$F_x = F\sigma\eta\nu\theta, \quad (1)$$

$$F_y = F\eta\mu\theta. \quad (2)$$

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, στον άξονα κίνησης x ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_x - T = 0 \xrightarrow{(1)} T = F\sigma\eta\nu\theta. \quad (3)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

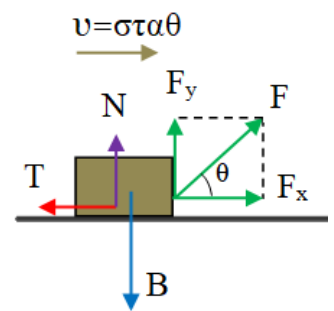
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N + F_y - B = 0 \Leftrightarrow N = mg - F_y \xrightarrow{(2)} N = mg - F\eta\mu\theta. \quad (4)$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης για μετατόπιση Δx υπολογίζεται από τη σχέση : $W_T = -T(\Delta x). \quad (5)$

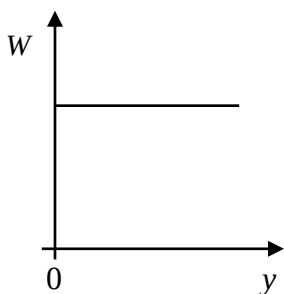
$$(3), (5) \Rightarrow W_T = -F\sigma\eta\nu\theta(\Delta x). \quad (\gamma : \text{Σωστή})$$

Σύμφωνα με τον νόμο της τριβής :

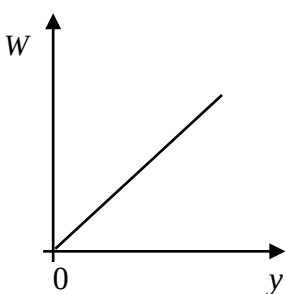
$$T = \mu N \xrightarrow{(5)} W_T = -\mu N(\Delta x) \xrightarrow{(4)} W_T = -\mu(mg - F\eta\mu\theta) \cdot \Delta x. \quad (\alpha, \beta : \text{Λάθος})$$



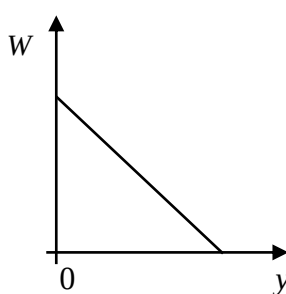
14. (13547, 2.1) Μικρή σφαίρα αφήνεται να πέσει από μικρό ύψος (H) από το έδαφος, εκτελώντας ελεύθερη πτώση.



I



II



III

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η γραφική παράσταση του έργου του βάρους της σφαίρας σε συνάρτηση με το ύψος (y) από το έδαφος δίδεται από το διάγραμμα:

(α) I

(β) II

(γ) III

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

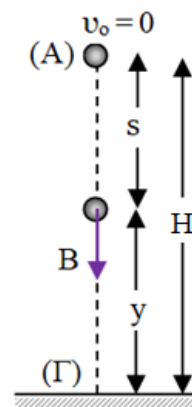
Όταν το σώμα έχει διανύσει απόσταση s από την αρχική θέση, η απόστασή του y από το έδαφος είναι $y = H - s$, άρα : $s = H - y$. (1)

Το έργο του βάρους κατά την κάθοδο είναι :

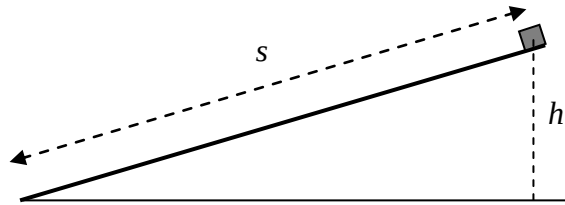
$$W_B = B \cdot s \cdot \sin 0^\circ = mgs \xrightarrow{(1)} W_B = mg(H - y) \Leftrightarrow \boxed{W_B = mgH - mgy}. \quad (2)$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (2) είναι ευθεία με αρνητική κλίση.

Άρα το σωστό διάγραμμα είναι το III.



15. (13549, 2.1) Μικρό σώμα, μάζας m , αφήνεται να ολισθήσει από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν W είναι το έργο του βάρους του σώματος, ισχύει:

(α) $W = m \cdot g \cdot s$ (β) $W = m \cdot g \cdot h$ (γ) $W = m \cdot g \cdot \sqrt{h^2 + s^2}$

(όπου s το διάστημα που διανύει το σώμα μέχρι να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, h το ύψος από το οποίο αφήνεται το σώμα και g η επιτάχυνση της βαρύτητας)

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

1ος τρόπος

Αναλύω το βάρος σε κάθετες συνιστώσες $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$, ώστε η $\vec{B}_x$ να είναι παράλληλη στην επιφάνεια.

Η συνιστώσα $\vec{B}_y$ δεν παράγει έργο γιατί είναι κάθετη στη μετατόπιση.

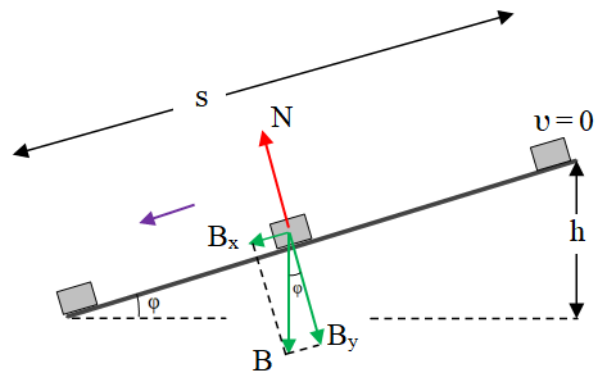
Ισχύει η σχέση: $B_x = mg \sin \phi$. (1)

Επομένως:

$$W_B = W_{B_x} = B_x \cdot s \xrightarrow{(1)} W_B = mgs \sin \phi. \quad (2)$$

Όμως: $s \sin \phi = h$. (3)

$$(2), (3) \Rightarrow W_B = mgh.$$



2ος τρόπος

Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο.

Οι τιμές της δυναμικής ενέργειας του σώματος είναι:

$$U_{\text{αρχ}} = mgh, \quad (1)$$

$$U_{\text{τελ}} = 0. \quad (2)$$

Ισχύει η σχέση:

$$W_B = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} \xrightarrow{(1), (2)} W_B = mgh.$$

16. (13550, 2.2) Δύο κιβώτια ίσων μαζών αφήνονται να ολισθήσουν από την κορυφή δύο λείων κεκλιμένων επιπέδων διαφορετικής κλίσης, αλλά από το ίδιο ύψος h από το έδαφος. Ένα τρίτο ίδιο κιβώτιο αφήνεται από ύψος h από το έδαφος και εκτελεί ελεύθερη πτώση.



A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν W_A , W_B και W_Γ τα έργα του βάρους στις τρεις περιπτώσεις, τότε:

(α) $W_A = W_B > W_\Gamma$

(β) $W_A = W_B < W_\Gamma$

(γ) $W_A = W_B = W_\Gamma$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο.

Οι τιμές της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος μάζας m είναι :

$$U_{\text{αρχ}} = mgh, \quad (1)$$

$$U_{\text{τελ}} = 0. \quad (2)$$

Για το έργο του βάρους ισχύει η σχέση :

$$W = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} \xrightarrow{(1), (2)} W_B = mgh.$$

Αφού τα 3 σώματα έχουν ίσες μάζες και αφήνονται από το ίδιο ύψος, άρα : $W_A = W_B = W_\Gamma$.

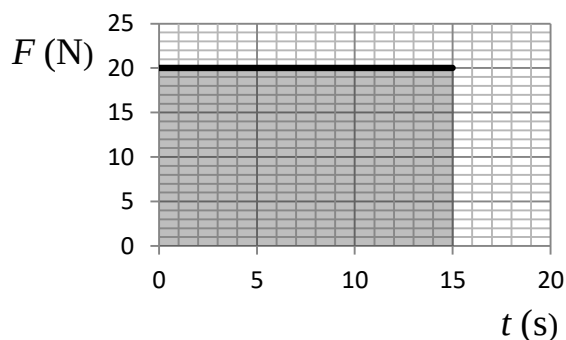
17. (13556, 2.1) Ένα σώμα βρίσκεται ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκείται πάνω του οριζόντια δύναμη, σταθερής κατεύθυνσης. Η αλγεβρική τιμή της δύναμης σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνεται στο διάγραμμα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

(α) Το έργο της δύναμης F είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου παραλληλογράμμου, δηλαδή 300 Joule.

(β) Το χρονικό διάστημα από 0 s έως 15 s ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος είναι σταθερός.

(γ) Για όλο το χρονικό διάστημα από 0 s έως 15 s το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.



Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

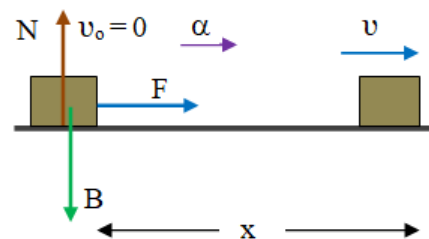
(α) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδό στο διάγραμμα της αλγεβρικής τιμής της δύναμης F σε συνάρτηση με την αλγεβρική τιμή της θέσης x . [Λάθος]

(β) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος είναι ίσος με την επιτάχυνση: $\vec{\alpha} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

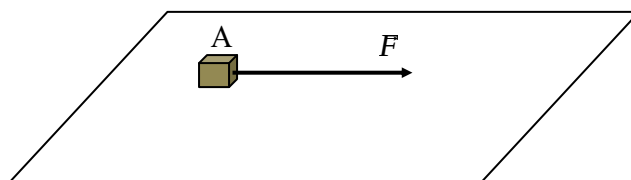
Αφού δεν υπάρχει τριβή, άρα: $\Sigma \vec{F}_x = \vec{F}$.

Κατά το χρονικό διάστημα από 0 s έως 15 s η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $\vec{\alpha} = \frac{\vec{F}}{m}$ και η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι σταθερή. [Σωστό]

(γ) Αφού το σώμα ήταν ακίνητο αρχικά και αποκτά σταθερή επιτάχυνση, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. [Λάθος]



18. (13567, 2.1) Ξύλινος κύβος μάζας 0,5 kg βρίσκεται ακίνητος πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινάει να ασκείται πάνω του οριζόντια σταθερή δύναμη F και ο κύβος ξεκινάει να ολισθαίνει. Δίνεται $g = 10 \frac{m}{s^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.



A. Συμπληρώστε τον πιο κάτω πίνακα:

Μετατόπιση	Χρόνος κίνησης	Επιτάχυνση	Δύναμη F	Έργο δύναμης F	Τελική ταχύτητα
4 m	2 s				

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού δεν υπάρχει τριβή, άρα : $\Sigma \vec{F}_x = \vec{F}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, αφού η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή και η επιτάχυνση $\vec{a}$ είναι σταθερή.

Το σώμα ήταν ακίνητο αρχικά και αποκτά σταθερή επιτάχυνση, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 \Leftrightarrow a = \frac{2(\Delta x)}{t^2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 4 \text{ m}}{2^2 \text{ s}^2} \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$:

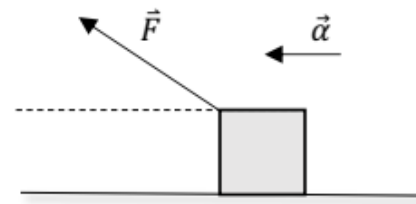
$$F = m a = (0,5 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F = 1 \text{ N}.$$

Το έργο της δύναμης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W = F(\Delta x) = (1 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow W = 4 \text{ J}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου : $v = a t = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

19. (13567, 2.2) Σώμα αμελητέων διαστάσεων μετατοπίζεται κατά Δx πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$, λόγω δύναμης που ασκούμε, κατά τρόπο ώστε ο φορέας της να σχηματίζει γωνία φ με το δάπεδο. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να αντιγράψετε το σχήμα

της εκφώνησης στο τετράδιο σας και να το συμπληρώσετε με το διάνυσμα της τριβής ολίσθησης.

Το έργο της δύναμης της τριβής ολίσθησης που ασκεί το δάπεδο στο σώμα είναι:

- α) Θετικό και η απόλυτη τιμή του μέτρου του είναι $|(F \sin \varphi - ma) \cdot \Delta x|$,
- β) Αρνητικό και η απόλυτη τιμή του μέτρου του είναι $|(F \sin \varphi - ma) \cdot \Delta x|$,
- γ) Αρνητικό και η απόλυτη τιμή του μέτρου του είναι $|(F \eta \mu \varphi - ma) \cdot \Delta x|$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σχεδιάζω και τις υπόλοιπες δυνάμεις (βάρος $\vec{B}$, κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, η οποία έχει αντίθετη φορά από την επιτάχυνση).

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$.

Για τα μέτρα τους ισχύουν οι σχέσεις :

$$F_x = F \sin \varphi, \quad (1)$$

$$F_y = F \eta \mu \varphi. \quad (2)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική τη φορά της επιτάχυνσης) :

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow F_x - T = ma \Leftrightarrow T = F_x - ma \xrightarrow{(1)} T = F \sin \varphi - ma. \quad (3)$$

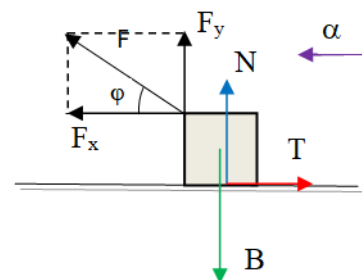
Η τριβή ολίσθησης έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση, άρα το έργο της υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_T = T(\Delta x) \sin 180^\circ = -T(\Delta x). \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow W_T = -(F \sin \varphi - ma) \cdot (\Delta x).$$

Επομένως, το έργο της τριβής ολίσθησης είναι αρνητικό και η απόλυτη τιμή του είναι :

$$|W_T| = |(F \sin \varphi - ma) \cdot (\Delta x)|.$$



20. (13569, 2.1) Το διπλανό διάγραμμα περιγράφει την ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο για σώμα που κινείται ευθύγραμμα.

A. Επιλέξτε την απάντηση που θεωρείτε σωστή, από τις τρεις πιο κάτω επιλογές.

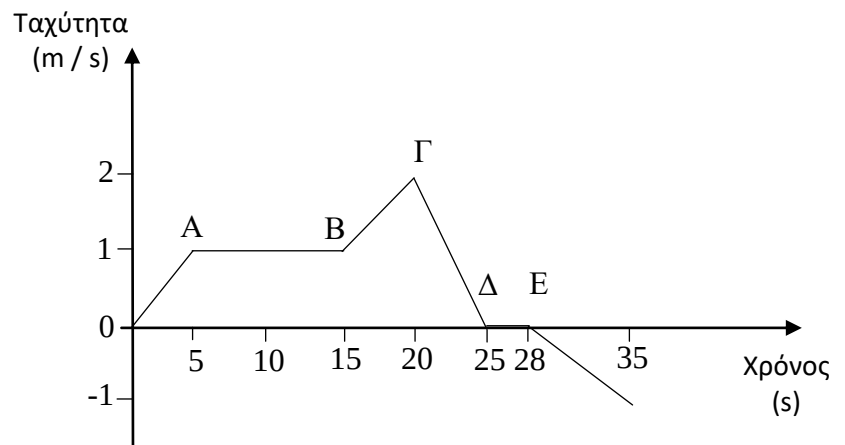
Το έργο της συνολικής δύναμης που ασκείται στο σώμα είναι θετικό:

- α) το χρονικό διάστημα 0 – 15 s
- β) το χρονικό διάστημα 5 s – 15 s
- γ) το χρονικό διάστημα 20 s – 25 s

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

1ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ σε κάθε χρονικό διάστημα : $W_{ολ} = \frac{1}{2} m (v_{τελ}^2 - v_{αρχ}^2)$.

0 s → 15 s

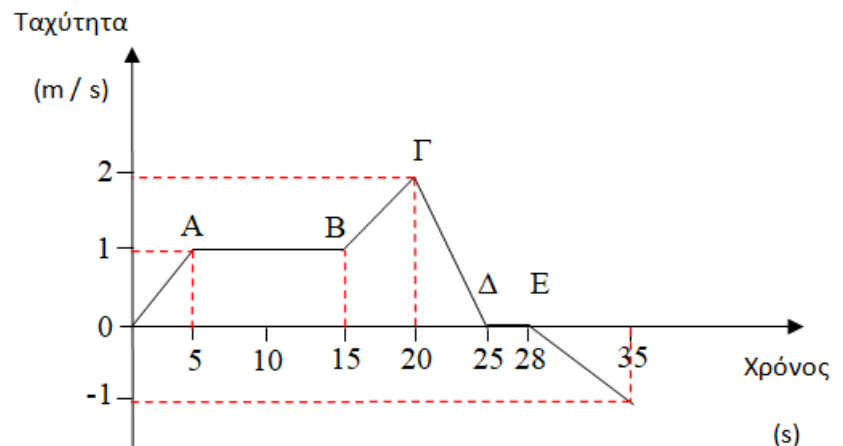
$v_{τελ} > v_{αρχ} \Rightarrow W_{ολ} > 0$. (Σωστό)

5 s → 15 s

$v_{τελ} = v_{αρχ} \Rightarrow W_{ολ} = 0$. (Λάθος)

20 s → 25 s

$v_{τελ} < v_{αρχ} \Rightarrow W_{ολ} < 0$. (Λάθος)



2ος τρόπος

0 s → 15 s

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s το σώμα επιταχύνεται, άρα η συνισταμένη δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση και επομένως το έργο της είναι θετικό. Από τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 15$ s η ταχύτητα είναι σταθερή, άρα η συνισταμένη είναι μηδενική και το έργο της είναι μηδενικό.

Επομένως, το συνολικό έργο της δύναμης στο χρονικό διάστημα 0 s → 15 s είναι θετικό. (Σωστό)

5 s → 15 s

Αφού η ταχύτητα είναι σταθερή, η συνισταμένη είναι μηδενική άρα και το έργο της είναι μηδενικό. (Λάθος)

20 s → 25 s

Αφού $v_{τελ} < v_{αρχ}$ το σώμα επιβραδύνεται, άρα η συνισταμένη έχει αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση και επομένως το έργο της είναι αρνητικό. (Λάθος)

21. (13574, B2) Σώμα μάζας 1 kg γλιστράει προς την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία 30° με τον ορίζοντα, υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F (όπως στο σχήμα). Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0,2$ και το σώμα διανύει συνολικό μήκος 10 m.

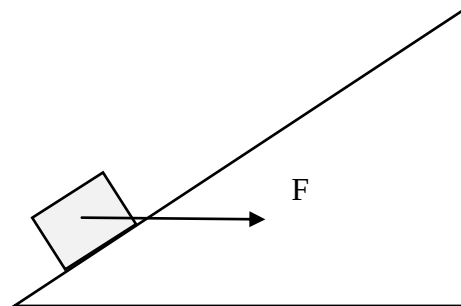
Δίνονται: $g = 10 \frac{m}{s^2}$, $\eta\mu 30^\circ = 0,5$ και $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. Αν το έργο της τριβής κατά την μετακίνηση του σώματος είναι $-20\sqrt{3}$ J, το μέτρο της δύναμης F ισούται με:

α) $10\sqrt{3}$ N,

β) $5\sqrt{3}$ N,

γ) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ N.



Μονάδες 6

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 7

Απάντηση

Σχεδιάζω και τις υπόλοιπες δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και την τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (με φορά προς τα κάτω, αφού το σώμα κινείται προς τα πάνω).

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ και το βάρος σε συνιστώσες.

Για τα μέτρα τους ισχύουν οι σχέσεις :

$$F_x = F \sigma\upsilon\nu\varphi \quad (1)$$

$$F_y = F \eta\mu\varphi \quad (2)$$

$$B_x = mg \eta\mu\varphi \quad (3)$$

$$B_y = mg \sigma\upsilon\nu\varphi \quad (4)$$

Από τη σχέση του έργου της τριβής ολίσθησης υπολογίζω το μέτρο της τριβής :

$$W_T = -T(\Delta x) \Leftrightarrow T = -\frac{W_T}{\Delta x} \Rightarrow T = -\frac{(-20\sqrt{3} \text{ J})}{10 \text{ m}} \Rightarrow T = 2\sqrt{3} \text{ N}.$$

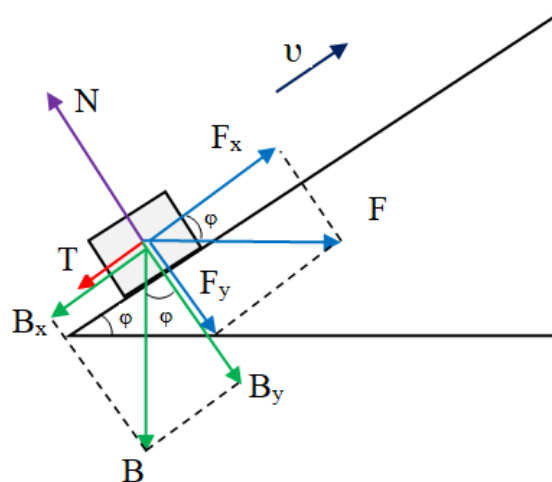
Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης και υπολογίζω το μέτρο της κάθετης δύναμης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow N = \frac{T}{\mu} \Rightarrow N = \frac{2\sqrt{3}}{0,2} \text{ N} \Rightarrow N = 10\sqrt{3} \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

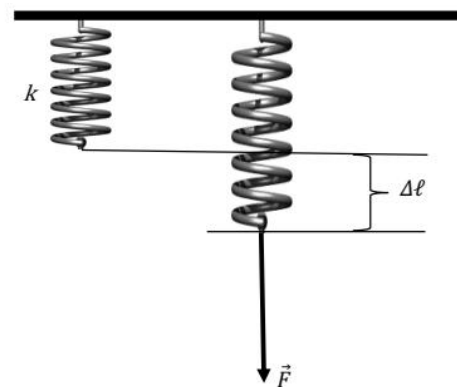
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - F_y - B_y = 0 \Leftrightarrow F_y = N - B_y \xrightarrow{(2),(4)} F \eta\mu\varphi = N - mg \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow$$

$$F = \frac{N - mg \sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow F = \frac{10\sqrt{3} - 10 \frac{\sqrt{3}}{2}}{0,5} \text{ N} = \frac{5\sqrt{3}}{0,5} \text{ N} \Rightarrow F = 10\sqrt{3} \text{ N}.$$



Σχόλιο : Η ερώτηση είναι αρκετά δύσκολη για το επίπεδο της Α' Λυκείου, αφού απαιτεί την ανάλυση δύο δυνάμεων σε σώμα το οποίο βρίσκεται σε τραχύ κεκλιμένο επίπεδο.

22. (13615, 2.1) Κατακόρυφο **ιδανικό ελατήριο**, σταθεράς k , έχει το ανώτερο άκρο του ακλόνητα στερεωμένο. Ασκώντας στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$, επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά $\Delta\ell$, φροντίζοντας το κάτω άκρο να κινείται διαρκώς με σταθερή και πολύ μικρή ταχύτητα.



A. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ ισούται με:

- α) $k \cdot (\Delta\ell)^2$
- β) $k \cdot \Delta\ell$
- γ) $\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta\ell)^2$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke, η επιμήκυνση x του ελατηρίου είναι ανάλογη με το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που την προκαλεί :

$$F = kx.$$

Η δύναμη $\vec{F}$ έχει σταθερή διεύθυνση αλλά το μέτρο της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x .

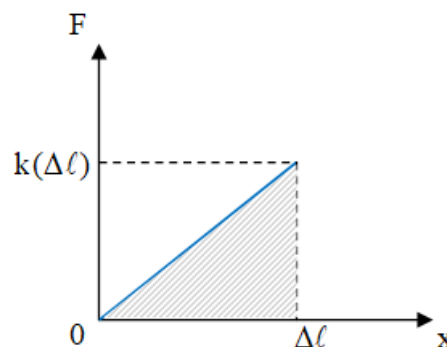
Για να υπολογίσω το έργο της σχεδιάζω το διάγραμμα της σχέσης $F = kx$.

Όταν $F = 0$, τότε $x = 0$.

Για $x = \Delta\ell \Rightarrow F = k(\Delta\ell)$.

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για μετατόπιση $0 \leq x \leq \Delta\ell$, είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τριγώνου στο διάγραμμα $F = f(x)$:

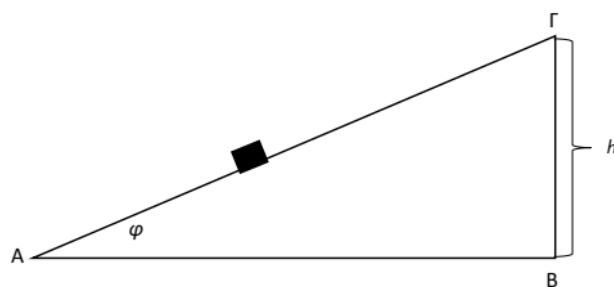
$$W_F = E_{\text{τριγ}} = \frac{1}{2} k(\Delta\ell)(\Delta\ell) \Rightarrow W_F = \frac{1}{2} k(\Delta\ell)^2.$$



Επισημάνση

Ο όρος «ιδανικό ελατήριο» σημαίνει ελατήριο μηδενικής μάζας που υπακούει στο νόμο του Hooke (δηλαδή οι παραμορφώσεις του είναι ελαστικές) και δεν εμφανίζει εσωτερικές τριβές.

23. (14203, 2.2) Σώμα βάρους $\vec{w}$ μετατοπίζεται από το σημείο Α προς το σημείο Γ ακλόνητου, πλάγιου δαπέδου, που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία φ . Η υψομετρική διαφορά των σημείων Α και Γ είναι h .



A. Το έργο του βάρους του σώματος είναι:

α) $W_{\vec{w}} = -w \cdot h \cdot \eta\mu\varphi$

β) $W_{\vec{w}} = -w \cdot h$

γ) $W_{\vec{w}} = -w \cdot h \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

1ος τρόπος

Αναλύω το βάρος $\vec{w}$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{w}_x$, $\vec{w}_y$.

Η συνιστώσα $\vec{w}_y$ δεν παράγει έργο γιατί είναι κάθετη στη μετατόπιση.

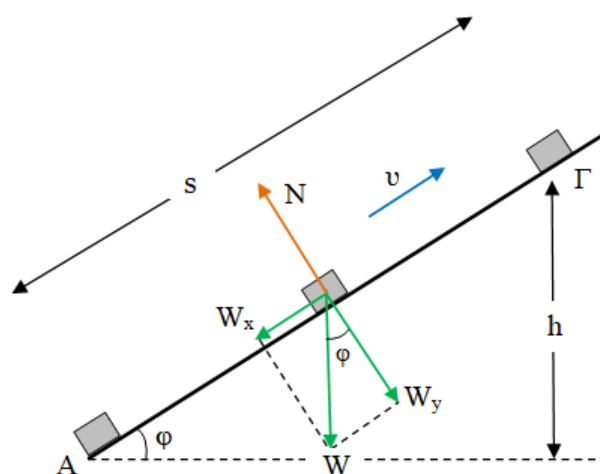
Επομένως :

$$W_W = W_{W_x} = w_x \cdot s \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ \Rightarrow W_W = -w_x \cdot s \Rightarrow$$

$$W_W = -w \eta\mu\varphi \cdot s. \quad (1)$$

$$\text{Όμως : } s \eta\mu\varphi = h. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow W_W = -w \cdot h.$$



2ος τρόπος

Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο και εφαρμόζω τη σχέση μεταξύ έργου βάρους και μεταβολής δυναμικής ενέργειας :

$$W_W = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow W_W = 0 - mgh \quad \text{ή} \quad W_W = -w \cdot h.$$

Κινητική ενέργεια

24. (7969, B1) Από την ταράτσα μιας πολυκατοικίας αφήνονται να πέσουν μία ξύλινη σφαίρα Α μάζας m και μία σιδερένια σφαίρα Β τριπλάσιας μάζας. Η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα και συνεπώς οι δύο σφαίρες εκτελούν ελεύθερη πτώση.

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν K_A είναι η κινητική ενέργεια που αντιστοιχεί στη σφαίρα Α και K_B η κινητική ενέργεια που αντιστοιχεί στη σφαίρα Β, ελάχιστα πριν οι σφαίρες ακουμπήσουν στο έδαφος, τότε ισχύει:

α) $K_A = K_B$

β) $K_A = 3K_B$

γ) $K_B = 3K_A$

Μονάδες 4

Β) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για κάθε σφαίρα, από το σημείο που αφέθηκε μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

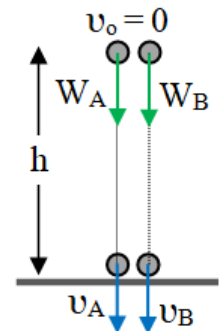
Σφαίρα Α :

$$\Delta K_A = \Sigma W_A \Leftrightarrow K_A = m_A gh. \quad (1)$$

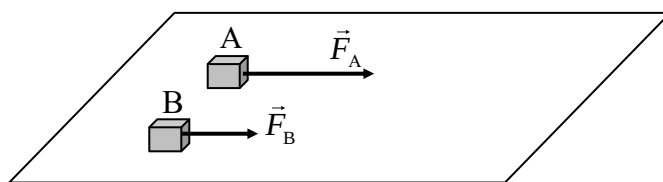
Σφαίρα Β :

$$\Delta K_B = \Sigma W_B \Leftrightarrow K_B = m_B gh. \quad (2)$$

$$\text{Αφού } m_B = 3m_A \xrightarrow{(1),(2)} K_B = 3K_A.$$



25. (7969, B2) Δυο κιβώτια A και B με ίσες μάζες βρίσκονται δίπλα – δίπλα και ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούνται στα κιβώτια A και B σταθερές οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$ με μέτρα $F_A = F$ και $F_B = \frac{F}{2}$



αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τα δυο κιβώτια αρχίζουν να κινούνται ευθύγραμμα στο οριζόντιο επίπεδο και η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν μετά από ίσες μετατοπίσεις από το σημείο εκκίνησης τους, τα κιβώτια A και B έχουν ταχύτητες με μέτρα v_A και v_B αντίστοιχα, τότε ισχύει:

α) $v_A = v_B$

β) $v_A = v_B \sqrt{2}$

γ) $v_B = v_A \sqrt{2}$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για κάθε κιβώτιο, από τη στιγμή που αρχίζει να κινείται μέχρι να μετατοπιστεί κατά Δx :

Κιβώτιο A

$$K_A - 0 = W_{FA} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 = F(\Delta x) \Leftrightarrow v_A^2 = 2 \cdot \frac{F(\Delta x)}{m}. \quad (1)$$

Κιβώτιο B

$$K_B - 0 = W_{FB} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{F}{2}(\Delta x) \Leftrightarrow v_B^2 = \frac{F(\Delta x)}{m}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow v_A^2 = 2v_B^2 \Leftrightarrow v_A = v_B \sqrt{2}.$$

26. (7973, B1) Ένα όχημα κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο με αρχική ταχύτητα μέτρου 10 m/s. Στο όχημα ασκούνται δυνάμεις και το μέτρο της ταχύτητας του μεταβάλλεται. Το ολικό έργο των δυνάμεων που απαιτείται για να αυξηθεί το μέτρο της ταχύτητας του οχήματος από 10 m/s σε 20 m/s, είναι ίσο με W_1 , ενώ για να αυξηθεί το μέτρο της ταχύτητας του οχήματος από 20 m/s σε 30 m/s, είναι ίσο με W_2 .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για τα έργα W_1 και W_2 , ισχύει:

α) $W_1 = W_2$

β) $W_1 > W_2$

γ) $W_1 < W_2$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Σύμφωνα με το ΘΜΚΕ, το ολικό έργο των δυνάμεων είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας :

$$W_{ολ} = K_{τελ} - K_{αρχ} \Leftrightarrow W_{ολ} = \frac{1}{2}m(v_{τελ}^2 - v_{αρχ}^2).$$

1η περίπτωση

$$W_1 = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_o^2) \quad (1)$$

2η περίπτωση

$$W_2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \quad (2)$$

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{v_1^2 - v_o^2}{v_2^2 - v_1^2} \Rightarrow \frac{W_1}{W_2} = \frac{20^2 - 10^2}{30^2 - 20^2} = \frac{400 - 100}{900 - 400} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{W_1}{W_2} < 1 \Rightarrow W_1 < W_2.$$

27. (7975, B2) Κιβώτιο βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο στη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$, ενός οριζόντιου άξονα $x'x$. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ένας εργάτης σπρώχνει και αρχίζει να κινεί το κιβώτιο ασκώντας σε αυτό σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F .

A) Αν με x συμβολίσουμε τη θέση του κιβωτίου και με K την κινητική ενέργεια του κιβωτίου στη θέση αυτή, να προσδιορίσετε τη σχέση της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με τη θέση του κιβωτίου.

Μονάδες 7

B) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας K , σε συνάρτηση με τη θέση x .

Μονάδες 6

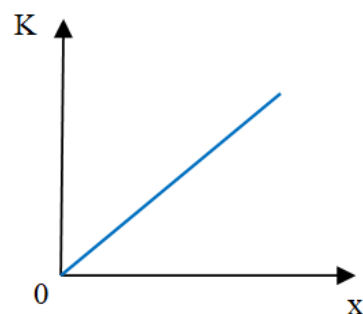
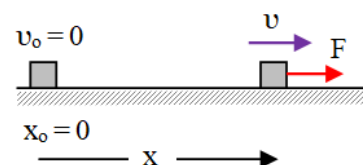
Απάντηση

A) Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για το κιβώτιο, από τη θέση $x_0 = 0$ μέχρι την τυχαία θέση x :

$$\Sigma W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow F \cdot x = K - 0 \Leftrightarrow K = F \cdot x. \quad (1)$$

B) Αφού η δύναμη έχει σταθερό μέτρο, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια του κιβωτίου είναι ανάλογη με τη θέση x .

Άρα το διάγραμμα $K = f(x)$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



28. (7979, B2) Ένα όχημα κινείται σε ευθύγραμμο οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα μέτρου v_0 . Ο οδηγός του αντιλαμβανόμενος επικίνδυνη κατάσταση μπροστά του, εφαρμόζει απότομα τα φρένα και μπλοκάροντας τους τροχούς καταφέρνει να σταματήσει το όχημα μετά από μετατόπιση Δx .

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν το όχημα είχε αρχικά τη διπλάσια ταχύτητα και οι συνθήκες ήταν πανομοιότυπες, δηλαδή ο οδηγός ασκώντας τα φρένα προκαλεί δύναμη τριβής ακριβώς ίδιου μέτρου με αυτήν στην προηγούμενη περίπτωση, τότε το όχημα θα σταματούσε μετά από μετατόπιση:

(α) $2\Delta x$

(β) $4\Delta x$

(γ) $\sqrt{2} \Delta x$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού οι τροχοί μπλοκάρουν (δεν περιστρέφονται), αναπτύσσεται ανάμεσα στους τροχούς και το οδόστρωμα σταθερή τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, ίσου μέτρου στις δυο περιπτώσεις.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για κίνηση του οχήματος από τη στιγμή που ο οδηγός ενεργοποιεί τα φρένα μέχρι τη στιγμή που το όχημα ακινητοποιείται.

1η περίπτωση

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -T(\Delta x) \Leftrightarrow \Delta x = \frac{mv_0^2}{2T}. \quad (1)$$

2η περίπτωση

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}' = \Sigma W' \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}m(2v_0)^2 = -T(\Delta x') \Leftrightarrow \Delta x' = \frac{4mv_0^2}{2T}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \Delta x' = 4(\Delta x).$$

29. (7991, B2) Ένα φορτηγό και ένα Ι.Χ. επιβατηγό αυτοκίνητο κινούνται με ταχύτητες ίσου μέτρου σε ευθύγραμμο και οριζόντιο δρόμο. Κάποια χρονική στιγμή οι οδηγοί τους εφαρμόζουν τα φρένα προκαλώντας και στα δύο οχήματα συνισταμένη δύναμη ίδιου μέτρου και αντίρροπη της ταχύτητας τους.

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Το όχημα με τη μεγαλύτερη μετατόπιση από τη στιγμή που άρχισε να επιβραδύνεται, μέχρι να σταματήσει είναι :

α) το φορτηγό.

β) το Ι.Χ. επιβατηγό.

γ) κανένα από τα δύο, αφού τα δύο οχήματα θα μετατοπιστούν το ίδιο.

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η συνισταμένη δύναμη έχει το ίδιο (σταθερό) μέτρο F στις δύο περιπτώσεις.

1ος τρόπος

Κάθε όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της επιβράδυνσης υπολογίζεται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής : $a = \frac{F}{m}$. (1)

Αν το μέτρο της αρχικής ταχύτητας κάθε οχήματος είναι v_0 , τότε η μετατόπισή του μέχρι να σταματήσει

υπολογίζεται από τη σχέση : $\Delta x = \frac{v_0^2}{2a} \xrightarrow{(1)} \Delta x = \frac{v_0^2}{2 \frac{F}{m}} \Rightarrow \Delta x = \frac{mv_0^2}{2F}$. (2)

Από τη σχέση (2) φαίνεται ότι το μέτρο της μετατόπισης του οχήματος είναι ανάλογο με τη μάζα του.

Αν η μάζα του φορτηγού είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του αυτοκινήτου, τότε η μετατόπιση του φορτηγού μέχρι να σταματήσει θα είναι μεγαλύτερη από του αυτοκινήτου.

2ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για ένα όχημα, από τη στιγμή που αρχίζει να επιβραδύνεται μέχρι να ακινητοποιηθεί :

$$\Sigma W = K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} \Leftrightarrow -F(\Delta x) = -\frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow \Delta x = \frac{mv_0^2}{2F}.$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι το μέτρο της μετατόπισης του οχήματος είναι ανάλογο με τη μάζα του.

Αν η μάζα του φορτηγού είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του αυτοκινήτου, τότε η μετατόπιση του φορτηγού μέχρι να σταματήσει θα είναι μεγαλύτερη από του αυτοκινήτου.

Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι η μάζα του φορτηγού είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του αυτοκινήτου.

30. (7995, B2) Μία μεταλλική σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση με την επίδραση μόνο του βάρους της. Σε σημείο Α της τροχιάς της έχει ταχύτητα μέτρου v και κινητική ενέργεια ίση με K . Σε ένα άλλο σημείο Β που βρίσκεται χαμηλότερα από το Α, έχει ταχύτητα διπλάσιου μέτρου, δηλαδή ίσου με $2v$.

Α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Το έργο του βάρους της σφαίρας κατά τη μετατόπιση της από τη θέση Α στην θέση Β είναι ίσο με :

α) $3K$

β) $2K$

γ) $4K$

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα μέτρου v υπολογίζεται από τη σχέση : $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση :

$$K_{\text{αρχ}} = K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1)$$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}m(2v)^2 = \frac{1}{2}m \cdot 4v^2 \xrightarrow{(1)} K_{\text{τελ}} = 4K. \quad (2)$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση της σφαίρας από τη μία θέση στην άλλη :

$$\Sigma W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \xrightarrow{(1),(2)} W_B = 4K - K \Rightarrow W_B = 3K.$$

31. (7996, B2) Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο αμαξάκια Α και Β με μάζες m και $2m$ αντίστοιχα.

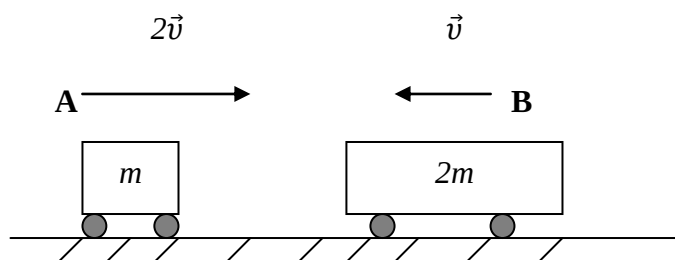
Α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Αν τα αμαξάκια κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα και το Α έχει ταχύτητα διπλάσιου μέτρου από του Β τότε:

α) το αμαξάκι Α έχει διπλάσια κινητική ενέργεια από το αμαξάκι Β.

β) το αμαξάκι Β έχει διπλάσια κινητική ενέργεια από το αμαξάκι Α .

γ) τα δυο αμαξάκια έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.



Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα μέτρου v υπολογίζεται από τη σχέση : $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Επομένως :

$$K_A = \frac{1}{2}m(2v)^2 \Rightarrow K_A = \frac{1}{2}m \cdot 4v^2 \Rightarrow K_A = 2mv^2. \quad (1)$$

$$K_B = \frac{1}{2} \cdot 2mv^2 \Rightarrow K_B = mv^2. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow K_A = 2K_B.$$

32. (8012, B2) Μία μεταλλική σφαίρα μικρών διαστάσεων αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος h με αποτέλεσμα η ταχύτητα της ακριβώς πριν ακουμπήσει στο έδαφος να έχει μέτρο ίσο με v . Θεωρήστε την επίδραση του αέρα αμελητέα και την επιτάχυνση της βαρύτητας (g) σταθερή.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Για να έχει η ίδια σφαίρα ακριβώς πριν ακουμπήσει στο έδαφος ταχύτητα διπλάσιου μέτρου, τότε πρέπει να αφεθεί από ύψος:

α) $\sqrt{2} h$

β) $2h$

γ) $\sqrt{2} 4h$

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση της σφαίρας από τη στιγμή που αφήνεται μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

1η δοκιμή

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \Leftrightarrow h = \frac{v^2}{2g}. \quad (1)$$

2η δοκιμή

$$K'_{\text{τελ}} - K'_{\text{αρχ}} = W'_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(2v)^2 - 0 = mgh' \Leftrightarrow h' = \frac{4v^2}{2g}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow h' = 4h.$$

Εναλλακτική απάντηση : Με εφαρμογή των εξισώσεων της ελεύθερης πτώσης.

Από την εξίσωση της ταχύτητας στην ελεύθερη πτώση, προκύπτει η χρονική διάρκεια κίνησης :

$$v = gt \Leftrightarrow t = \frac{v}{g}. \quad (1)$$

Αντικαθιστώ το t από τη σχέση (1) στην εξίσωση του διαστήματος :

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[\text{(1)}]{s=h} h = \frac{1}{2}g \cdot \frac{v^2}{g^2} \Leftrightarrow h = \frac{v^2}{2g}. \quad (2)$$

Εφαρμόζω τη σχέση (2) στις δύο περιπτώσεις.

1η δοκιμή

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad (3)$$

2η δοκιμή

$$h' = \frac{(2v)^2}{2g} = \frac{4v^2}{2g} \xrightarrow{(3)} h' = 4h.$$

33. (8027, 2.1) Ένας αλεξιπτωτιστής πέφτει από το αεροπλάνο χωρίς αρχική ταχύτητα και αφού ανοίξει το αλεξίπτωτο κινούμενος για κάποιο χρονικό διάστημα με σταθερή ταχύτητα προσγειώνεται στο έδαφος. Αν συμβολίσουμε με W_B το έργο του βάρους του αλεξιπτωτιστή κατά τη διάρκεια της πτώσης του και K τη κινητική ενέργεια του αλεξιπτωτιστή κατά τη προσγείωση του θα ισχύει:

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- α) $W_B > K$, β) $W_B = K$, γ) $W_B < K$.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια της πτώσης, στο σύστημα αλεξιπτωτιστής – αλεξίπτωτο ασκούνται 3 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, η αντίσταση $\vec{F}_a$ και η άνωση $\vec{A}$ από τον αέρα.

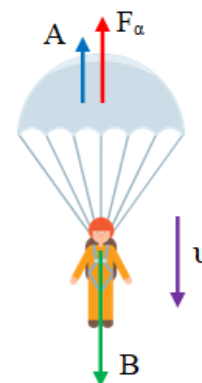
Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που πέφτει από το αεροπλάνο μέχρι να φτάσει στο έδαφος :

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow K = W_B + W_{F_a} + W_A . \quad (1)$$

Αφού η αντίσταση $\vec{F}_a$ και η άνωση $\vec{A}$ έχουν αντίθετη φορά από την ταχύτητα, το έργο τους είναι αρνητικό (καταναλισκόμενο) :

$$W_{F_a} < 0 , \quad W_A < 0 . \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow K < W_B \quad \text{ή} \quad W_B > K .$$



Επισήμανση

Στην περίπτωση που δεχθούμε ότι η άνωση είναι ασήμαντη ($A \cong 0$), η απάντηση απλουστεύεται χωρίς όμως να αλλάξει το αποτέλεσμα.

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η άνωση είναι ασήμαντη ή πρέπει να ληφθεί υπ' όψη.

34. (8033, B2) Δύο όμοιες μεταλλικές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 , ίδιας μάζας, αφήνονται ταυτόχρονα να εκτελέσουν ελεύθερη πτώση, από ύψος h_1 η Σ_1 και από ύψος h_2 η Σ_2 , πάνω από την επιφάνεια της Γης.

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Αν $h_1 = 2 \cdot h_2$, τότε

α) Η σφαίρα Σ_1 φθάνει στο έδαφος έχοντας ταχύτητα διπλάσιου μέτρου από την ταχύτητα της σφαίρας Σ_2

β) Οι δύο σφαίρες φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος

γ) Η σφαίρα Σ_1 φθάνει στο έδαφος έχοντας διπλάσια κινητική ενέργεια από τη σφαίρα Σ_2

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση κάθε σφαίρας μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Σ_1

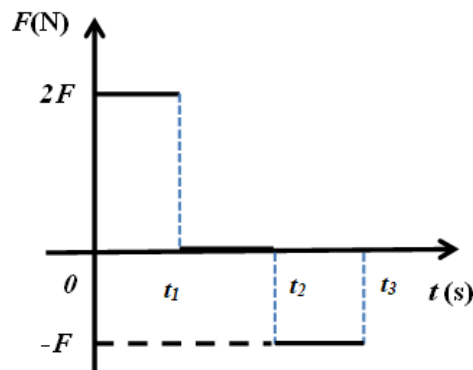
$$\Delta K_1 = \Sigma W_1 \Leftrightarrow K_1 - 0 = mgh_1 \Leftrightarrow K_1 = mgh_1. \quad (1)$$

Σ_2

$$\Delta K_2 = \Sigma W_2 \Leftrightarrow K_2 - 0 = mgh_2 \Leftrightarrow K_2 = mgh_2. \quad (2)$$

$$\text{Αφού } h_1 = 2h_2 \xrightarrow{(1), (2)} K_1 = 2K_2.$$

35. (8046, B1) Ένας μικρός μεταλλικός κύβος βρίσκεται αρχικά ακίνητος σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Στον κύβο ασκείται την χρονική στιγμή $t = 0$ s οριζόντια δύναμη της οποίας η τιμή σε συνάρτηση με το χρόνο παριστάνεται στο διπλανό διάγραμμα. Αν $t_2 = 2 \cdot t_1$ και $t_3 = 3 \cdot t_1$ τότε



Α) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση
α) στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow t_1$ ο κύβος κινείται ευθύγραμμα και ομαλά .

β) τη χρονική στιγμή t_3 η ταχύτητα του κύβου μηδενίζεται.

γ) στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow t_1$ η κινητική ενέργεια του κύβου αυξάνεται ενώ στο χρονικό διάστημα $t_2 \rightarrow t_3$ η κινητική ενέργεια του κύβου μειώνεται.

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

$0 \rightarrow t_1$

Ο κύβος έχει σταθερή επιτάχυνση (αλγεβρική τιμή) : $\alpha_1 = \frac{2F}{m} > 0$. (1)

Αφού είναι αρχικά ακίνητος, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. [α) : Λάθος]

Η κινητική ενέργεια του κύβου αυξάνεται.

Τη χρονική στιγμή t_1 ο κύβος έχει ταχύτητα (αλγεβρική τιμή) : $v_1 = \alpha_1 t_1 > 0$. (2)

$t_1 \rightarrow t_2$

Η επιτάχυνση του κύβου έχει τιμή : $\alpha_2 = 0$.

Η ταχύτητα του κύβου διατηρείται σταθερή.

Τη χρονική στιγμή t_2 ο κύβος έχει ταχύτητα (αλγεβρική τιμή) :

$$v_2 = v_1 \xrightarrow{(2)} v_2 = \alpha_1 t_1 > 0. \quad (3)$$

$t_2 \rightarrow t_3$

Ο κύβος έχει σταθερή επιτάχυνση (αλγεβρική τιμή) : $\alpha_3 = -\frac{F}{m} \xrightarrow{(1)} \alpha_3 = -\frac{\alpha_1}{2} < 0$. (4)

Αφού η ταχύτητα του κύβου είναι θετική και η επιτάχυνση αρνητική, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η κινητική ενέργεια του κύβου μειώνεται. [γ) : Σωστή]

Τη χρονική στιγμή t_3 ο κύβος έχει ταχύτητα (αλγεβρική τιμή) :

$$v_3 = v_2 + \alpha_3(t_3 - t_2) \xrightarrow{(3),(4)} v_3 = \alpha_1 t_1 - \frac{\alpha_1}{2}(3t_1 - 2t_1) = \alpha_1 t_1 - \frac{\alpha_1}{2} \cdot t_1 \Rightarrow v_3 = \frac{\alpha_1 t_1}{2} \neq 0.$$

[β) : Λάθος]

Σημείωση :

Ο υπολογισμός της ταχύτητας v_3 δεν είναι απαραίτητος, αφού βρέθηκε σωστή απάντηση η γ).

36. (8047, B1) Δύο σώματα με διαφορετικές μάζες έχουν την ίδια κινητική ενέργεια και κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν ασκηθεί σε καθένα σώμα σταθερή δύναμη ίδιου μέτρου και κατεύθυνσης αντίθετης με την ταχύτητα των σωμάτων τότε τα διαστήματα που θα διανύσουν τα σώματα μέχρι να σταματήσουν:

α) θα είναι ίσα **β)** θα είναι άνισα **γ)** δεν έχω όλα τα δεδομένα για να συμπεράνω

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για κάθε σώμα, από τη στιγμή που έχει κινητική ενέργεια K_0 , μέχρι να σταματήσει :

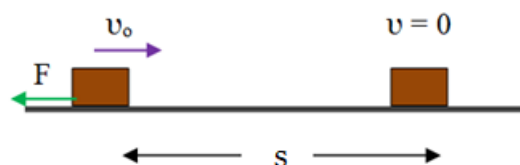
1ο σώμα

$$\Sigma W_1 = \Delta K_1 \Leftrightarrow -F \cdot s_1 = 0 - K_0 \Leftrightarrow s_1 = \frac{K_0}{F}. \quad (1)$$

2ο σώμα

$$\Sigma W_2 = \Delta K_2 \Leftrightarrow -F \cdot s_2 = 0 - K_0 \Leftrightarrow s_2 = \frac{K_0}{F}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow s_1 = s_2.$$



37. (8051, B1) Δύο αυτοκίνητα με μάζες $m_A = 4000 \text{ Kg}$ και $m_B = 1000 \text{ Kg}$ είναι αρχικά ακίνητα σε οριζόντιο δρόμο. Τα αυτοκίνητα αρχίζουν να κινούνται στο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στα δυο αυτοκίνητα έχει το ίδιο μέτρο.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Όταν τα αυτοκίνητα έχουν διανύσει απόσταση d κινούνται με ταχύτητες μέτρου v_A και v_B αντίστοιχα, για τα οποία ισχύει:

α) $v_A = v_B$

β) $2v_A = v_B$

γ) $v_A = 2v_B$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για κάθε αυτοκίνητο, από τη στιγμή που ξεκινά μέχρι να διανύσει απόσταση d .

Αυτοκίνητο Α

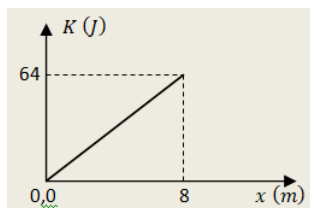
$$\Delta K_A = \Sigma W_A \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 = F \cdot d. \quad (1)$$

Αυτοκίνητο Β

$$\Delta K_B = \Sigma W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_B v_B^2 = F \cdot d. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \xrightarrow{m_A=4m_B} 4m_B v_A^2 = m_B v_B^2 \Leftrightarrow 4v_A^2 = v_B^2 \Rightarrow v_B = 2v_A.$$

38. (13102, B2) Ένα τηλεκατευθυνόμενο αυτοκίνητο - μοντέλο μάζας $m = 2 \text{ kg}$ με εντολή του χειριστή, αρχίζει να κινείται από την ηρεμία, ευθύγραμμα με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση για τα πρώτα 8 m της κίνησής του. Για την διαδρομή του αυτή δίνεται στο διπλανό διάγραμμα η γραφική παράσταση της κινητικής του ενέργειας σε συνάρτηση με την μετατόπισή του από την αρχική θέση. Με τη βοήθεια του διαγράμματος και θεωρώντας $t_0 = 0$ τη χρονική στιγμή έναρξης της κίνησης του αυτοκινήτου:



A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία έχει μετατοπιστεί μέχρι τη θέση $x_1 = 8 \text{ m}$:

i. $t_1 = 8 \text{ s}$

ii. $t_1 = 2 \text{ s}$

iii. $t_1 = 4 \text{ s}$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Το αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α , με την επίδραση σταθερής συνισταμένης δύναμης μέτρου $F_{ολ}$.

1ος τρόπος

Από τη σχέση της κινητικής ενέργειας υπολογίζω το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1 :

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \Leftrightarrow v_1^2 = \frac{2K_1}{m} \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 64}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Συνδυάζω την εξίσωση της μετατόπισης με τον ορισμό της επιτάχυνσης και υπολογίζω τη χρονική στιγμή t_1 :

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \\ \alpha = \frac{v_1}{t_1} \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{2x_1}{v_1} \Rightarrow t_1 = \frac{2 \cdot 8}{8} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση του αυτοκινήτου από $x_0 = 0$ έως $x_1 = 8 \text{ m}$, για να υπολογίσω το μέτρο της επιτάχυνσης α :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow F_{ολ} \cdot x_1 = K_1 - 0 \Leftrightarrow m \alpha \cdot x_1 = K_1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{K_1}{m x_1} \Rightarrow \alpha = \frac{64 \text{ J}}{(2 \text{ Kg})(8 \text{ m})} \Rightarrow \alpha = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζω το χρόνο t_1 :

$$x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2x_1}{\alpha} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{\alpha}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \text{ m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{4 \text{ s}^2} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}.$$

Σχόλιο : Η διατύπωση «αρχίζει να κινείται . . . με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση» είναι άστοχη.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «αρχίζει να κινείται . . . με σταθερή επιτάχυνση».

39. (13273, B2) Δύο σώματα Α και Β έχουν μάζες m_A και $m_B = 4 \cdot m_A$ και κινούνται με σταθερές ταχύτητες που έχουν μέτρα $v_A = 2 \cdot v_B$ και v_B .

Α. Για τις κινητικές ενέργειες K_A και K_B των σωμάτων Α και Β αντίστοιχα ισχύει:

α) $K_A = K_B$, β) $K_A > K_B$, γ) $K_A < K_B$.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζω τη σχέση της κινητικής ενέργειας για κάθε σώμα.

$$K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2. \quad (1)$$

$$K_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \xrightarrow{m_B = 4m_A, v_B = \frac{v_A}{2}} K_B = \frac{1}{2} \cdot 4m_A \cdot \frac{v_A^2}{4} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \xrightarrow{(1)} K_B = K_A.$$

40. (13467, B2) Το σώμα Σ του σχήματος, εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου, το οποίο δεν είναι λείο. Στην θέση A και αφού διανύσει διάστημα s επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, η ταχύτητά του μηδενίζεται στιγμιαία και στη συνέχεια επιστρέφει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε περνώντας από αυτό με ταχύτητα μέτρου v .

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. $v_0 > v$

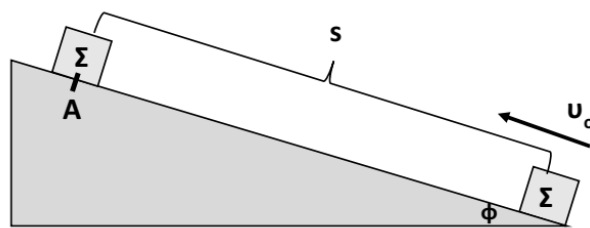
β. $v_0 < v$

γ. $v_0 = v$

(Μονάδες 4)

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

(Μονάδες 9)



Απάντηση

Στη διάρκεια της κίνησης ασκούνται στο σώμα τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (η οποία έχει συνεχώς αντίθετη φορά από τη μετατόπιση).

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που εκτοξεύεται το σώμα μέχρι να επιστρέψει στη βάση του επιπέδου.

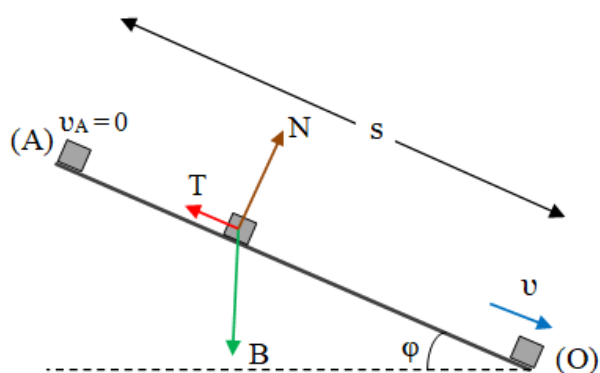
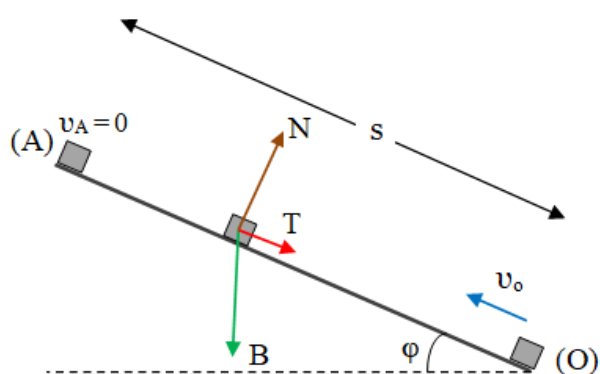
Επειδή η διαδρομή είναι κλειστή, το έργο του βάρους είναι μηδενικό ($W_B = 0$).

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T. \quad (1)$$

Το έργο της τριβής είναι καταναλισκόμενο, άρα :

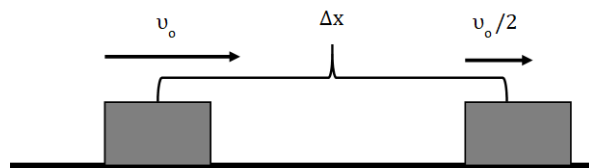
$$W_T < 0 \xrightarrow{(1)} K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 < \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow v^2 < v_0^2 \Rightarrow v < v_0.$$



41. (13512, 2.2) Την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ το κιβώτιο του σχήματος, μάζας $m = 10 \text{ Kg}$, έχει ταχύτητα $v_0 = 2 \text{ m/s}$. Το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου μειώνεται στο μισό, αφού αυτό μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 0,1 \text{ m}$.

Η μείωση της ταχύτητας του κιβωτίου για την συγκεκριμένη μετατόπιση Δx , οφείλεται στο γεγονός, ότι στο κιβώτιο ασκείται:



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. Δύναμη μέτρου $F = 75 \text{ N}$ αντίρροπη της ταχύτητας.

β. Τριβή ολίσθησης μέτρου $T_{ολ} = 150 \text{ N}$ και δύναμη μέτρου $F = 75 \text{ N}$ ομόρροπη της ταχύτητας.

γ. Δύναμη μέτρου $F = 75 \text{ N}$ αντίρροπη της ταχύτητας και τριβή ολίσθησης μέτρου $T_{ολ} = 75 \text{ N}$.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου για τη διαδρομή αυτή είναι :

$$\Delta K = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1^2 - 2^2) \text{ J} = 5 \cdot (-3) \text{ J} \Rightarrow \Delta K = -15 \text{ J}.$$

Υπολογίζω το συνολικό έργο σε κάθε περίπτωση.

$$\alpha) \Sigma W = -F(\Delta x) = -(75 \text{ N})(0,1 \text{ m}) = -7,5 \text{ J} \Rightarrow \Sigma W \neq \Delta K. \quad (\text{Λάθος})$$

$$\beta) \Sigma W = (F - T)(\Delta x) = (75 - 150) \cdot 0,1 \text{ J} = -7,5 \text{ J} \Rightarrow \Sigma W \neq \Delta K. \quad (\text{Λάθος})$$

$$\gamma) \Sigma W = -(F + T)(\Delta x) = -(75 + 75) \cdot 0,1 \text{ J} = -15 \text{ J} \Rightarrow \Sigma W = \Delta K. \quad (\text{Σωστό})$$

Εναλλακτική απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη μετατόπιση του σώματος και υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = (\Sigma F_x)(\Delta x) \Leftrightarrow \Sigma F_x = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2(\Delta x)}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \Sigma F_x = \frac{10(1^2 - 2^2)}{2 \cdot 0,1} \text{ N} \Rightarrow \Sigma F_x = -150 \text{ N}.$$

Υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης στις 3 περιπτώσεις που δίνονται.

$$\alpha) \Sigma F_x = -F = -75 \text{ N}. \quad (\text{Λάθος})$$

$$\beta) \Sigma F_x = F - T = (75 - 150) \text{ N} = -75 \text{ N}. \quad (\text{Λάθος})$$

$$\gamma) \Sigma F_x = -F - T = -(75 + 75) \text{ N} = -150 \text{ N}. \quad (\text{Σωστό})$$

42. (13514, 2.1) Δύο σώματα Α και Β με μάζες $m_A = 2m$ και $m_B = m$ εκτοξεύονται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητες $v_A = 2v$ και $v_B = v$ αντίστοιχα. Αγνοούμε την αντίσταση του αέρα.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Τα μέγιστα ύψη h_A και h_B από το έδαφος, στα οποία φθάνουν τα δύο σώματα συνδέονται μεταξύ τους με την σχέση:

$$\alpha. \frac{h_A}{h_B} = 4$$

$$\beta. \frac{h_A}{h_B} = \frac{1}{4}$$

$$\gamma. \frac{h_A}{h_B} = 1$$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή κάθε σώματος από το σημείο εκτόξευσης μέχρι το σημείο που μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα.

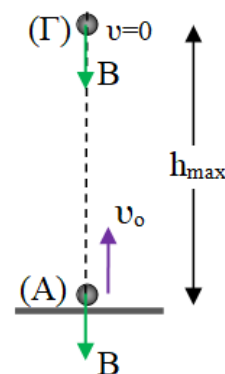
Σώμα Α

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgh_A \Leftrightarrow h_A = \frac{v_A^2}{2g}. \quad (1)$$

Σώμα Β

$$\text{Όμοια : } h_B = \frac{v_B^2}{2g}. \quad (2)$$

$$\text{Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) : } \frac{h_A}{h_B} = \frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{(2v)^2}{v^2} = \frac{4v^2}{v^2} \Rightarrow \frac{h_A}{h_B} = 4.$$



Εναλλακτική απάντηση

Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για κάθε σώμα.

Σώμα Α

$$K_{A(\alpha\rho\chi)} + U_{A(\alpha\rho\chi)} = K_{A(\text{τελ})} + U_{A(\text{τελ})} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_A v_A^2 + 0 = 0 + m_A g h_A \Leftrightarrow h_A = \frac{v_A^2}{2g} \xrightarrow{v_A=2v}$$

$$h_A = \frac{4v^2}{2g}. \quad (1)$$

Σώμα Β

$$\text{Όμοια : } h_B = \frac{v_B^2}{2g} \xrightarrow{v_B=v} h_B = \frac{v^2}{2g}. \quad (2)$$

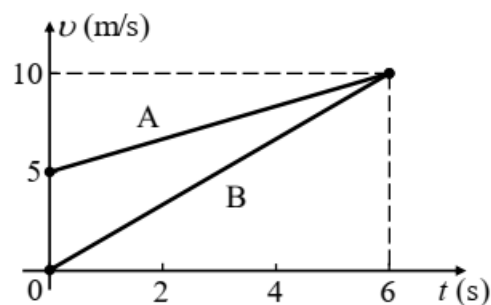
$$(1), (2) \Rightarrow h_A = 4h_B \Leftrightarrow \frac{h_A}{h_B} = 4.$$

43. (13556, 2.2) Στο σχήμα δίδονται τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου για δύο σώματα Α και Β, ίσων μαζών, που κινούνται ευθύγραμμα και παράλληλα.

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν W_A και W_B τα έργα των συνισταμένων δυνάμεων που είναι υπεύθυνες για τη κίνηση των σωμάτων στο χρονικό διάστημα από 0 s έως 6 s, ισχύει:

(α) $W_A = W_B$ (β) $W_A > W_B$ (γ) $W_A < W_B$



Μονάδες 4

Β) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

1ος τρόπος

Σώμα Α

$$\alpha_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \frac{(10-5) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6 \text{ s}} = \frac{5}{6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Delta x_A = E_{\text{KLMN}} = \frac{(10+5) \cdot 6}{2} \text{ m} = 45 \text{ m}.$$

$$W_A = F_A(\Delta x_A) = m \alpha_A (\Delta x_A). \quad (1)$$

Σώμα Β

$$\alpha_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6 \text{ s}} = \frac{5}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Delta x_B = E_{\text{LMN}} = \frac{10 \cdot 6}{2} \text{ m} = 30 \text{ m}.$$

$$W_B = F_B(\Delta x_B) = m \alpha_B (\Delta x_B). \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{W_A}{W_B} = \frac{\alpha_A (\Delta x_A)}{\alpha_B (\Delta x_B)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 45}{\frac{5}{3} \cdot 30} = \frac{3 \cdot 45}{6 \cdot 30} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{W_A}{W_B} < 1 \Rightarrow W_A < W_B.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για κάθε σώμα.

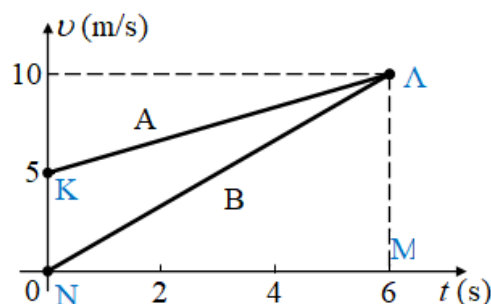
Σώμα Α

$$W_A = \Delta K_A \Leftrightarrow W_A = \frac{1}{2} m (v_A^2 - v_{0,A}^2). \quad (1)$$

Σώμα Β

$$W_B = \Delta K_B \Leftrightarrow W_B = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_{0,B}^2). \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{W_A}{W_B} = \frac{v_A^2 - v_{0,A}^2}{v_B^2 - v_{0,B}^2} = \frac{100 - 25}{100 - 0} = \frac{75}{100} \Rightarrow \frac{W_A}{W_B} < 1 \Rightarrow W_A < W_B.$$



44. (13623, 2.2) Σώμα μάζας m εκτοξεύεται με οριζόντια αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ κατά μήκος ακλόνητου, οριζόντιου δαπέδου, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ολ}$. Το σώμα διανύει διάστημα S μέχρι να ακινητοποιηθεί.

A. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σώματος – δαπέδου ήταν $2 \cdot \mu_{ολ}$, τότε το διάστημα S' που απαιτείται για την ακινητοποίηση του σώματος θα ήταν:

$$\alpha) S' = S \quad \beta) S' = 2 \cdot S \quad \gamma) S' = \frac{S}{2}$$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται 3 δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = mg. \quad (1)$$

Σύμφωνα με το νόμο της τριβής ολίσθησης :

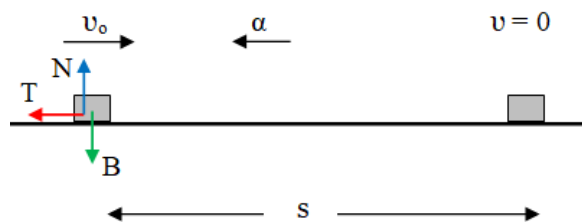
$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu mg. \quad (2)$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σώματος από τη στιγμή που εκτοξεύεται μέχρι να σταματήσει:

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow -T \cdot s = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 \xrightarrow{(2)} \mu m g s = \frac{1}{2} m v_0^2 \Leftrightarrow s = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \quad (3)$$

Όταν ο συντελεστής τριβής είναι $\mu' = 2\mu$, μέχρι να σταματήσει το σώμα θα διανύσει διάστημα :

$$s' = \frac{v_0^2}{2\mu' g} \xrightarrow{\mu' = 2\mu} s' = \frac{v_0^2}{2 \cdot 2\mu g} \xrightarrow{(3)} s' = \frac{s}{2}.$$



45. (13769, 2.1) Ο αστροναύτης Dave Scott στην αποστολή Apollo 15 το 1971 ρίχνει ένα σφυρί και ένα φτερό στην επιφάνεια της Σελήνης, η οποία δεν έχει ατμόσφαιρα, με στόχο να επιβεβαιώσει το νόμο της ελεύθερης πτώσης. Πράγματι, το πείραμα επιβεβαίωσε ότι ο Γαλιλαίος είχε δίκιο... όλα τα σώματα όταν αφεθούν από κάποιο ύψος να πέσουν ελεύθερα, φτάνουν στο έδαφος ταυτόχρονα. Έστω ότι κι εσείς αφήνετε να πέσει ελεύθερα ένα πανομοιότυπο σφυρί με αυτό του Scott και από το ίδιο ύψος που το άφησε αυτός στη Σελήνη. Σας δίνεται ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα, ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη $\vec{g}_Γ$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Σελήνη $\vec{g}_Σ$ συνδέονται με τη σχέση, $\vec{g}_Γ = 6 \cdot \vec{g}_Σ$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν $K_Γ$ και $K_Σ$ είναι οι κινητικές ενέργειες του σφυριού ακριβώς πριν ακουμπήσει στην επιφάνεια της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα, τότε θα ισχύει :

α) $K_Γ = \sqrt{6} \cdot K_Σ$, β) $K_Γ = K_Σ$, γ) $K_Γ = 6 \cdot K_Σ$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Σε κάθε περίπτωση το σφυρί κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σώματος από τη στιγμή που αφήνεται μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Στη Γη

$$K_Γ - 0 = W_{BΓ} \Leftrightarrow K_Γ = m g_Γ h. \quad (1)$$

Στη Σελήνη

$$K_Σ - 0 = W_{BΣ} \Leftrightarrow K_Σ = m g_Σ h. \quad (2)$$

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{K_Γ}{K_Σ} = \frac{g_Γ}{g_Σ} = 6 \Rightarrow K_Γ = 6 K_Σ .$$

Σχόλιο :

Η εκφώνηση αναφέρει στην αρχή : «Ο αστροναύτης . . . ρίχνει ένα σφυρί (δηλαδή το εκτοξεύει), ενώ στη συνέχεια αναφέρεται στο νόμο της ελεύθερης πτώσης !

Η σχέση $\vec{g}_Γ = 6 \cdot \vec{g}_Σ$ είναι λάθος γιατί υποδηλώνει ότι τα διανύσματα της επιτάχυνσης $\vec{g}_Γ$ στην επιφάνεια της Γης και της επιτάχυνσης $\vec{g}_Σ$ στην επιφάνεια της Σελήνης έχουν την ίδια κατεύθυνση, πράγμα το οποίο δεν ισχύει γενικά.

Η εκφώνηση έπρεπε να δίνει τη σχέση των μέτρων των επιταχύνσεων $g_Γ = 6 \cdot g_Σ$.

46. (13771, 2.1) Μία μοτοσυκλέτα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε οριζόντιο δρόμο και η κινητική της ενέργεια είναι ίση με K .

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν η ταχύτητα της μοτοσυκλέτα υποδιπλασιαστεί, τότε η κινητική της ενέργεια θα μειωθεί κατά:

α) $\frac{K}{4}$, β) $\frac{3K}{4}$, γ) K .

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα μέτρου v υπολογίζεται από τη σχέση : $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση :

$$K_{\text{αρχ}} = K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1)$$

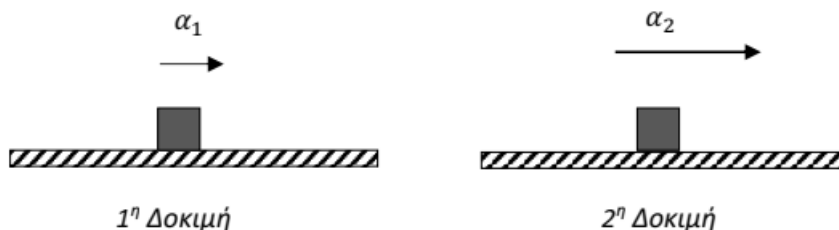
$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{v^2}{4} \xrightarrow{(1)} K_{\text{τελ}} = \frac{K}{4}.$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι :

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{K}{4} - K \Rightarrow \Delta K = -\frac{3K}{4}.$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια θα μειωθεί κατά $\frac{3K}{4}$.

47. (13780, 2.2)



Μία ομάδα μαθητών της Α Λυκείου πειραματίζεται στο Εργαστήριο Φυσικής του σχολείου τους, πραγματοποιώντας μία εργαστηριακή άσκηση. Οι μαθητές διαθέτουν όργανο μέτρησης επιτάχυνσης (επιταχυνσιόμετρο) και θέλουν να υπολογίσουν κινητική ενέργεια μία δεδομένη χρονική στιγμή. Για τις ανάγκες της άσκησης χρησιμοποιούν τον ίδιο κύβο, που στην αρχή κάθε δοκιμής ηρεμεί στον οριζόντιο πάγκο εργασίας. Χρησιμοποιώντας το επιταχυνσιόμετρο, διαπίστωσαν ότι ο κύβος στην 1^η δοκιμή κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}_1$, ενώ στην 2^η κινείται επίσης με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}_2 = 2 \cdot \vec{a}_1$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν K_1 και K_2 είναι οι κινητικές ενέργειες του κύβου στην 1^η και 2^η δοκιμή αντίστοιχα, για την ίδια ακριβώς χρονική διάρκεια κίνησης, τότε :

α) $K_2 = K_1$, β) $K_2 = 4 \cdot K_1$, γ) $K_2 = 2 \cdot K_1$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σε κάθε περίπτωση ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Η ταχύτητα του κύβου μετά από χρόνο t υπολογίζεται από τη σχέση : $v = at$.

1η δοκιμή

$$v_1 = a_1 t. \quad (1)$$

2η δοκιμή

$$v_2 = a_2 t. \quad (2)$$

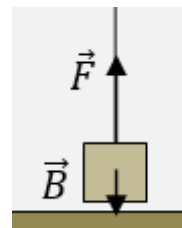
$$\text{Αφού } a_2 = 2a_1 \xrightarrow{(1),(2)} v_2 = 2v_1. \quad (3)$$

Η κινητική ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση : $K = \frac{1}{2}mv^2$. Επομένως :

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (4)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \xrightarrow{(3)} K_2 = \frac{1}{2}m(2v_1)^2 = \frac{1}{2}m \cdot 4v_1^2 \xrightarrow{(4)} K_2 = 4K_1.$$

48. (14209, 2.2) Ένα μικρό κιβώτιο βάρους $\vec{B}$ είναι αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Κάποια στιγμή ασκείται στο κιβώτιο σταθερή κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς τα πάνω, για το μέτρο της οποίας ισχύει η σχέση $F = 3 \cdot B$, με αποτέλεσμα το κιβώτιο αμέσως να αρχίσει να κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω.



Όταν το κιβώτιο απέχει κατά ύψος h_1 από το δάπεδο, η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται, οπότε το κιβώτιο φτάνει σε ύψος h_2 από το δάπεδο, μέχρι στιγμιαία να μηδενιστεί η ταχύτητά του.

Αν μπορούμε να αγνοήσουμε τις αντιστάσεις του αέρα και τα ύψη είναι αρκετά μικρά, ώστε το βάρος του κιβωτίου να θεωρείται σταθερό, τότε για το ύψος h_2 , ισχύει η σχέση:

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

- i. $h_2 = 3 \cdot h_1$ ii. $h_2 = 2 \cdot h_1$ iii. $h_2 = 4 \cdot h_1$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

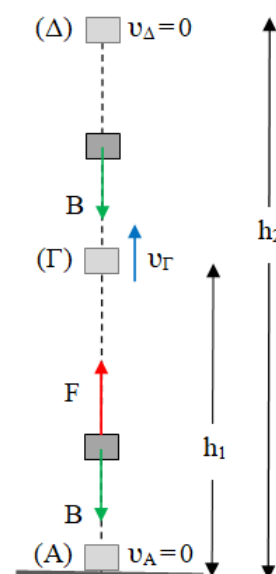
Απάντηση

Στη διάρκεια της κίνησης ασκούνται στο σώμα δύο δυνάμεις : η δύναμη $\vec{F}$ (από το σημείο A του εδάφους μέχρι το σημείο Γ σε ύψος h_1) και το βάρος $\vec{B}$ σε όλη τη διαδρομή από το A μέχρι το σημείο Δ στο οποίο μηδενίζεται η ταχύτητα (σε ύψος h_2).

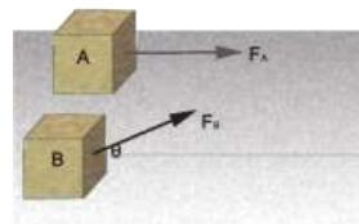
Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση από το σημείο A μέχρι το σημείο Δ.

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_F + W_B = K_\Delta - K_A \Leftrightarrow F \cdot h_1 - B \cdot h_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$F \cdot h_1 = B \cdot h_2 \xrightarrow{F=3B} 3B \cdot h_1 = B \cdot h_2 \Leftrightarrow h_2 = 3h_1.$$



49. (14842, 2.2) Δυο κιβώτια A και B με ίδιες μάζες βρίσκονται δίπλα-δίπλα ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκούνται στα κιβώτια δυο σταθερές δυνάμεις $\vec{F}_A$ και $\vec{F}_B$ ίσων μέτρων. Οι διευθύνσεις των δυνάμεων βρίσκονται σε παράλληλα κατακόρυφα επίπεδα, έτσι ώστε η $\vec{F}_A$ να έχει οριζόντια διεύθυνση και η $\vec{F}_B$ να σχηματίζει γωνία 60° με την οριζόντια, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Τα δυο κιβώτια αρχίζουν να κινούνται ευθύγραμμα στο επίπεδο. Δίδεται ότι η επίδραση το αέρα είναι αμελητέα.



A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Αν, μετά από ίσες μετατοπίσεις από το σημείο εκκίνησης τους, τα κιβώτια έχουν ταχύτητες v_A και v_B αντίστοιχα τότε ισχύει:

(α) $v_A = v_B$

(β) $v_A = 2 \cdot v_B$

(γ) $v_A = \sqrt{2} \cdot v_B$

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Δίδονται: $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\eta \mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ σε κάθε περίπτωση.

Κιβώτιο A

$$K_{\text{τελ}(A)} - K_{\text{αρχ}(A)} = \Sigma W_A \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 - 0 = F(\Delta x) \Leftrightarrow$$

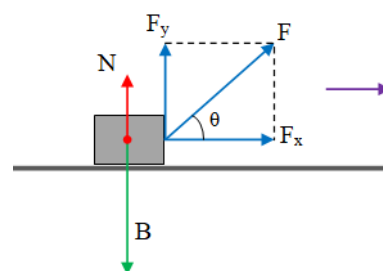
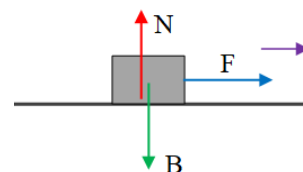
$$v_A^2 = \frac{2F(\Delta x)}{m}. \quad (1)$$

Κιβώτιο B

$$K_{\text{τελ}(B)} - K_{\text{αρχ}(B)} = \Sigma W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = F(\Delta x) \sin 60^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = F(\Delta x) \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_B^2 = \frac{F(\Delta x)}{m}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow v_A^2 = 2v_B^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{2} v_B.$$



50. (14843, 2.2) Ένα κιβώτιο είναι αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο κιβώτιο ασκείται οριζόντια δύναμη που η τιμή της μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα της διπλανής εικόνας.

Η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Η κινητική ενέργεια του κιβωτίου γίνεται μέγιστη τη χρονική στιγμή

(α) t_1

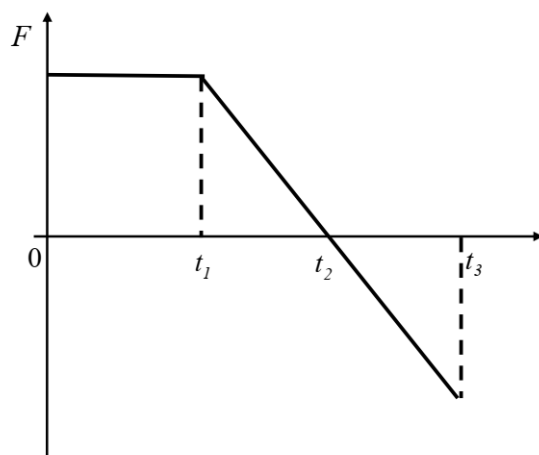
(β) t_2

(γ) t_3

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Αφού το επίπεδο είναι λείο, η συνισταμένη δύναμη έχει αλγεβρική τιμή : $\Sigma F_x = F$.

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 η συνισταμένη δύναμη έχει θετική φορά ($F > 0$).

Αφού το κιβώτιο ήταν ακίνητο αρχικά, με την επίδραση της δύναμης επιταχύνεται προς τη θετική φορά και η κινητική του ενέργεια αυξάνεται.

Τη χρονική στιγμή t_2 το κιβώτιο έχει ταχύτητα $v_2 > 0$.

Από τη χρονική στιγμή t_2 μέχρι τη χρονική στιγμή t_3 η συνισταμένη δύναμη έχει αρνητική φορά ($F < 0$), άρα η επιτάχυνση είναι αρνητική. Αφού $v > 0$ και $a < 0$, το κιβώτιο επιβραδύνεται και η κινητική του ενέργεια μειώνεται.

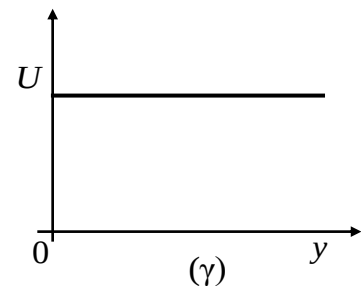
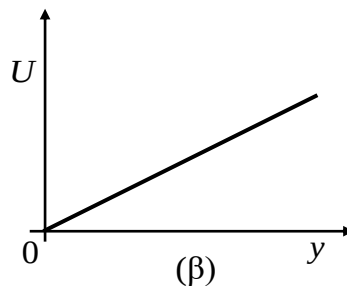
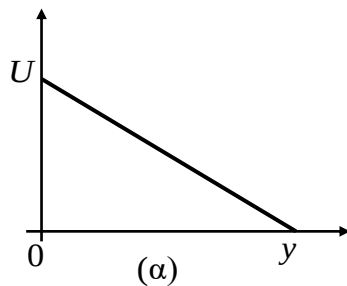
Επομένως το κιβώτιο έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια τη χρονική στιγμή t_2 , κατά την οποία μηδενίζεται η δύναμη.

Δυναμική ενέργεια

51. (7982, B1) Μικρή σφαίρα εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω. Η επιτάχυνση της βαρύτητας (g) είναι σταθερή και ως επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια θεωρείται το έδαφος.

A) Να επιλέξετε την σωστή πρόταση.

Η γραφική παράσταση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας (U) της σφαίρας σε συνάρτηση με το ύψος (y) από το σημείο εκτόξευσης έχει τη μορφή του διαγράμματος:



Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

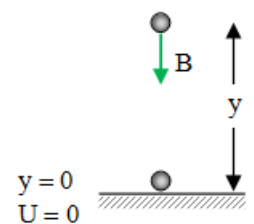
Απάντηση

Η δυναμική ενέργεια U της σφαίρας όταν βρίσκεται σε ύψος y από το έδαφος, υπολογίζεται από τη σχέση :

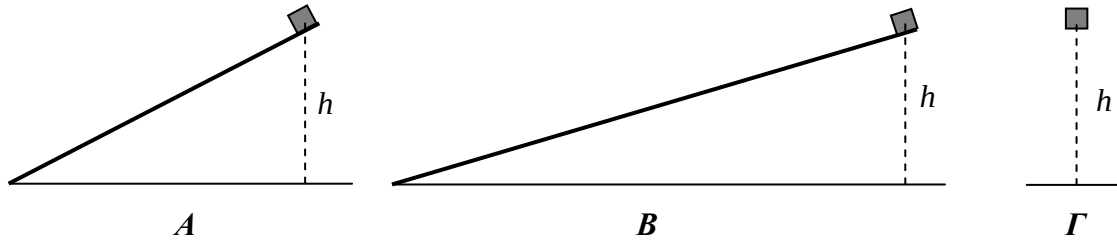
$$U = mgy . \quad (1)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1), η δυναμική ενέργεια U είναι ανάλογη με το ύψος y , άρα το διάγραμμα $U = f(y)$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Το σωστό διάγραμμα είναι το (β).



52. (8001, B2)



Δύο κιβώτια ίσης μάζας αφήνονται να ολισθήσουν από την κορυφή δύο λείων κεκλιμένων επιπέδων διαφορετικής κλίσης, αλλά από το ίδιο ύψος h . Ένα τρίτο ίδιο κιβώτιο αφήνεται από ύψος h και εκτελεί ελεύθερη πτώση.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν W_A , W_B και W_Γ τα έργα του βάρους στις τρεις περιπτώσεις, τότε:

- α)** $W_A = W_B = W_\Gamma$ **β)** $W_A > W_B > W_\Gamma$ **γ)** $W_A < W_B < W_\Gamma$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

1ος τρόπος

Το έργο του βάρους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά μόνο από την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης. Επομένως :

$$W_A = m_A gh .$$

$$W_B = m_B gh .$$

$$W_\Gamma = m_\Gamma gh .$$

$$\text{Αφού } m_A = m_B = m_\Gamma \Rightarrow W_A = W_B = W_\Gamma .$$

2ος τρόπος

Το έργο του βάρους είναι ίσο με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας $U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}}$, όταν το σώμα μετακινείται από την αρχική θέση μέχρι το έδαφος : $W = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}}$.

Θεωρώ σαν επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια το οριζόντιο έδαφος.

Για κάθε κιβώτιο ισχύει :

$$U_{\text{αρχ}} = mgh , \quad U_{\text{τελ}} = 0 .$$

$$\text{Επομένως : } W_A = W_B = W_\Gamma = mgh .$$

Μηχανική ενέργεια

53. (7983, B2) Σφαίρα μικρών διαστάσεων βρίσκεται ακίνητη σε μικρό ύψος h πάνω από το έδαφος. Στο ύψος αυτό με επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια το έδαφος, η σφαίρα έχει δυναμική ενέργεια ίση με 120 J. Η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη, οπότε εκτελεί ελεύθερη πτώση με την επίδραση του αέρα να θεωρείται αμελητέα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Όταν η σφαίρα βρεθεί σε απόσταση ίση με $h/3$, από το σημείο εκκίνησης, τότε η δυναμική της ενέργεια U και η κινητική της ενέργεια K θα είναι αντίστοιχα:

(α) $U = 40 \text{ J}, K = 80 \text{ J}$

(β) $U = 80 \text{ J}, K = 40 \text{ J}$

(γ) $U = 90 \text{ J}, K = 30 \text{ J}$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σε ύψος h (θέση A) η σφαίρα έχει δυναμική ενέργεια $U_A = mgh = 120 \text{ J}$. (1)

1ος τρόπος

Όταν η σφαίρα απέχει $h/3$ από το A (θέση Γ), η απόστασή της από το έδαφος είναι $2h/3$, άρα έχει δυναμική ενέργεια :

$$U_{\Gamma} = \frac{2}{3}mgh \xrightarrow{(1)} U_{\Gamma} = \frac{2}{3}U_A = \frac{2}{3} \cdot 120 \text{ J} \Rightarrow U_{\Gamma} = 80 \text{ J}.$$

Αφού δεν υπάρχουν τριβές, η μηχανική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή :

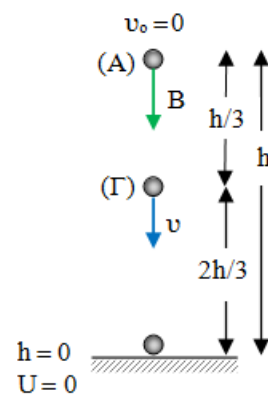
$$E_{\text{μηχ}(A)} = E_{\text{μηχ}(\Gamma)} \Leftrightarrow K_A + U_A = K_{\Gamma} + U_{\Gamma} \xrightarrow{K_A = 0} K_{\Gamma} = U_A - U_{\Gamma} \Rightarrow K_{\Gamma} = 120 \text{ J} - 80 \text{ J} \Rightarrow K_{\Gamma} = 40 \text{ J}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από την αρχική θέση A μέχρι τη θέση Γ σε απόσταση $h/3$:

$$K_{\Gamma} - K_A = \Sigma W \Leftrightarrow K_{\Gamma} - 0 = W_B \Leftrightarrow K_{\Gamma} = mg \frac{h}{3}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow K_{\Gamma} = \frac{1}{3}U_A \Rightarrow K_{\Gamma} = \frac{1}{3} \cdot 120 \text{ J} \Rightarrow K_{\Gamma} = 40 \text{ J}.$$



54. (7992, B1) Α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις τιμές της κινητικής, δυναμικής και μηχανικής ενέργειας ενός σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση. Η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Κινητική Ενέργεια (J)	Δυναμική Ενέργεια (J)	Μηχανική Ενέργεια (J)
0	80	
20		
	40	
80		

Μονάδες 7

Β) Να αιτιολογήσετε τις τιμές που επιλέξατε

Μονάδες 5

Απάντηση

Αφού το σώμα κινείται με την επίδραση του βάρους, η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή :

$$E_{\text{μηχ}} = K_A + U_A = 80 \text{ J.}$$

Εφαρμόζω το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τις θέσεις Β, Γ, Δ.

θέση Β

$$E_{\text{μηχ}} = K_B + U_B \Leftrightarrow U_B = E_{\text{μηχ}} - K_B \Rightarrow U_B = 80 \text{ J} - 20 \text{ J} = 60 \text{ J.}$$

θέση Γ

$$E_{\text{μηχ}} = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow K_\Gamma = E_{\text{μηχ}} - U_\Gamma \Rightarrow K_\Gamma = 80 \text{ J} - 40 \text{ J} = 40 \text{ J.}$$

θέση Δ

$$E_{\text{μηχ}} = K_\Delta + U_\Delta \Leftrightarrow U_\Delta = E_{\text{μηχ}} - K_\Delta \Rightarrow U_\Delta = 80 \text{ J} - 80 \text{ J} = 0 \text{ J.}$$

θέση	Κινητική Ενέργεια (J)	Δυναμική Ενέργεια (J)	Μηχανική Ενέργεια (J)
A	0	80	80
B	20	60	80
Γ	40	40	80
Δ	80	0	80

55. (8000, B2) Μικρό σφαιρίδιο μάζας m αφήνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ s από μικρό ύψος h να εκτελέσει ελεύθερη πτώση. Έστω $t_{ολικο}$ το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φτάσει το σφαιρίδιο στο έδαφος και t_E το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε η δυναμική του ενέργεια να γίνει ίση με την κινητική του.

Ως επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια θεωρείται το οριζόντιο έδαφος και η επίδραση του αέρα αμελητέα.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Ο λόγος $\frac{t_{ολικο}}{t_E}$ ισούται με:

- α) $\sqrt{2}$ β) $\frac{3}{2}$ γ) 2

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το ύψος h και ο χρόνος κίνησης $t_{ολ}$ της σφαίρας μέχρι να φτάσει στο έδαφος, συνδέονται με τη σχέση :

$$h = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2. \quad (1)$$

Εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για την αρχική θέση A και τη θέση E σε ύψος h_E , στο οποίο ισχύει : $K_E = U_E$.

$$K_E + U_E = K_A + U_A \xrightarrow{K_E = U_E} 2U_E = U_A \Leftrightarrow 2mgh_E = mgh \Leftrightarrow 2h_E = h \Leftrightarrow h_E = \frac{h}{2}. \quad (2)$$

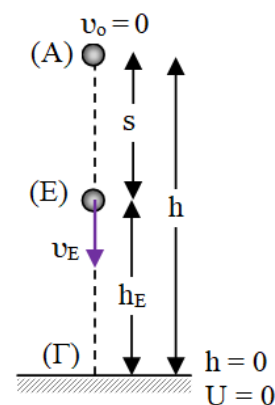
Η απόσταση s που διάνυσε η σφαίρα στη χρονική διάρκεια t_E υπολογίζεται από τη σχέση :

$$s = \frac{1}{2} g t_E^2. \quad (3)$$

Ισχύει :

$$s = h - h_E \xrightarrow{(2)} s = h - \frac{h}{2} \Leftrightarrow s = \frac{h}{2} \Leftrightarrow 2s = h \xrightarrow{(1), (3)} 2 \cdot \frac{1}{2} g t_E^2 = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = 2t_E^2 \Leftrightarrow$$

$$t_{ολ} = t_E \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{t_{ολ}}{t_E} = \sqrt{2}.$$



56. (8015, B2) Μία μεταλλική σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Σε σημείο Α της τροχιάς της έχει ταχύτητα μέτρου v και κινητική ενέργεια ίση με K . Σε ένα άλλο σημείο Β που βρίσκεται χαμηλότερα από το Α το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας είναι ίσο με $2v$.

Α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας της σφαίρας από τη θέση Α στην θέση Β είναι ίση με:

α) $-3K$

β) $2K$

γ) $-4K$

Μονάδες 4

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζω τη σχέση της κινητικής ενέργειας στις δύο θέσεις της σφαίρας.

Θέση Α: $K_A = K = \frac{1}{2}mv^2$. (1)

Θέση Β: $K_B = \frac{1}{2}m(2v)^2 = \frac{1}{2}m \cdot 4v^2 \xrightarrow{(1)} K_B = 4K$. (2)

Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για τις θέσεις Α, Β :

$$K_B + U_B = K_A + U_A \Leftrightarrow U_B - U_A = K_A - K_B \xrightarrow{(1),(2)} \Delta U = K - 4K \Leftrightarrow \Delta U = -3K.$$

57. (8018, B1) Μικρή σφαίρα αφήνεται από αρχικό μικρό ύψος H , πάνω από το έδαφος και εκτελώντας ελεύθερη πτώση πέφτει στο έδαφος.

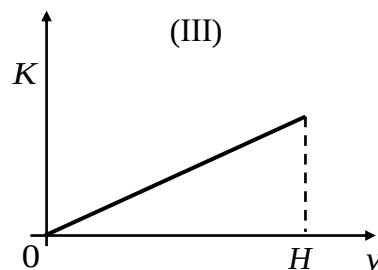
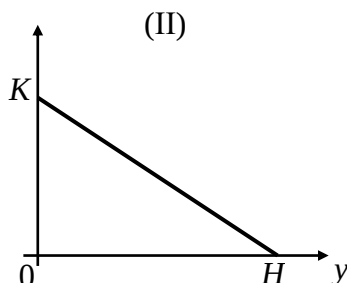
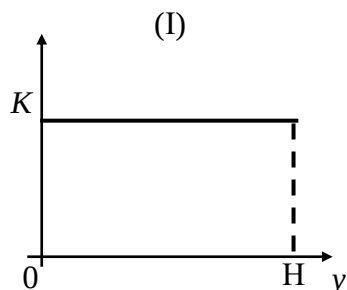
A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας (K) της σφαίρας σε συνάρτηση με το ύψος (y) από το έδαφος, παριστάνεται σωστά από το διάγραμμα:

(α) I

(β) II

(γ) III



Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Σε ύψος y από το έδαφος η σφαίρα έχει δυναμική ενέργεια $U = mgy$. (1)

Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Σύμφωνα με το ΘΔΜΕ, σε κάθε θέση της σφαίρας ισχύει :

$$K + U = E_{\text{μηχ}} \Leftrightarrow K = E_{\text{μηχ}} - U \xrightarrow{(1)} K = E_{\text{μηχ}} - mgy. \quad (2)$$

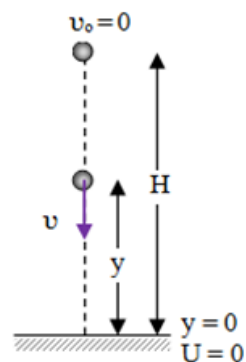
$$\text{Σε ύψος } y = H : v_0 = 0 \Rightarrow K = 0 \xrightarrow{(2)} E_{\text{μηχ}} = mgH. \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \boxed{K = mgH - mgy}. \quad (4)$$

$$\text{Για } y = H \xrightarrow{(4)} K = 0.$$

$$\text{Για } y = 0 \xrightarrow{(4)} K = mgH.$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το II.



58. (8022, B1) Ένα σώμα μάζας 2 kg βρίσκεται στο έδαφος (θέση Α) με μηδενική δυναμική ενέργεια. Κάποια χρονική στιγμή ασκείται στο σώμα σταθερή κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 30 N με αποτέλεσμα μετά από λίγο να βρίσκεται στη θέση Γ σε ύψος $h = 5$ m πάνω από το έδαφος. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

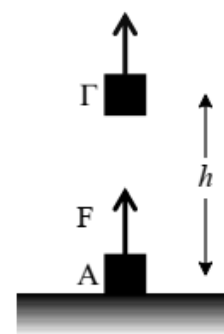
A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

(α) Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος στη θέση Γ είναι ίση με 50 J.

(β) Η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση Γ είναι ίση με 150 J.

(γ) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος από τη θέση Α μέχρι τη θέση Γ είναι ίση με 50 J.

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

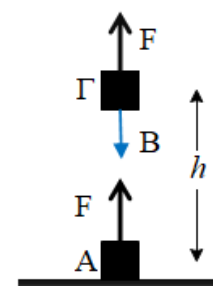
Η δυναμική ενέργεια του σώματος σε ύψος h είναι :

$$U = mgh = 2 \cdot 10 \cdot 5 \text{ J} = 100 \text{ J.} \quad [(\alpha) : \text{Λάθος}]$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$:

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow \Delta K = W_F + W_B \Leftrightarrow \Delta K = Fh - mgh \Rightarrow \Delta K = (30 - 20) \cdot 5 \text{ J} = 50 \text{ J.}$$

$[(\gamma) : \text{Σωστό}]$



$$\text{Ισχύει : } K_{\Gamma} - K_A = \Delta K \xrightarrow{K_A = 0} K_{\Gamma} = \Delta K = 50 \text{ J.} \quad [(\beta) : \text{Λάθος}]$$

Σημείωση

Ο υπολογισμός της κινητικής ενέργειας K_{Γ} δεν είναι απαραίτητος, αφού σωστή απάντηση είναι η (γ).

59. (8031, B1) Μία μπάλα κινείται υπό την επίδραση μόνο του βάρους της και διέρχεται διαδοχικά από τα σημεία Α, Β, Γ.

Α) Αφού μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας να τον συμπληρώσετε. Στον πίνακα δίνονται κάποιες από τις τιμές της κινητικής, της δυναμικής και της μηχανικής ενέργειας της μπάλας στα σημεία Α, Β, Γ.

Σημείο	Κινητική ενέργεια (J)	Δυναμική ενέργεια (J)	Μηχανική ενέργεια (J)
Α		80	100
Β	40		
Γ		10	

Μονάδες 4

Β) Να εξηγήσετε πως υπολογίσατε κάθε τιμή ενέργειας με την οποία συμπληρώσατε τον πίνακα.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού η μπάλα κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή :

$E_{\text{μηχ}} = 100 \text{ J} = \text{σταθερή}.$

Εφαρμόζω το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τις θέσεις Α, Β, Γ.

Θέση Α

$$K_A + U_A = E_{\text{μηχ}} \Leftrightarrow K_A = E_{\text{μηχ}} - U_A \Rightarrow K_A = 100 \text{ J} - 80 \text{ J} \Rightarrow K_A = 20 \text{ J}.$$

Θέση Β

$$K_B + U_B = E_{\text{μηχ}} \Leftrightarrow U_B = E_{\text{μηχ}} - K_B \Rightarrow U_B = 100 \text{ J} - 40 \text{ J} \Rightarrow U_B = 60 \text{ J}.$$

Θέση Γ

$$K_\Gamma + U_\Gamma = E_{\text{μηχ}} \Leftrightarrow K_\Gamma = E_{\text{μηχ}} - U_\Gamma \Rightarrow K_\Gamma = 100 \text{ J} - 10 \text{ J} \Rightarrow K_\Gamma = 90 \text{ J}.$$

60. (8034, B1) Μικρή σφαίρα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ αφήνεται από ύψος 180 m πάνω από την επιφάνεια του εδάφους να πέσει ελεύθερα.

Θεωρείστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή και ίση με $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, ότι η επίδραση του αέρα

είναι αμελητέα και ότι ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας θεωρούμε το έδαφος.

Να συμπληρώσετε τα κενά του παρακάτω πίνακα και να δικαιολογήσετε τις τιμές που συμπληρώσατε.

Ύψος από το έδαφος $h \text{ (m)}$	Κινητική ενέργεια $K \text{ (J)}$	Δυναμική ενέργεια $U \text{ (J)}$	Ταχύτητα $v \text{ (m/s)}$
180	0		0
100			
0		0	

Μονάδες 12

Απάντηση

Θέση Α

Τη στιγμή που αφήνεται η σφαίρα έχει μόνο δυναμική ενέργεια : $U_A = mgh_A = 2 \cdot 10 \cdot 180 \text{ J} = 3600 \text{ J}$.

Αφού η σφαίρα κινείται με την επίδραση του βάρους, η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή :

$$E_{\text{μηχ}} = U_A = 3600 \text{ J}.$$

Θέση Β

$$U_B = mgh_B = 2 \cdot 10 \cdot 100 \text{ J} = 2000 \text{ J}.$$

$$K_B + U_B = E_{\text{μηχ}} \Leftrightarrow K_B = E_{\text{μηχ}} - U_B \Rightarrow K_B = 3600 \text{ J} - 2000 \text{ J} \Rightarrow$$

$$K_B = 1600 \text{ J}.$$

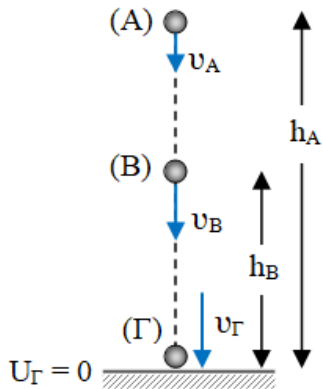
$$K_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \Leftrightarrow v_B = \sqrt{\frac{2K_B}{m}} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot 1600}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_B = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Θέση Γ

$$U_\Gamma = mgh_\Gamma = 2 \cdot 10 \cdot 0 \text{ J} = 0 \text{ J}.$$

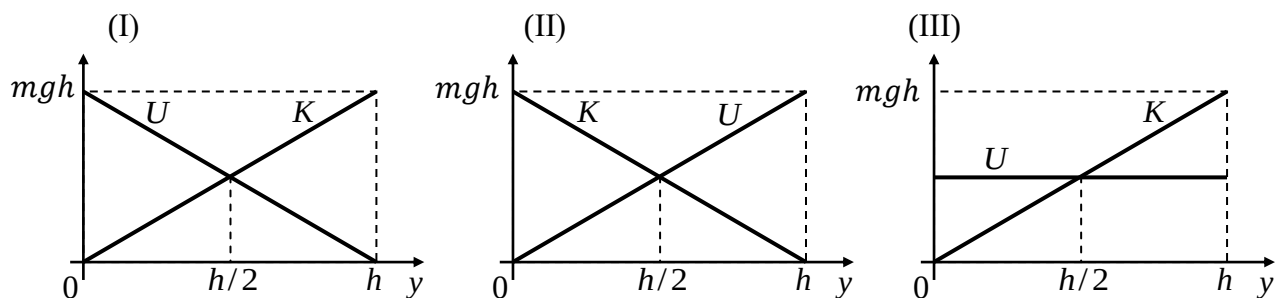
$$K_\Gamma + U_\Gamma = E_{\text{μηχ}} \Leftrightarrow K_\Gamma = E_{\text{μηχ}} - U_\Gamma \Rightarrow K_\Gamma = 3600 \text{ J}.$$

$$K_\Gamma = \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 \Leftrightarrow v_\Gamma = \sqrt{\frac{2K_\Gamma}{m}} \Rightarrow v_\Gamma = \sqrt{\frac{2 \cdot 3600}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\Gamma = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Θέση	Ύψος από το έδαφος $h \text{ (m)}$	Κινητική ενέργεια $K \text{ (J)}$	Δυναμική ενέργεια $U \text{ (J)}$	Ταχύτητα $v \text{ (m/s)}$
A	180	0	3600	0
B	100	1600	2000	40
Γ	0	3600	0	60

61. (8041, B1) Μικρή σφαίρα αφήνεται να πέσει από μικρό ύψος h πάνω από το έδαφος, εκτελώντας ελεύθερη πτώση. Θεωρείστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή, ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα και ότι επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το έδαφος.



A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Οι γραφικές παραστάσεις της κινητικής (K) και της δυναμικής ενέργειας (U) της σφαίρας σε συνάρτηση με το ύψος (y) από το έδαφος παριστάνονται στο σχήμα:

Μονάδες 4

(α) I

(β) II

(γ) III

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η δυναμική ενέργεια της σφαίρας σε ύψος y από το έδαφος, υπολογίζεται από τη σχέση : $U = mgy$. (1)

Από τη σχέση (1) φαίνεται ότι η δυναμική ενέργεια U είναι ανάλογη με το ύψος y , άρα το διάγραμμα της σχέσης $U = f(y)$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η μηχανική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή : $E_{\text{μηχ}} = \text{σταθερή}$.

Ισχύει : $K + U = E_{\text{μηχ}} \Leftrightarrow K = E_{\text{μηχ}} - U$. (2)

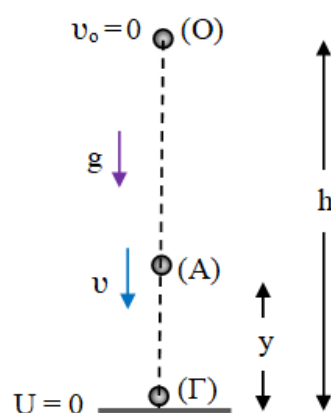
Σε ύψος $y = h$:

$v_o = 0 \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = 0 \xrightarrow{(2)} E_{\text{μηχ}} = U_{\text{αρχ}} = mgh$. (3)

(2) $\xrightarrow{(1), (3)} K = mgh - mgy$. (4)

Σύμφωνα με τη σχέση (4), το διάγραμμα κινητικής ενέργειας – ύψους $K = f(y)$ είναι ευθεία με αρνητική κλίση.

Το διάγραμμα που ικανοποιεί τα δύο συμπεράσματα είναι το II.



62. (8054, B2) Σώμα μάζας 1 Kg πέφτει από ύψος $h = 5$ m πάνω από το έδαφος. Το σώμα φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου 5 m/sec. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$ m/s².

A) Διατηρείται σταθερή η μηχανική ενέργεια κατά τη διάρκεια της πτώσης;

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 9

Απάντηση

Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος.

Η αρχική μηχανική ενέργεια του σώματος είναι :

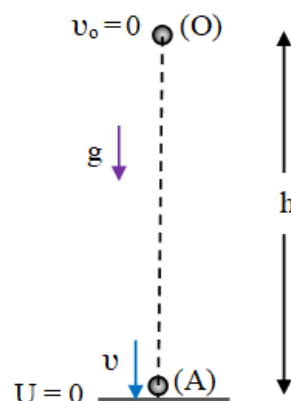
$$E_{\text{μηχ}}(\text{αρχ}) = U_{\text{αρχ}} + K_{\text{αρχ}} = mgh + 0 = 1 \cdot 10 \cdot 5 \text{ J} = 50 \text{ J}.$$

Η μηχανική ενέργεια του σώματος τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, είναι :

$$E_{\text{μηχ}}(\text{τελ}) = U_{\text{τελ}} + K_{\text{τελ}} = 0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5^2 \text{ J} = 12,5 \text{ J}.$$

Διαπιστώνω ότι : $E_{\text{μηχ}}(\text{τελ}) < E_{\text{μηχ}}(\text{αρχ})$,

δηλαδή η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται σταθερή.



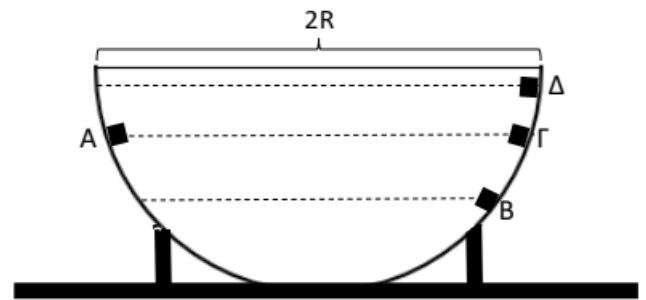
63. (11929, B1) Ο ημικυκλικός οδηγός της εικόνας είναι λείος και ακλόνητος.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν σώμα (αμελητέων διαστάσεων) αφεθεί ελεύθερο από σημείο A του οδηγού και κινείται παραμένοντας διαρκώς σε επαφή με τον οδηγό, τότε η ταχύτητα του σώματος θα μηδενιστεί για πρώτη φορά, όταν αυτό βρίσκεται στο σημείο:

α) Δ, β) Β, γ) Γ

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ και κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τον οδηγό.

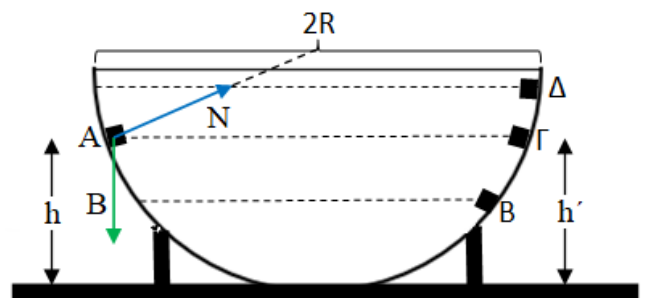
Η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο, αφού είναι συνεχώς κάθετη στις στοιχειώδεις μετατοπίσεις, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Συμβολίζω με h το ύψος του σημείου A και h' το ύψος του σημείου στο οποίο σταματά το σώμα.

Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ :

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow 0 + mgh' = 0 + mgh \Leftrightarrow h' = h.$$

Άρα το σώμα θα φτάσει στο ίδιο ύψος με το σημείο A, δηλαδή θα σταματήσει στο σημείο Γ.



64. (12855, B1) Ένα σώμα κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Για το πηλίκο της μεταβολής της κινητικής ενέργειας ΔK προς την μεταβολή της γήινης βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ΔU του σώματος ισχύει:

α) $\frac{\Delta K}{\Delta U} = 1$ β) $\frac{\Delta K}{\Delta U} = -1$ γ) $\frac{\Delta K}{\Delta U} \neq 1$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού το σώμα κινείται με την επίδραση του βάρους, η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

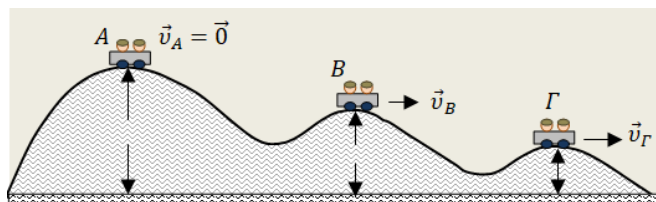
Όταν το σώμα μετακινηθεί από τη θέση (1) στη θέση (2) ισχύει :

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \Leftrightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \Leftrightarrow K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1) \Leftrightarrow \Delta K = -\Delta U \Leftrightarrow \frac{\Delta K}{\Delta U} = -1.$$

Σχόλιο

Οι απαντήσεις β), γ) επικαλύπτονται, αφού : $-1 \neq 1$.

65. (13103, B2) Ένα βαγονάκι που μεταφέρει παιδιά, κινείται στην σιδηροτροχιά ενός λούνα-παρκ, η οποία έχει το σχήμα που φαίνεται στην εικόνα. Κάποια στιγμή βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο Α χωρίς ταχύτητα και εξαιτίας μιας πολύ μικρής κλίσης που έχει η τροχιά στο σημείο αυτό, αρχίζει να κινείται. Έτσι κάποια στιγμή περνάει από την κορυφή Β με ταχύτητα $\vec{v}_B$ και μια επόμενη στιγμή από την κορυφή Γ με ταχύτητα $\vec{v}_\Gamma$.



Οι κορυφές Α, Β και Γ, βρίσκονται σε ύψη h_A , h_B και h_Γ αντίστοιχα, από το οριζόντιο δάπεδο του λούνα-παρκ, για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$h_B = \frac{3}{4} \cdot h_A \quad \text{και} \quad h_\Gamma = \frac{1}{4} \cdot h_A.$$

Θεωρήστε, ότι μπορούμε να αγνοήσουμε τις τριβές και την αντίσταση του αέρα. Επίσης θεωρήστε ότι το βαγονάκι δεν φέρει τροχούς και απλά ολισθαίνει στις σιδηροτροχιές.

Α) Να επιλέξετε τη σωστή σχέση που ισχύει, για τα μέτρα των ταχυτήτων του βαγονιού στις κορυφές Β και Γ:

- i. $v_\Gamma = v_B$ ii. $v_\Gamma = 3 \cdot v_B$ iii. $v_\Gamma = \sqrt{3} \cdot v_B$

Μονάδες 4

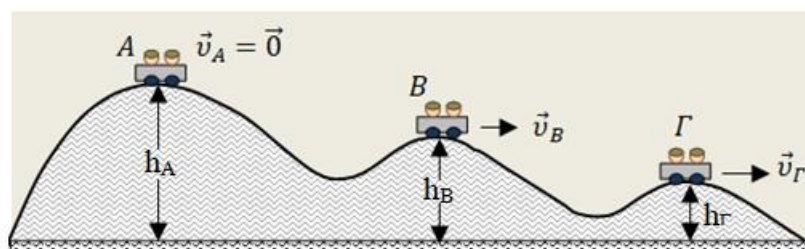
Β) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού δεν υπάρχουν τριβές, η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Ορίζω σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ.



διαδρομή Α → Β

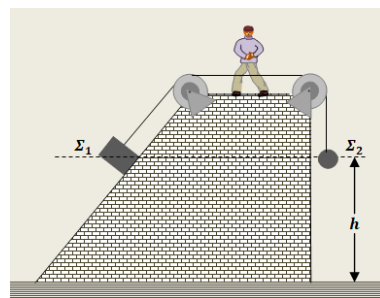
$$K_A + U_A = K_B + U_B \Leftrightarrow 0 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \Leftrightarrow g(h_A - h_B) = \frac{1}{2}v_B^2 \xrightarrow{h_B = \frac{3}{4}h_A} g\frac{h_A}{4} = \frac{1}{2}v_B^2 \Leftrightarrow gh_A = 2v_B^2. \quad (1)$$

διαδρομή Α → Γ

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow 0 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 + mgh_\Gamma \Leftrightarrow g(h_A - h_\Gamma) = \frac{1}{2}v_\Gamma^2 \xrightarrow{h_\Gamma = \frac{1}{4}h_A} g\frac{3h_A}{4} = \frac{1}{2}v_\Gamma^2 \Leftrightarrow gh_A = \frac{2}{3}v_\Gamma^2. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{2}{3}v_\Gamma^2 = 2v_B^2 \Leftrightarrow v_\Gamma^2 = 3v_B^2 \Leftrightarrow v_\Gamma = \sqrt{3}v_B.$$

66. (13105, B1) Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 , μικρών σχετικά διαστάσεων, συγκρατούνται αρχικά ακίνητα, στο ίδιο ύψος από οριζόντιο δάπεδο, με τη διάταξη του σχήματος. Το σώμα Σ_1 στηρίζεται σε κεκλιμένο λείο δάπεδο, ενώ το Σ_2 κρέμεται ελεύθερο στο άκρο του κατακόρυφου νήματος. Για τις μάζες των δύο σωμάτων ισχύει η σχέση $m_1 = 4 \cdot m_2$. Κάποια στιγμή, κόψαμε το νήμα, οπότε τα δύο σώματα, άρχισαν να κινούνται, εξαιτίας των βαρών τους. Το Σ_1 κινείται πάνω στο λείο κεκλιμένο δάπεδο και το Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση. Οι αντιστάσεις του αέρα αγνοούνται.



A) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 , φτάνουν στο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ αντίστοιχα, για τα μέτρα των οποίων ισχύει η σχέση:

- i. $v_1 = v_2$ ii. $v_1 = 2 \cdot v_2$ iii. $v_2 = 2 \cdot v_1$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

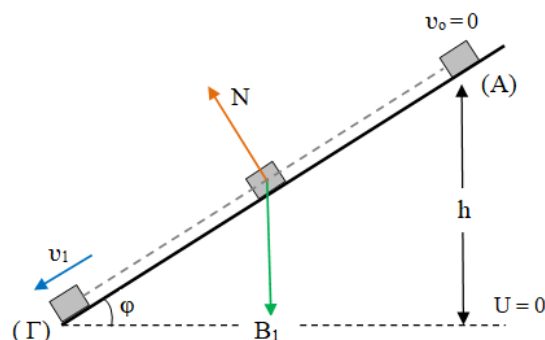
Σώμα Σ_1

Στη διάρκεια της κίνησης παράγει έργο μόνο το βάρος $\vec{B}_1$ (η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο γιατί είναι κάθετη στη μετατόπιση του σώματος), άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ :

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow 0 + m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Leftrightarrow$$

$$v_1^2 = 2gh \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$



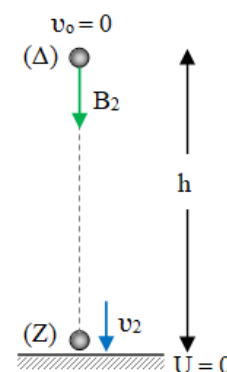
Σώμα Σ_2

Στη διάρκεια της κίνησης ασκείται μόνο το βάρος $\vec{B}_2$, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζω το ΘΔΜΕ :

$$K_\Delta + U_\Delta = K_Z + U_Z \Leftrightarrow 0 + m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Leftrightarrow v_2^2 = 2gh \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει : $v_1 = v_2$.



67. (13106,) Από την ταράτσα ενός ψηλού κτιρίου αφήσαμε να πέφτει ελεύθερα ένα μικρό μεταλλικό σφαιρίδιο. Κατά την πτώση του οι αντιστάσεις του αέρα μπορούν να θεωρηθούν ασήμαντες.

Το σημείο Α αντιστοιχεί στην θέση από όπου αφέθηκε το σφαιρίδιο. Λίγο πριν κτυπήσει στο έδαφος φτάνει στη θέση Δ. Στην κατακόρυφη κίνησή του πέρασε ενδιάμεσα από τις θέσεις Β και Γ, όπως στο σχήμα. Στον πίνακα που ακολουθεί, κάθε οριζόντια τριάδα δίνει την δυναμική βαρυτική ενέργεια (U), την κινητική ενέργεια (K) και την μηχανική ενέργεια (E_{MHX}) του σφαιριδίου σε κάθε μια από τις θέσεις αυτές.

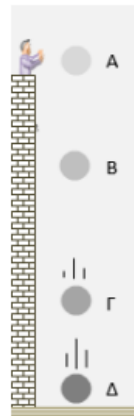
A) Να συμπληρώσετε τα κενά αυτού του πίνακα.

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Μονάδες 9

Θέση	U (J)	K (J)	E_{MHX} (J)
A			
B	80	20	
Γ		40	
Δ	0		



Απάντηση

Στη διάρκεια της κίνησης παράγει έργο μόνο το βάρος του σώματος, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζω το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τις θέσεις Β, Α, Γ, Δ .

Θέση Β

$$E_{μηχ} = K_B + U_B = 20 \text{ J} + 80 \text{ J} = 100 \text{ J} \text{ (= σταθερή)}.$$

Θέση Α

Στη θέση Α το σφαιρίδιο είναι ακίνητο, άρα : $K_A = 0$.

$$K_A + U_A = E_{μηχ} \Leftrightarrow U_A = E_{μηχ} - K_A \Rightarrow U_A = 100 \text{ J} .$$

Θέση Γ

$$K_\Gamma + U_\Gamma = E_{μηχ} \Leftrightarrow U_\Gamma = E_{μηχ} - K_\Gamma \Rightarrow U_\Gamma = (100 - 40) \text{ J} = 60 \text{ J} .$$

Θέση Δ

$$K_\Delta + U_\Delta = E_{μηχ} \Leftrightarrow K_\Delta = E_{μηχ} - U_\Delta \Rightarrow K_\Delta = 100 \text{ J} .$$

68. (13269, 2.2) Σημειακό αντικείμενο αφήνεται ελεύθερο από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

A. Αν αμελήσουμε τις δυνάμεις που το σημειακό αντικείμενο δέχεται από τον ατμοσφαιρικό αέρα και αν θεωρήσουμε τη βαρυτική επιτάχυνση $\vec{g}$ σταθερή, τότε, την τυχαία χρονική στιγμή t , η γήινη βαρυτική δυναμική ενέργεια του κινητού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha) U = m \cdot g \cdot h$$

$$\beta) U = m \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right)$$

$$\gamma) U = m \cdot g \cdot \left(h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right)$$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το σώμα αφήνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ύψος h και φτάνει στο έδαφος

τη χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Μετά από χρόνο $t \leq t_1$ θα έχει διανύσει διάστημα s που υπολογίζεται από τη σχέση :

$$s = \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

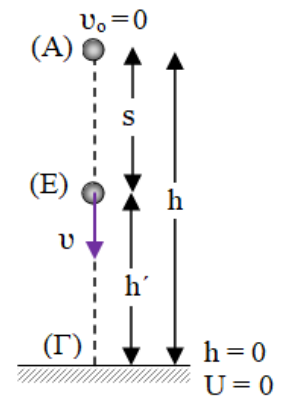
Τη στιγμή αυτή απέχει από το έδαφος :

$$h' = h - s \xrightarrow{(1)} h' = h - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Θεωρώ σαν επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια το οριζόντιο έδαφος.

Η δυναμική ενέργεια του αντικειμένου τη χρονική στιγμή $t \leq t_1$ υπολογίζεται από τη σχέση :

$$U = m g h' \xrightarrow{(2)} U = m g \left(h - \frac{1}{2} g t^2 \right). \quad \left[0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}} \right]$$



Σχόλια :

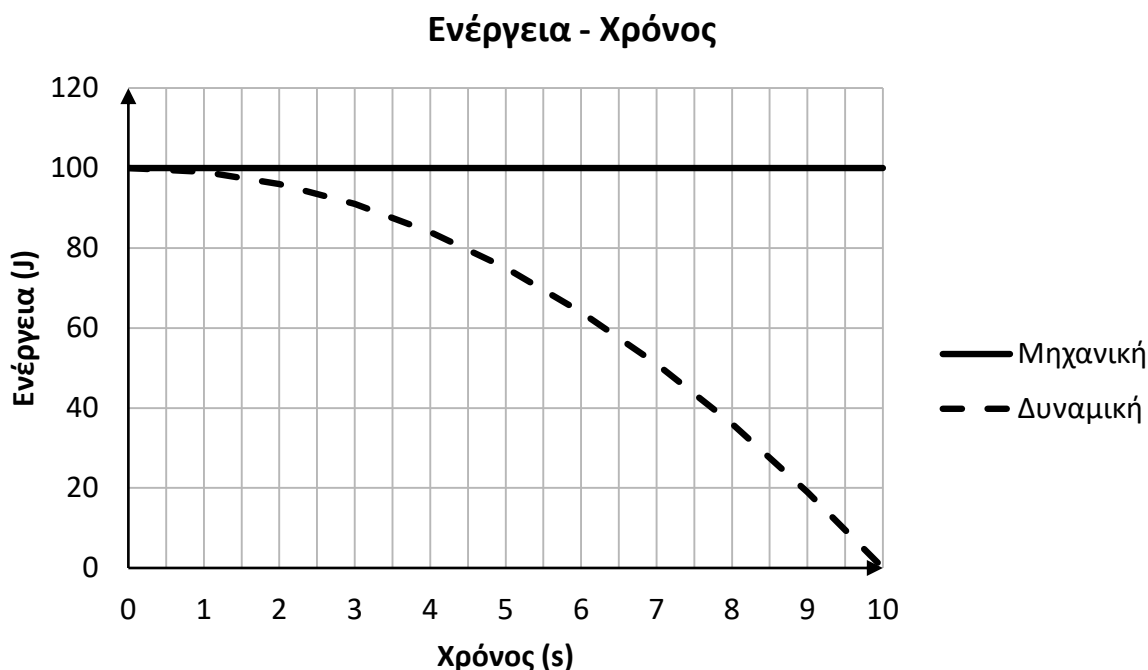
Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι

1) η προηγούμενη σχέση ισχύει για $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Για $t > \sqrt{\frac{2h}{g}}$, η δυναμική ενέργεια είναι $U = 0$.

2) το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το οριζόντιο έδαφος.

69. (13271, B1) Ένα σημειακό αντικείμενο, μάζας m , αφήνεται ελεύθερο από ύψος h πάνω από το έδαφος, σε τόπο όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Αν οι δυνάμεις που δέχεται το σημειακό αντικείμενο από τον ατμοσφαιρικό αέρα αγνοηθούν, τότε η μηχανική και η δυναμική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου μεταβάλλονται με το χρόνο, όπως στο ακόλουθο διάγραμμα:



A. Η μάζα m του σημειακού αντικειμένου είναι:

α) 0,2 Kg , β) 2 Kg , γ) 0,02 Kg

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το αντικείμενο εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h .

Θεωρώ σαν επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια το οριζόντιο έδαφος.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται, άρα εκείνη τη στιγμή το σώμα φτάνει στο έδαφος. Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s})^2 \Rightarrow h = 500 \text{ m}.$$

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι τη στιγμή που αφήνεται το σώμα έχει δυναμική ενέργεια $U_{\text{αρχ}} = 100 \text{ J}$.

$$\text{Άρα : } U_{\text{αρχ}} = mgh \Leftrightarrow m = \frac{U_{\text{αρχ}}}{gh} \Rightarrow m = \frac{100 \text{ J}}{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (500 \text{ m})} \Rightarrow m = 0,02 \text{ Kg}.$$

Σχόλιο :

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το οριζόντιο έδαφος.

70. (13272, B1) Ένα σημειακό αντικείμενο, μάζας m , αφήνεται ελεύθερο, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, από ύψος h πάνω από το έδαφος, σε τόπο όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Αν οι δυνάμεις που δέχεται το σημειακό αντικείμενο από τον ατμοσφαιρικό αέρα αγνοηθούν, τότε η μηχανική και η δυναμική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου μεταβάλλονται με το χρόνο, όπως στον ακόλουθο πίνακα:

$t(\text{s})$	$U(\text{J})$	$K(\text{J})$
0	100	
4	84	
6		36
10		100

A. Να συμπληρώσετε τα κενά κελιά του πίνακα.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0$ το σώμα είναι ακίνητο, άρα : $K_1 = 0$.

Η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται σταθερή : $E_{\text{μηχ}} = U_1 + K_1 = 100 \text{ J}$.

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$: $K_2 = E_{\text{μηχ}} - U_2 = 100 \text{ J} - 84 \text{ J} = 16 \text{ J}$.

Τη χρονική στιγμή $t_3 = 6 \text{ s}$: $U_3 = E_{\text{μηχ}} - K_3 = 100 \text{ J} - 36 \text{ J} = 64 \text{ J}$.

Τη χρονική στιγμή $t_4 = 10 \text{ s}$: $U_4 = E_{\text{μηχ}} - K_4 = 100 \text{ J} - 100 \text{ J} = 0$.

Σχόλια :

1) Η διατύπωση «... σε τόπο όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ » είναι ανακριβής.

Δεν υπάρχει σημείο του πεδίου βαρύτητας της Γης στο οποίο η επιτάχυνση της βαρύτητας να έχει μέτρο μεγαλύτερο από $9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

2) Η εκφώνηση αναφέρει «η μηχανική και η δυναμική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου μεταβάλλονται με το χρόνο, όπως στον ακόλουθο πίνακα», ενώ στον πίνακα υπάρχουν η δυναμική και η κινητική ενέργεια!

71. (13466, B1) Ένας μαθητής εκτοξεύει από την ταράτσα κτιρίου, που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος, τρεις μπάλες με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες v_0 . Εκτοξεύει την πρώτη μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω, την δεύτερη οριζόντια και την τρίτη κατακόρυφα προς τα κάτω. Θεωρήστε την αντίσταση του αέρα αμελητέα. Αν v_1, v_2, v_3 αντίστοιχα τα μέτρα των ταχυτήτων με τις οποίες οι μπάλες φθάνουν στο έδαφος, τότε:

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

α. $v_1 < v_2 < v_3$

β. $v_1 = v_2 < v_3$

γ. $v_1 = v_2 = v_3$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε μπάλα κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

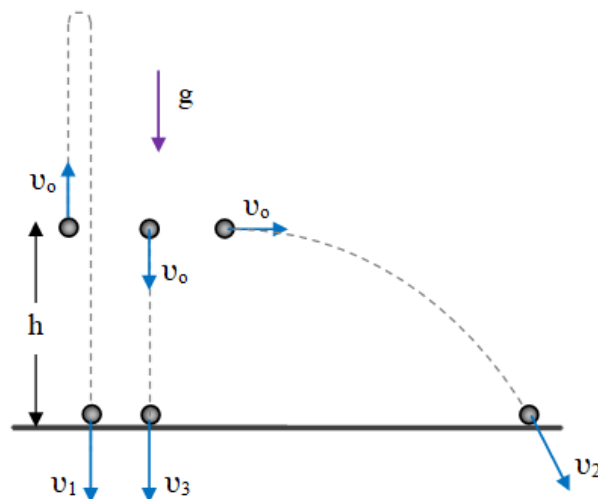
Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ :

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 + 2gh \Rightarrow$$

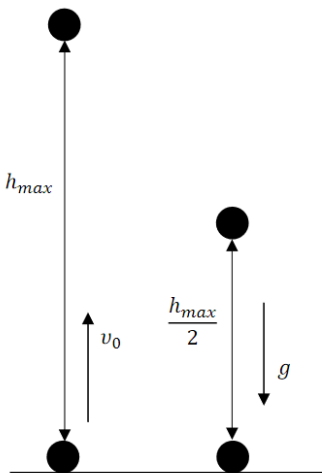
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \quad (\text{μέτρο})$$

Αφού οι μπάλες εκτοξεύονται με ταχύτητες ίσου μέτρου v_0 από το ίδιο ύψος h , άρα θα φτάσουν στο έδαφος με ταχύτητες ίσου μέτρου.

Επομένως : $v_1 = v_2 = v_3$.



72. (13511, 2.2) Σώμα μάζας m εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα v_0 όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σώμα φθάνει σε μέγιστο ύψος $h_{\max}$. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος σε ύψος $\frac{h_{\max}}{2}$ είναι:



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

α. $v = \frac{v_0}{2}$

β. $v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$

γ. $v = \frac{v_0\sqrt{3}}{2}$

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Υποθέτω ότι το σώμα κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους (οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη).

1ος τρόπος

Εφαρμόζω το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ).

Για τη διαδρομή $A \rightarrow \Delta$

$$K_{\Delta} - K_A = \Sigma W \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh_{\max} \Leftrightarrow \frac{v_0^2}{2} = gh_{\max}. \quad (1)$$

Για τη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$

$$K_{\Gamma} - K_A = \Sigma W \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg \frac{h_{\max}}{2} \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 - gh_{\max} \xrightarrow{(1)}$$

$$v^2 = v_0^2 - \frac{v_0^2}{2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{v_0^2}{2} \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

2ος τρόπος

Ορίζω σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζω το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

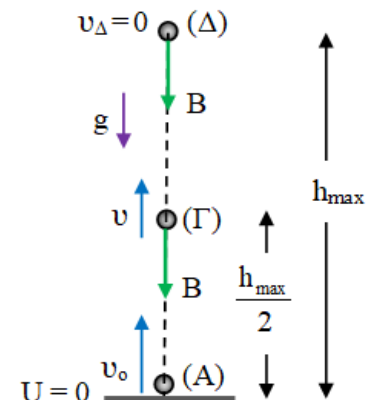
Για τις θέσεις A, Δ

$$K_A + U_A = K_{\Delta} + U_{\Delta} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgh_{\max} \Leftrightarrow \frac{v_0^2}{2} = gh_{\max}. \quad (1)$$

Για τις θέσεις A, Γ

$$K_A + U_A = K_{\Gamma} + U_{\Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mg \frac{h_{\max}}{2} \Leftrightarrow v_0^2 = v^2 + gh_{\max} \xrightarrow{(1)} v_0^2 = v^2 + \frac{v_0^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$v^2 = \frac{v_0^2}{2} \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

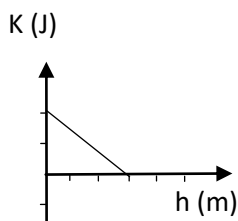


Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη, ώστε να δεχτούμε ότι το σώμα κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους του.

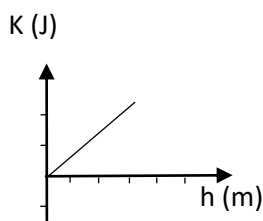
73. (13571, 2.2) Ένας συμπαγής ομογενής κύβος αφήνεται να ολισθήσει προς τη βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ ως προς το οριζόντιο δάπεδο. Γνωρίζουμε ότι η συνολική διαδρομή που κάνει ο κύβος πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο είναι L (από το σημείο που αφήνεται ως τη βάση του) καθώς και ότι το σημείο εκκίνησης απέχει ύψος h από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Επίσης η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

A. Επιλέξτε ποιο από τα επόμενα τρία διαγράμματα περιγράφει τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας του κύβου ως προς το ύψος του από το οριζόντιο δάπεδο.

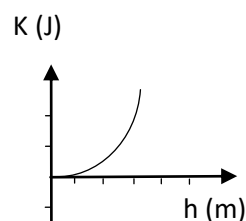
α)



β)



γ)



Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας .

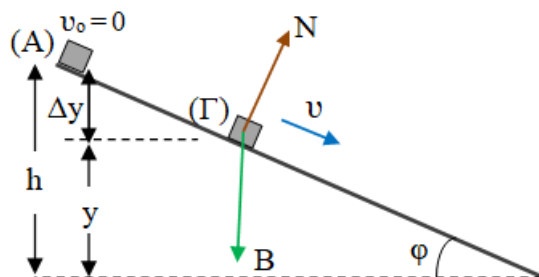
Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού δεν υπάρχει τριβή, η μηχανική ενέργεια του κύβου διατηρείται σταθερή. Ορίζω σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για την αρχική θέση A και μία τυχαία θέση Γ στην οποία ο κύβος έχει κινητική ενέργεια K και βρίσκεται σε ύψος y πάνω από το δάπεδο :

$$K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_A + U_A \Leftrightarrow K + mgy = 0 + mgh \Leftrightarrow$$

$$\boxed{K = mgh - mgy}. \quad (1)$$



Εναλλακτική απάντηση

Έστω μία τυχαία θέση Γ που απέχει κατακόρυφα από το A : $\Delta y = h - y$, όπου y η κατακόρυφη απόσταση του Γ από το δάπεδο.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το A μέχρι το Γ, όπου ο κύβος έχει κινητική ενέργεια K :

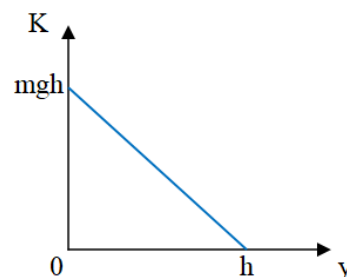
$$\Delta K = W_B \Leftrightarrow K - 0 = mg(\Delta y) \Leftrightarrow \boxed{K = mg(h - y)}. \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) συμπεραίνω ότι η κινητική ενέργεια του κύβου αυξάνεται (γραμμικά) όσο ελαττώνεται το ύψος y από το δάπεδο.

$$\text{Για } y = h \xrightarrow{(1)} K = 0.$$

$$\text{Για } y = 0 \xrightarrow{(1)} K = mgh = \text{μέγιστη}.$$

Το σωστό διάγραμμα φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχόλιο :

Στην εκφώνηση δίνεται ότι το **h είναι το αρχικό ύψος του κύβου από το οριζόντιο δάπεδο.**

Στα διαγράμματα όμως το h είναι η μεταβλητή κατακόρυφη απόσταση του κύβου από το δάπεδο !

Αυτό δημιουργεί σύγχυση στον αναγνώστη.

Θα έπρεπε τα διαγράμματα να απεικονίζουν τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας K σε συνάρτηση με τη μεταβλητή κατακόρυφη απόσταση y από το δάπεδο (και όχι με το ύψος h), όπως φαίνεται στο σχήμα της απάντησης.

74. (13573, 2.1) Ένα σώμα μικρών διαστάσεων και μάζας m βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω, από ύψος h . Η τελική κινητική ενέργεια του σώματος είναι τετραπλάσια της αρχικής του. Θεωρείται ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και ότι το σώμα έχει μηδενική βαρυτική δυναμική ενέργεια στο έδαφος.

A. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος είναι τριπλάσια από την αρχική κινητική του, όταν απέχει από το έδαφος:

- α) $h/3$, β) $h/2$, γ) h .

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το σώμα κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για την αρχική θέση A (τη στιγμή της εκτόξευσης) και τη θέση Γ (τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος) :

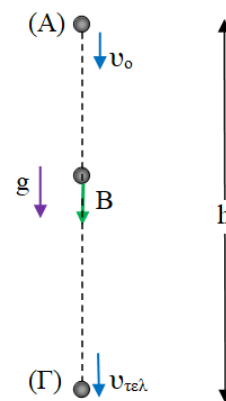
$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma. \quad (1)$$

$$\text{Ισχύουν οι σχέσεις : } K_\Gamma = 4K_A \quad (2)$$

$$U_\Gamma = 0 \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow{(2),(3)} K_A + U_A = 4K_A \Leftrightarrow U_A = 3K_A.$$

Επομένως, η δυναμική ενέργεια είναι τριπλάσια από την κινητική στην αρχική θέση A, δηλαδή σε ύψος h από το έδαφος.



75. (13575, 2.1) Ένα σώμα μικρών διαστάσεων και μάζας m βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω, από ύψος h_1 . Η τελική κινητική ενέργεια του σώματος (οριακά πριν ακουμπήσει στο έδαφος) είναι διπλάσια της αρχικής του. Επαναλαμβάνουμε τη ρίψη αλλά αυτή τη φορά αφήνουμε το σώμα από ύψος h_2 χωρίς αρχική ταχύτητα και καταλήγει να έχει πάλι την ίδια τελική κινητική ενέργεια. Θεωρείται ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και ότι το σώμα έχει μηδενική βαρυτική δυναμική ενέργεια στο έδαφος.

A. Η σχέση που συνδέει τα ύψη h_1 και h_2 είναι:

α) $h_1 = 2 \cdot h_2$, β) $2 \cdot h_1 = h_2$, γ) $h_2 = 4 \cdot h_1$.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Εφαρμόζω το ΘΔΜΕ σε κάθε ρίψη.

1η ρίψη

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \xrightarrow{K_A = \frac{K_\Gamma}{2}} \frac{K_\Gamma}{2} + U_A = K_\Gamma + 0 \Leftrightarrow$$

$$U_A = \frac{K_\Gamma}{2} \Leftrightarrow K_\Gamma = 2U_A \Rightarrow K_\Gamma = 2mgh_1. \quad (1)$$

2η ρίψη

$$K_\Delta + U_\Delta = K_\Gamma' + U_\Gamma \Leftrightarrow 0 + U_\Delta = K_\Gamma' + 0 \Leftrightarrow K_\Gamma' = U_\Delta \Rightarrow K_\Gamma' = mgh_2. \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει : } K_\Gamma' = K_\Gamma \xrightarrow{(1),(2)} mgh_2 = 2mgh_1 \Leftrightarrow h_2 = 2h_1.$$

Εναλλακτική απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ σε κάθε ρίψη.

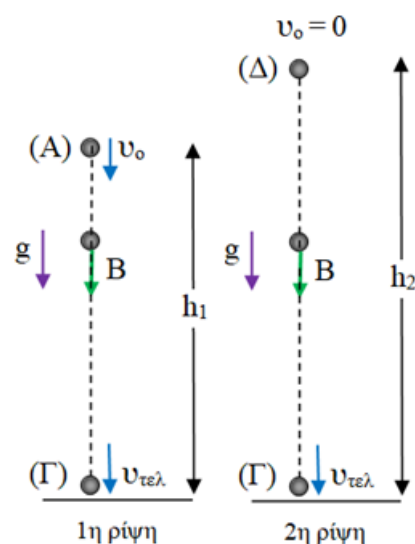
1η ρίψη

$$K_\Gamma - K_A = W_B \xrightarrow{K_A = \frac{K_\Gamma}{2}} K_\Gamma - \frac{K_\Gamma}{2} = mgh_1 \Leftrightarrow \frac{K_\Gamma}{2} = mgh_1 \Leftrightarrow K_\Gamma = 2mgh_1. \quad (1)$$

2η ρίψη

$$K_\Gamma' - K_\Delta = W_B' \Leftrightarrow K_\Gamma' - 0 = mgh_2 \Leftrightarrow K_\Gamma' = mgh_2. \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει : } K_\Gamma' = K_\Gamma \xrightarrow{(1),(2)} mgh_2 = 2mgh_1 \Leftrightarrow h_2 = 2h_1.$$



76. (13576, 2.2) Ένας συμπαγής ομογενής κύβος μάζας m ολισθαίνει από τη βάση, προς την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ ως προς το οριζόντιο δάπεδο. Γνωρίζουμε ότι ο κύβος ξεκινάει με αρχική ταχύτητα u και διανύει μήκος L μέχρι την κορυφή. Επίσης, η κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου απέχει ύψος h από τη βάση του. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

A. Επιλέξτε ποια θα είναι η κινητική ενέργεια του κύβου όταν φτάσει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου:

$$\alpha) \frac{1}{2}mv^2 - mgh, \quad \beta) mgL - \frac{1}{2}mv^2, \quad \gamma) \frac{1}{2}mv^2 - mgL\sin\varphi.$$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

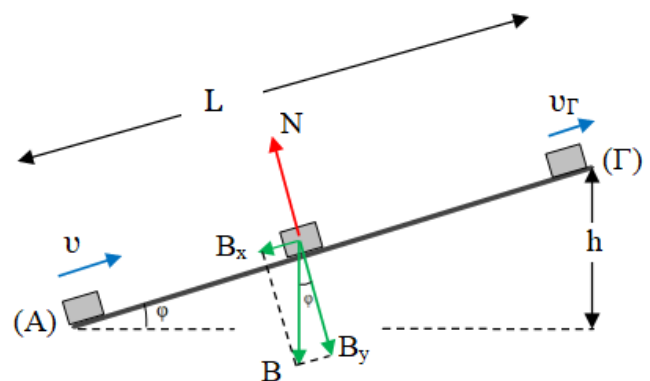
Υποθέτω ότι στον κύβο δεν ασκείται εξωτερική δύναμη $\vec{F}$.

Αφού δεν υπάρχει τριβή, η μηχανική ενέργεια του κύβου διατηρείται σταθερή.

Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ :

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + 0 = K_\Gamma + mgh$$

$$\Leftrightarrow K_\Gamma = \frac{1}{2}mv^2 - mgh.$$



Εναλλακτική απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$:

$$K_\Gamma - K_A = W_{B(A \rightarrow \Gamma)} \Leftrightarrow K_\Gamma - \frac{1}{2}mv^2 = -mgh \Leftrightarrow K_\Gamma = \frac{1}{2}mv^2 - mgh.$$

Σχόλια

1) Οι διατυπώσεις «... ολισθαίνει από τη βάση προς την κορυφή...», «... ξεκινάει με αρχική ταχύτητα u ...» είναι ασαφείς.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «... ο κύβος εκτοξεύεται από τη βάση προς την κορυφή του επιπέδου με αρχική ταχύτητα μέτρου u ...».

2) Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι δεν ασκείται στον κύβο εξωτερική δύναμη $\vec{F}$.

77. (13621, 2.2) Σώμα αφήνεται ελεύθερο από ύψος h πάνω από το έδαφος.

A. Αν αμελήσουμε τις δυνάμεις που το σώμα δέχεται από τον αέρα, τότε, σε ύψος $\frac{h}{2}$ από το έδαφος, η κινητική ενέργεια K και η δυναμική ενέργεια U του σώματος συνδέονται με τη σχέση:

$$\alpha) K = U \quad \beta) K = 2 \cdot U \quad \gamma) 2 \cdot K = U$$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

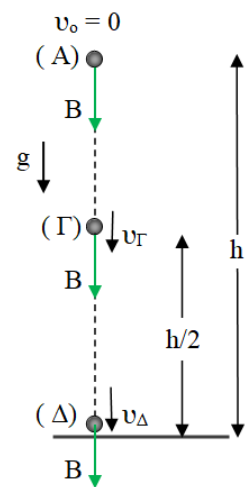
Έστω A η αρχική θέση (σε ύψος h) και Γ η τελική θέση (σε ύψος $\frac{h}{2}$).

Για την αρχική και τελική δυναμική ενέργεια ισχύει :

$$\left. \begin{array}{l} U_A = mgh \\ U_\Gamma = mg \frac{h}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow U_A = 2U_\Gamma. \quad (1)$$

Το σώμα κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για την αρχική θέση A και τη θέση Γ :

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \xrightarrow{(1)} 0 + 2U_\Gamma = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow U_\Gamma = K_\Gamma.$$



78. (13622, 2.1) Σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ από ύψος h πάνω από το έδαφος.

A. Αν αμελήσουμε τις δυνάμεις που το σώμα δέχεται από τον αέρα και g είναι το μέτρο της γήινης βαρυτικής επιτάχυνσης, τότε, τη στιγμή που μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα του σώματος, αυτό βρίσκεται σε ύψος h' από το έδαφος για το οποίο ισχύει:

$$\alpha) h' = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \quad \beta) h' = h + \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \quad \gamma) h' = h - \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

Μονάδες 4

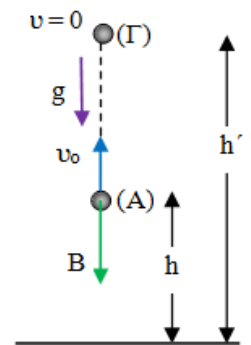
B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το σώμα κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για την αρχική θέση A (σε ύψος h) και την τελική θέση Γ (σε ύψος h'):

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = 0 + mgh' \Leftrightarrow h' = h + \frac{v_0^2}{2g}.$$

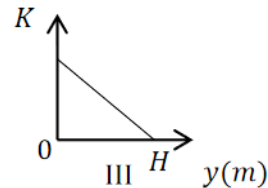
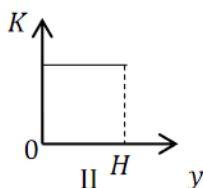
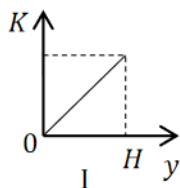


Εναλλακτική απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από την αρχική θέση A (σε ύψος h) μέχρι την τελική θέση Γ (σε ύψος h'):

$$K_\Gamma - K_A = W_B \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(h' - h) \Leftrightarrow h' - h = \frac{v_0^2}{2g} \Leftrightarrow h' = h + \frac{v_0^2}{2g}.$$

79. (13790, 2.1) Πέτρα μικρών διαστάσεων εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα επάνω. Δίνεται ότι ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας θεωρείται αυτό του εδάφους, ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και ότι το μέγιστο ύψος που φτάνει η πέτρα είναι H .



A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας K της πέτρας σε συνάρτηση με την απόσταση της y από το έδαφος κατά την κίνησή της, είναι η:

α) I , **β)** II , **γ)** III .

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η πέτρα κινείται με την επίδραση του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Σύμφωνα με το ΘΔΜΕ, σε μία τυχαία θέση της σφαίρας σε ύψος y , ισχύει :

$$K + U = E_{\text{μηχ}} \Leftrightarrow K = E_{\text{μηχ}} - U \Leftrightarrow K = E_{\text{μηχ}} - mgy. \quad (1)$$

$$\text{Σε ύψος } y = H : K = 0 \xrightarrow{(1)} E_{\text{μηχ}} = mgH. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{K = mgH - mgy}. \quad (3)$$

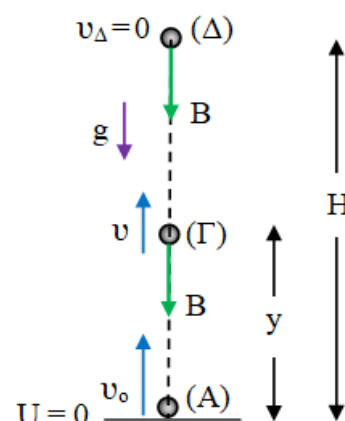
Σύμφωνα με τη σχέση (3), το διάγραμμα κινητικής ενέργειας – ύψους

$K = f(y)$ είναι ευθεία με αρνητική κλίση.

$$\text{Για } y = H \xrightarrow{(3)} K = 0.$$

$$\text{Για } y = 0 \xrightarrow{(3)} K = mgH.$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το III.



80. (14841, 2.2) Σφαίρα μάζας m **βάλλεται** από την επιφάνεια του εδάφους **με αρχική ταχύτητα** και κινείται μέχρι να φτάσει σε μέγιστο ύψος H . Θεωρούμε την επιτάχυνση της βαρύτητας σταθερή και την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

A. Να σχεδιάσετε σε κοινούς άξονες την κινητική (K) ενέργεια, τη δυναμική ενέργεια (U) και την ολική ενέργεια ($E_{ολ}$) της σφαίρας σε συνάρτηση με το ύψος από την επιφάνεια του εδάφους.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Υποθέτω ότι η αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ είναι κατακόρυφη (με φορά προς τα πάνω).

Η δυναμική ενέργεια της σφαίρας σε απόσταση y από το έδαφος, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$U = mgy. \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια U είναι ανάλογη με το ύψος y , άρα το **διάγραμμα της σχέσης $U = f(y)$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.**

Η μηχανική ενέργεια της σφαίρας είναι σταθερή : $E_{μηχ} = \text{σταθερή}$.

Με εφαρμογή του ΘΔΜΕ προκύπτει :

$$K + U = E_{μηχ} \Leftrightarrow K = E_{μηχ} - U. \quad (2)$$

$$\text{Σε ύψος } y = H : K = 0 \xrightarrow{(2)} E_{μηχ} = mgH. \quad (3)$$

Το διάγραμμα της σχέσης $E_{μηχ} = f(y)$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα y .

$$(2), (3) \Rightarrow K = mgH - mgy. \quad (4)$$

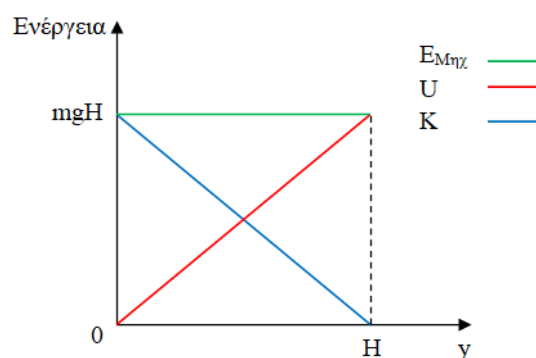
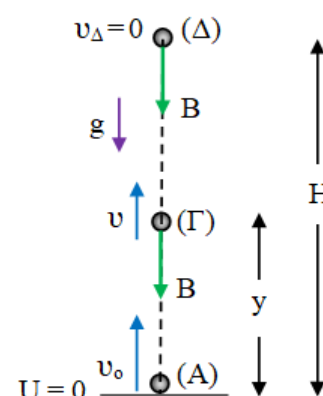
Σύμφωνα με τη σχέση (4), **το διάγραμμα κινητικής ενέργειας – ύψους**

$K = f(y)$ είναι ευθεία με αρνητική κλίση.

Στο έδαφος ($y = 0$) : $U = 0$, $K = mgH$.

Στο ψηλότερο σημείο ($y = H$) : $K = 0$, $U = mgH$.

Το διάγραμμα που ικανοποιεί τα προηγούμενα συμπεράσματα φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι **η αρχική ταχύτητα είναι κατακόρυφη.**

Αν η αρχική ταχύτητα δεν είναι κατακόρυφη, τότε στο ψηλότερο σημείο δεν μηδενίζεται η κινητική ενέργεια ($K_{\min} \neq 0$) και τα διαγράμματα διαφοροποιούνται.

Ισχύς

81. (8025, B1) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s δύο αλεξιπτωτιστές ίδιας μάζας εγκαταλείπουν το αεροπλάνο στο οποίο επέβαιναν και αρχικά εκτελούν ελεύθερη πτώση. Οι δυο αλεξιπτωτιστές ανοίγουν τα αλεξίπτωτά τους τις χρονικές στιγμές t_1 και $t_2 = 2 \cdot t_1$ αντίστοιχα οπότε αρχίζουν να κινούνται με σταθερή ταχύτητα με την οποία και προσγειώνονται.

A) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν P_1 και P_2 είναι οι ρυθμοί παραγωγής έργου από τα βάρη των αλεξιπτωτιστών κατά τη κίνησή τους με σταθερή ταχύτητα τότε ισχύει:

(α) $P_1 = P_2$

(β) $P_2 = 2 \cdot P_1$

(γ) $P_2 = 4 \cdot P_1$

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

1ος αλεξιπτωτιστής

Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Τη στιγμή t_1 έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = g t_1$. (1)

Ο ρυθμός παραγωγής έργου του βάρους (η ισχύς του βάρους) όταν κινείται με ταχύτητα μέτρου v_1 είναι :

$$P_1 = m g v_1. \quad (2)$$

2ος αλεξιπτωτιστής

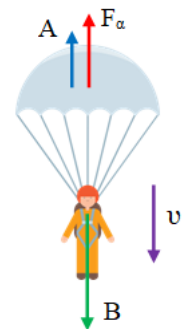
Μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Τη στιγμή t_2 έχει ταχύτητα μέτρου $v_2 = g t_2 \xrightarrow{t_2 = 2t_1} v_2 = 2 g t_1 \xrightarrow{(1)} v_2 = 2 v_1$. (3)

Ο ρυθμός παραγωγής έργου του βάρους όταν κινείται με ταχύτητα μέτρου v_2 είναι :

$$P_2 = m g v_2 \xrightarrow{(3)} P_2 = 2 m g v_1. \quad (4)$$

$$(2), (4) \Rightarrow P_2 = 2 P_1.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι **το αεροπλάνο είναι ακίνητο** τη στιγμή που το εγκαταλείπουν οι αλεξιπτωτιστές.

Αν το αεροπλάνο κινείται, οι αλεξιπτωτιστές έχουν αρχική ταχύτητα και δεν θα εκτελέσουν ελεύθερη πτώση.

Μία καλύτερη διατύπωση θα ήταν : « . . . εγκαταλείπουν **το ακίνητο ελικόπτερο** στο οποίο επέβαιναν και εκτελούν ελεύθερη πτώση ».

82. (8036, B2) Ένας γερανός ισχύος $P = 2 \text{ KW}$ ανυψώνει έναν κιβώτιο μάζας m με σταθερή ταχύτητα v . Το κιβώτιο ανυψώνεται σε ύψος H σε χρόνο t .

A) Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Η ισχύς ενός άλλου γερανού που μπορεί να ανυψώνει ένα άλλο κιβώτιο διπλάσιας μάζας με την ίδια σταθερή ταχύτητα v , στον ίδιο χρόνο και στο ίδιο ύψος H ισούται με:

α) 1 KW

β) 2 KW

γ) 4 KW

Μονάδες 4

B) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στο κιβώτιο ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{F}$ από τον γερανό (η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπόψη).

Αφού το κιβώτιο ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, ισχύει :

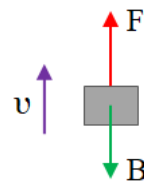
$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F - B = 0 \Leftrightarrow F = B = mg. \quad (1)$$

Η ισχύς της δύναμης που ασκεί ο 1ος γερανός είναι :

$$P = F \cdot v \xrightarrow{(1)} P = mgv. \quad (2)$$

Ο 2ος γερανός ανυψώνει κιβώτιο διπλάσιας μάζας με την ίδια ταχύτητα, άρα η ισχύς του είναι :

$$P' = 2mgv \xrightarrow{(2)} P' = 2P = 4 \text{ KW}.$$



83. (11929, B2) Σημειακό αντικείμενο, μάζας $m = 1 \text{ Kg}$, είναι ακίνητο σε λείο, οριζόντιο, ακλόνητο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ασκείται στο σημειακό αντικείμενο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 10 \text{ N}$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Αν $\bar{P}$ είναι η μέση ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ και P_1 τη στιγμιαία ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, τότε:

- α) $P_1 = \bar{P}$, β) $P_1 > \bar{P}$, γ) $P_1 < \bar{P}$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση, μέτρου: $\alpha = \frac{F}{m} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Αφού το σώμα είναι αρχικά ακίνητο, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Μετά από χρόνο t_1 , το μέτρο της μετατόπισης είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5^2 \text{ m} = 125 \text{ m}.$$

Στη διάρκεια της μετατόπισης η δύναμη παράγει έργο: $W = F(\Delta x) = (10 \text{ N})(125 \text{ m}) = 1250 \text{ J}$.

Η μέση ισχύς της δύναμης σε αυτή τη χρονική διάρκεια είναι:

$$\bar{P} = \frac{W}{t_1} \Rightarrow \bar{P} = \frac{1250 \text{ J}}{5 \text{ s}} \Rightarrow \bar{P} = 250 \text{ W}. \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = \alpha t_1 = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η ισχύς της δύναμης τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $P_1 = Fv_1 = (10 \text{ N})(50 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \Rightarrow P_1 = 500 \text{ W}. \quad (2)$

(1), (2) $\Rightarrow P_1 > \bar{P}$.

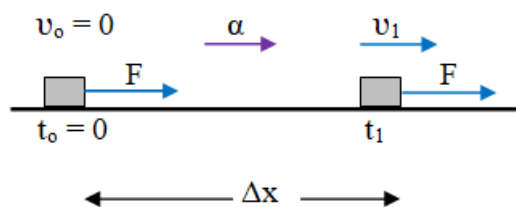
Παρατήρηση: Η ερώτηση μπορεί να απαντηθεί χωρίς υπολογισμούς.

Με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση, μέτρου α .

Αφού το σώμα ήταν αρχικά ακίνητο, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Μετά από χρόνο t_1 , το μέτρο της μετατόπισης είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t_1^2. \quad (1)$$



Στη διάρκεια της μετατόπισης η δύναμη παράγει έργο : $W = F(\Delta x) \xrightarrow{(1)} W = \frac{1}{2} F \alpha t_1^2$. (2)

Η μέση ισχύς της δύναμης σε αυτή τη χρονική διάρκεια είναι :

$$\bar{P} = \frac{W}{t_1} \xrightarrow{(2)} \bar{P} = \frac{\frac{1}{2} F \alpha t_1^2}{t_1} \Rightarrow \bar{P} = \frac{1}{2} F \alpha t_1. \quad (3)$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = \alpha t_1$. (4)

Η ισχύς της δύναμης τη χρονική στιγμή t_1 είναι : $P_1 = F v_1 \xrightarrow{(4)} P_1 = F \alpha t_1$. (5)

$$(3), (5) \Rightarrow P_1 > \bar{P}.$$

84. (13104, B1) Αεροπλάνο Boeing-747 ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα $720 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ και ο κινητήριος μηχανισμός του αποδίδει ισχύ 40 MW .

A) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Οι αντιστάσεις του αέρα στην κίνηση του αεροπλάνου, δημιουργούν μια δύναμη αντίθετης κατεύθυνσης από την κίνησή του, μέτρου:

- i. $F_{\text{αντ.}} = 18 \cdot 10^6 \text{ N}$ ii. $F_{\text{αντ.}} = 2 \cdot 10^5 \text{ N}$ iii. $F_{\text{αντ.}} = 18 \text{ N}$

Μονάδες 4

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Το αεροπλάνο κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 720 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\text{Ισχύει: } P_{\text{κiv}} = F_{\text{κiv}} \cdot v \Leftrightarrow F_{\text{κiv}} = \frac{P_{\text{κiv}}}{v} \Rightarrow F_{\text{κiv}} = \frac{40 \cdot 10^6 \text{ W}}{200 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow F_{\text{κiv}} = 2 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Στη διεύθυνση κίνησης η συνισταμένη είναι μηδενική, άρα :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_{\text{κiv}} - F_{\text{αντ}} = 0 \Leftrightarrow F_{\text{κiv}} = F_{\text{αντ}} \Rightarrow F_{\text{αντ}} = 2 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

85. (14844, 2.2) Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κιβώτιο το οποίο κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του δαπέδου και του κιβωτίου είναι μ .

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από τον άνθρωπο στο κιβώτιο με την πάροδο του χρόνου

(α) παραμένει σταθερός

(β) αυξάνεται

(γ) μειώνεται

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Υποθέτω ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι οριζόντια με φορά προς τα δεξιά, άρα η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ έχει φορά προς τα αριστερά.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = mg. \quad (1)$$

$$\text{Εφαρμόζω το νόμο της τριβής : } T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu mg. \quad (2)$$

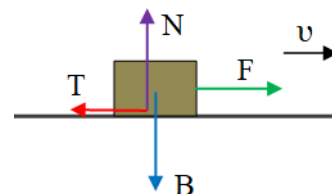
Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \Leftrightarrow F = T \xrightarrow{(2)} F = \mu mg = \text{σταθερή}.$$

Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από τον άνθρωπο στο κιβώτιο είναι η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$:

$$\frac{\Delta W_F}{\Delta t} = P_F = F \cdot v.$$

Αφού η δύναμη και η ταχύτητα είναι σταθερές, άρα η ισχύς της δύναμης είναι σταθερή.



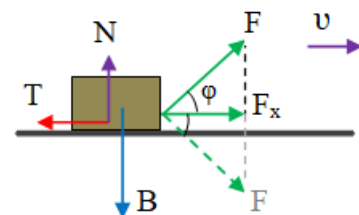
Παρατήρηση

Στην περίπτωση που η δύναμη $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία φ με την επιφάνεια,

η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη σχέση :

$$P_F = F_x \cdot v = Fv \cos \varphi.$$

Αν η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή, τότε η ισχύς της είναι σταθερή.



Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι οριζόντια.

86. (14845, 2.2) Ένας αλεξιπτωτιστής μάζας m πέφτει κατακόρυφα προς το έδαφος, έχοντας, λόγω της αντίστασης του αέρα, σταθερή ταχύτητα μέτρου v . Η επιτάχυνση της βαρύτητας κατά την κίνηση του αλεξιπτωτιστή θεωρείται σταθερή και ίση με g .

A. Από τις παρακάτω τρεις προτάσεις να επιλέξετε την επιστημονικά ορθή:

Η ενέργεια που μεταφέρεται από τον αλεξιπτωτιστή στον αέρα σε κάθε δευτερόλεπτο είναι ίση με:

- (α) $m \cdot g \cdot v$
 (β) $m \cdot g \cdot v^2$
 (γ) $\frac{1}{2} m \cdot v^2$

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στον αλεξιπτωτιστή ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ και η αντίσταση $\vec{F}_a$ από τον αέρα (με φορά προς τα πάνω). [Η άνωση δεν λαμβάνεται υπ' όψη].

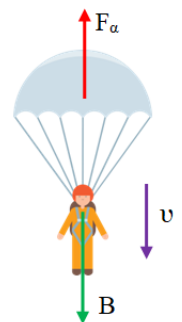
Αφού ο αλεξιπτωτιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα, ισχύει :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_a - B = 0 \Leftrightarrow F_a = B = mg. \quad (1)$$

Στη διάρκεια της πτώσης μεταφέρεται ενέργεια από το πεδίο βαρύτητας στον αλεξιπτωτιστή (μέσω του έργου του βάρους) και μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια (μέσω του έργου της αντίστασης του αέρα).

Ο ρυθμός με τον οποίο η βαρυτική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια είναι :

$$\frac{|\Delta W_{F_a}|}{\Delta t} = |P_{F_a}| = F_a \cdot v \xrightarrow{(1)} |P_{F_a}| = mgv.$$



Παρατήρηση

Σε μία πιο αυστηρή αντιμετώπιση του θέματος πρέπει να δεχθούμε ότι εκτός από το βάρος $\vec{B}$ και την αντίσταση του αέρα $\vec{F}_a$, ασκείται και η άνωση $\vec{A}$.

Αφού ο αλεξιπτωτιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα, ισχύει :

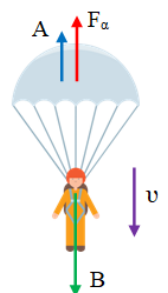
$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_a + A - B = 0 \Leftrightarrow F_a + A = B \Rightarrow F_{a\epsilon p} = mg, \quad (1)$$

όπου $F_{a\epsilon p} = F_a + A$ η συνολική δύναμη από τον αέρα.

Στη διάρκεια της πτώσης μεταφέρεται ενέργεια από το πεδίο βαρύτητας στον αλεξιπτωτιστή και τον αέρα.

Ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι :

$$\frac{|\Delta W_{F_{a\epsilon p}}|}{\Delta t} = |P_{F_{a\epsilon p}}| = F_{a\epsilon p} \cdot v \xrightarrow{(1)} |P_{F_{a\epsilon p}}| = mgv.$$

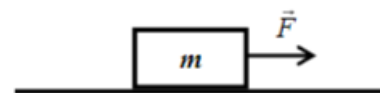


Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση έπρεπε να ζητά το ρυθμό με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από το πεδίο βαρύτητας στον αλεξιπτωτιστή και τον αέρα.
- 2) Η διατύπωση «η ενέργεια που μεταφέρεται από τον αλεξιπτωτιστή στον αέρα» δεν είναι σωστή.
Στη διάρκεια της πτώσης η βαρυτική δυναμική ενέργεια μειώνεται, άρα μεταφέρεται ενέργεια από το πεδίο βαρύτητας στον αλεξιπτωτιστή. Αφού η κινητική ενέργεια του αλεξιπτωτιστή είναι σταθερή, άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια (μέσω του έργου της αντίστασης). Η θερμική ενέργεια κατανέμεται στο σύστημα αλεξιπτωτιστής – αλεξίπτωτο και στον αέρα και όχι αποκλειστικά στον αέρα (ο αλεξιπτωτιστής και ο εξοπλισμός του θερμαίνονται εξαιτίας της τριβής με τον αέρα).

ΘΕΜΑΤΑ Δ

1. (11617) Μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, στο σώμα αρχίζει να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 30 \text{ N}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$, οπότε παύει να ασκείται η δύναμη $\vec{F}$.



Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της τριβής ολίσθησης,

Μονάδες 6

Δ2) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στη χρονική διάρκεια που ασκείται στο σώμα,

Μονάδες 6

Δ3) ποια χρονική στιγμή το σώμα θα σταματήσει να κινείται,

Μονάδες 6

Δ4) τη μετατόπιση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να σταματήσει να κινείται.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

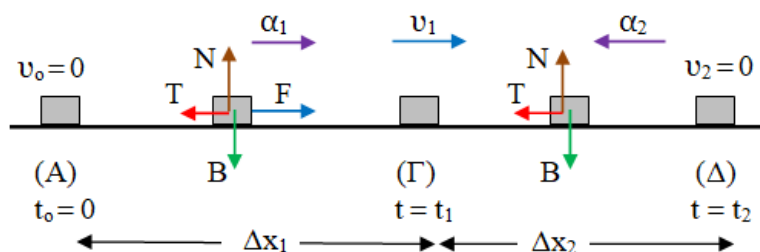
Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg. \quad (1)$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu mg.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } T = 0,5(2 \text{ Kg})\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T = 10 \text{ N}.$$



Δ2)

$$t_0 = 0 \text{ s} \rightarrow t_1 = 3 \text{ s}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω την τιμή της επιτάχυνσης α_1 (θετική φορά της $\vec{F}$) :

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F - T}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(30 - 10) \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Ισχύει :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (9 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 45 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$W_F = F(\Delta x_1) = (30 \text{ N})(45 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 1350 \text{ J}.$$

Δ3)

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t_1 \text{ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου : } v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (3 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα επιβραδύνεται εξαιτίας της τριβής, μέχρι να σταματήσει τη χρονική στιγμή t_2 .

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω την τιμή της επιτάχυνσης α_2 (θετική φορά της $\vec{F}$) :

$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow -T = m\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = -\frac{T}{m} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{10\text{ N}}{2\text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = -5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζω τη χρονική διάρκεια Δt_2 της επιβραδυνόμενης κίνησης :

$$v = v_1 + \alpha_2(\Delta t_2) \Rightarrow 0 = v_1 + \alpha_2(\Delta t_2) \Leftrightarrow \alpha_2(\Delta t_2) = -v_1 \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v_1}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 6\text{ s}.$$

Το σώμα θα σταματήσει τη χρονική στιγμή : $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 3\text{ s} + 6\text{ s} \Rightarrow t_2 = 9\text{ s}.$

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σώματος από τη θέση που ξεκινά μέχρι τη θέση που σταματά :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_F - T(\Delta x_{ολ}) = 0 \Leftrightarrow \Delta x_{ολ} = \frac{W_F}{T} \Rightarrow \Delta x_{ολ} = \frac{1350\text{ J}}{10\text{ N}} \Rightarrow \Delta x_{ολ} = 135\text{ m}.$$

Εναλλακτικός τρόπος

Υπολογίζω το μέτρο της μετατόπισης Δx_2 του σώματος στη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης :

$$\Delta x_2 = v_1(\Delta t_2) + \frac{1}{2}\alpha_2(\Delta t_2)^2 = \left[30 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot (-5) \cdot 36 \right] \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 90\text{ m}.$$

Επομένως : $\Delta x_{ολ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 45\text{ m} + 90\text{ m} = 135\text{ m}.$

2. (11623) Σε ένα κιβώτιο μάζας 1 kg που κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο, ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου 10 m/s.



Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δρόμου είναι $\mu = 0,2$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ένας μαθητής ξεκινά να παρατηρεί την κίνηση του κιβωτίου. Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$

Μονάδες 6

Δ2) το έργο της δύναμης $\vec{F}$, από τη χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι τη στιγμή που το χρονόμετρο του μαθητή δείχνει $t_1 = 5$ s.

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή t_1 , καταργείται η δύναμη $\vec{F}$. Να υπολογίσετε :

Δ3) τη συνολική μετατόπιση του κιβωτίου από τη χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι τη στιγμή που σταμάτησε να κινείται.

Μονάδες 7

Δ4) το έργο της τριβής, από την χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο σταμάτησε να κινείται.

Μονάδες 6

Θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Απάντηση

Δ1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg. \quad (1)$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu mg.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } T = 0,2(1\text{Kg})\left(10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T = 2 \text{ N}.$$

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, στον άξονα x ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \Rightarrow F = T = 2 \text{ N}.$$

Δ2)

Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $\Delta t_1 = t_1 - 0$, είναι :

$$\Delta x_1 = v(\Delta t_1) = \left(10\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(5\text{s}) \Rightarrow \Delta x_1 = 50 \text{ m}.$$

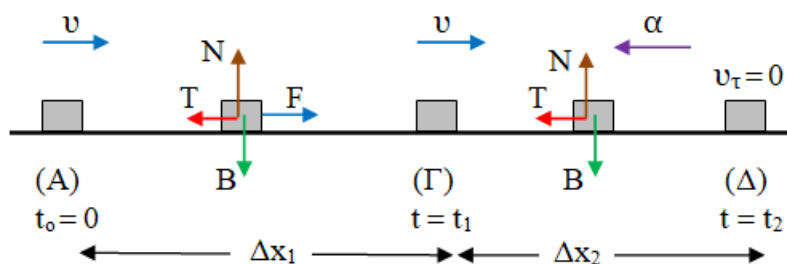
Στην ίδια χρονική διάρκεια η δύναμη παράγει έργο :

$$W_F = F(\Delta x_1) = (2 \text{ N})(50 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 100 \text{ J}.$$

Δ3)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από την αρχική θέση Α μέχρι τη θέση Δ που ακινητοποιείται:

$$\begin{aligned} \Sigma W = \Delta K &\Leftrightarrow W_F - T(\Delta x_{\text{ολ}}) = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow T(\Delta x_{\text{ολ}}) = W_F + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2(\Delta x_{\text{ολ}}) = 100 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \\ &\Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 75 \text{ m}. \end{aligned}$$



Εναλλακτικός τρόπος

Από τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ το σώμα επιβραδύνεται εξαιτίας της τριβής ολίσθησης, μέχρι να σταματήσει τη χρονική στιγμή t_2 .

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$ (θετική φορά της $\vec{F}$):

$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow -T = m\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = -\frac{T}{m} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{2 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζω τη χρονική διάρκεια Δt_2 της επιβραδυνόμενης κίνησης :

$$v_\tau = v + \alpha_2(\Delta t_2) \xrightarrow{v_\tau = 0} 0 = v + \alpha_2(\Delta t_2) \Leftrightarrow \alpha_2(\Delta t_2) = -v \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 5 \text{ s}.$$

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος στη χρονική διάρκεια Δt_2 είναι :

$$\Delta x_2 = v(\Delta t_2) + \frac{1}{2}\alpha_2(\Delta t_2)^2 = 10 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 25 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 25 \text{ m}.$$

Επομένως : $\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 50 \text{ m} + 25 \text{ m} = 75 \text{ m}.$

Δ4)

$$\Delta x_2 = \Delta x_{\text{ολ}} - \Delta x_1 = 75 \text{ m} - 50 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 25 \text{ m}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης από τη στιγμή t_1 μέχρι να σταματήσει, είναι :

$$W_{T(2)} = -T(\Delta x_2) = -(2 \text{ N})(25 \text{ m}) \Rightarrow W_{T(2)} = -50 \text{ J}.$$

3. (11631) Δύο κιβώτια A και B με μάζες $m_A = 5 \text{ kg}$ και $m_B = 10 \text{ kg}$, κινούνται ευθύγραμμα κατά μήκος ενός οριζόντιου προσανατολισμένου άξονα Ox. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ τα κιβώτια διέρχονται από τη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ του άξονα, κινούμενα και τα δύο προς τη θετική φορά. Το κιβώτιο A κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_A = 10 \text{ m/s}$, ενώ το κιβώτιο B έχει αρχική ταχύτητα $v_0 = 30 \text{ m/s}$, και κινείται με σταθερή επιτάχυνση η οποία έχει μέτρο $a_B = 2 \text{ m/s}^2$ και φορά αντίθετη της ταχύτητας v_0 .

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται σε κάθε κιβώτιο.

Μονάδες 5

Δ2) τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα κιβώτια A και B θα βρεθούν πάλι το ένα δίπλα στο άλλο μετά τη χρονική στιγμή t_0 .

Μονάδες 6

Δ3) τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες τα μέτρα των ταχυτήτων των δυο κιβωτίων θα είναι ίσα.

Μονάδες 8

Δ4) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε κιβωτίου από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα μέτρα των ταχυτήτων τους θα είναι ίσα για πρώτη φορά.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Κιβώτιο A : Αφού κινείται με σταθερή ταχύτητα, σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton : $\Sigma F_A = 0$.

Κιβώτιο B : Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (με θετική φορά της επιτάχυνσης) :

$$\Sigma F_B = m_B a_B \Rightarrow \Sigma F_B = (10 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Sigma F_B = 20 \text{ N}.$$

Δ2)

Κιβώτιο A : Η ταχύτητα είναι σταθερή, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Μετά από χρόνο t θα βρεθεί στη θέση : $x_A = v_A t \Rightarrow x_A = 10t$. (S.I.) (1)

Κιβώτιο B : Η επιτάχυνση είναι σταθερή και αντίρροπη από την αρχική ταχύτητα, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση (μέχρι τη στιγμή μηδενισμού της ταχύτητας).

Μετά από χρόνο t θα βρεθεί στη θέση : $x_B = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x_B = 30t - t^2$. (S.I.) (2)

Τη στιγμή που συναντώνται ισχύει :

$$x_A = x_B \xrightarrow{(1),(2)} 10t = 30t - t^2 \Leftrightarrow t^2 - 20t = 0 \Leftrightarrow t(t - 20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0, \text{ απορρίπτεται} \\ t = 20 \text{ s, δεκτή.} \end{cases}$$

Άρα, τα κιβώτια θα βρεθούν το ένα δίπλα στο άλλο τη χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$.

Δ3)

Η ταχύτητα του A έχει σταθερή τιμή : $v_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η τιμή της ταχύτητας του B δίνεται από τη σχέση : $v_B = v_0 - a t \Rightarrow v_B = 30 - 2t$. (S.I.) (3)

α) Αρχικά, το B κινείται προς τη θετική φορά και το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται.

Τη χρονική στιγμή t_1 είναι : $v_B = v_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \xrightarrow{(3)} 10 = 30 - 2t_1 \Leftrightarrow 2t_1 = 20 \Leftrightarrow t_1 = 10 \text{ s}$.

β) Αφού μηδενιστεί το μέτρο της ταχύτητας, στη συνέχεια το B επιταχύνεται προς την αρνητική φορά ($v_B < 0$). Κάποια στιγμή t_2 θα είναι :

$$v_B = -v_A = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \xrightarrow{(3)} -10 = 30 - 2t_2 \Leftrightarrow 2t_2 = 40 \Leftrightarrow t_2 = 20\text{s}.$$

Εναλλακτική απάντηση

Αναζητώ τις χρονικές στιγμές t_1 , t_2 στις οποίες οι ταχύτητες των Α, Β έχουν ίσα μέτρα.

$$\text{Ισχύει: } |v_A| = |v_B| \xrightarrow{(3)} 10 = |30 - 2t| \Rightarrow \begin{cases} 10 = 30 - 2t \Leftrightarrow 2t = 20 \Leftrightarrow t = 10\text{s}, \\ 10 = -30 + 2t \Leftrightarrow 2t = 40 \Leftrightarrow t = 20\text{s}. \end{cases}$$

Δηλαδή οι ταχύτητες των δύο κινητών θα έχουν ίσα μέτρα τις χρονικές στιγμές $t_1 = 10\text{ s}$ και $t_2 = 20\text{ s}$.

Επαλήθευση

$$\text{Για } t = 10\text{ s} \Rightarrow v_B = (30 - 2 \cdot 10) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{το B κινείται προς τη θετική φορά}).$$

$$\text{Για } t = 20\text{ s} \Rightarrow v_B = (30 - 2 \cdot 20) \frac{\text{m}}{\text{s}} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{το B κινείται προς την αρνητική φορά}).$$

Δ4)

$$\underline{\text{Κιβώτιο Α}}: \Delta K_A = \frac{1}{2} m_A (v_A^2 - v_A^2) \Rightarrow \Delta K_A = 0.$$

$$\underline{\text{Κιβώτιο Β}}: \Delta K_B = \frac{1}{2} m_B (v_B^2 - v_o^2) \Rightarrow \Delta K_B = \frac{1}{2} \cdot 10 (100 - 900) \text{ J} \Rightarrow \Delta K_B = -4000 \text{ J}.$$

4. (11632) Μικρό σώμα μάζας 10 kg κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του προσανατολισμένου άξονα Ox και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Θεωρήστε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$.

Δ1) Να χαρακτηρίσετε το είδος της κίνησης του σώματος στα χρονικά διαστήματα $0 \rightarrow 2$ s, $2 \rightarrow 6$ s και $6 \rightarrow 8$ s.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,5$ s.

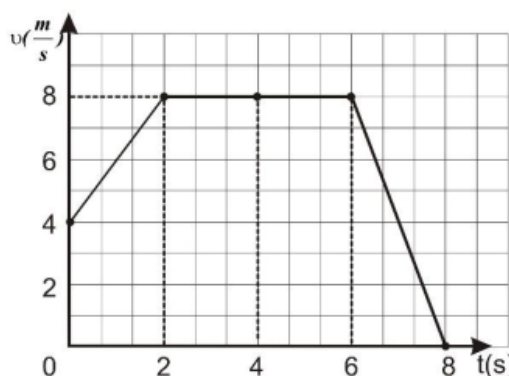
Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 6,5$ s.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα από $0 \rightarrow 8$ s.

Μονάδες 6



Απάντηση

Δ1)

$0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$: Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$2 \text{ s} \rightarrow 6 \text{ s}$: Το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

$6 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$: Το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται γραμμικά με το χρόνο μέχρι να μηδενιστεί τη χρονική στιγμή $t_3 = 8$ s, άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Δ2)

$$\underline{0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}} : \text{ Η τιμή της επιτάχυνσης είναι } \alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1' - t_0} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(8 - 4) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(2 - 0) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$ η επιτάχυνση είναι σταθερή, άρα και τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,5$ s η επιτάχυνση έχει τιμή $\alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, το μέτρο της συνισταμένης είναι :

$$\Sigma F_1 = m \alpha_1 \Rightarrow \Sigma F_1 = 20 \text{ N}.$$

Δ3)

$$\underline{6 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}} : \text{ Η τιμή της επιτάχυνσης είναι } \alpha_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2'} \Rightarrow \alpha_3 = \frac{(0 - 8) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(8 - 6) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_3 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η τιμή της ταχύτητας σε αυτή τη χρονική διάρκεια υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = v_2 + \alpha_3 (t - t_2'), \text{ με } v_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ και } t_2' = 6 \text{ s}.$$

$$\text{Για } t = 6,5 \text{ s} \Rightarrow v = [8 - 4 \cdot (6,5 - 6)] \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Η κινητική ενέργεια την ίδια στιγμή είναι : } K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 36 \text{ J} \Rightarrow K = 180 \text{ J}.$$

Δ4)

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης σε κάθε χρονική διάρκεια είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

$$0\text{ s} \rightarrow 2\text{ s} : \quad \Delta x_1 = E_{1(\text{τραπ})} = \frac{(8+4) \cdot 2}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 12 \text{ m}.$$

$$2\text{ s} \rightarrow 6\text{ s} : \quad \Delta x_2 = E_{2(\text{ορθ})} = 4 \cdot 8 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 32 \text{ m}.$$

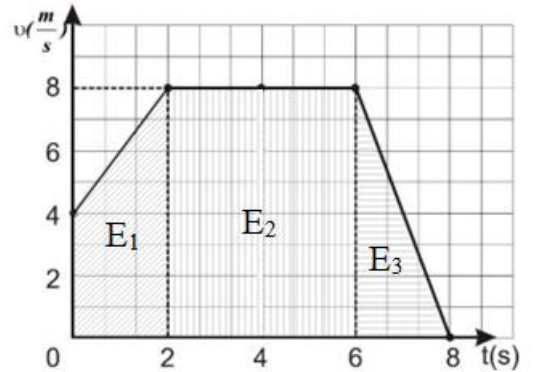
$$6\text{ s} \rightarrow 8\text{ s} : \quad \Delta x_3 = E_{3(\text{τριγ})} = \frac{2 \cdot 8}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_3 = 8 \text{ m}.$$

Για το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό στη χρονική διάρκεια 0 s – 8 s, ισχύει :

$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 12 \text{ m} + 32 \text{ m} + 8 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 52 \text{ m}.$$

Η μέση ταχύτητα στη χρονική διάρκεια 0 s – 8 s έχει τιμή :

$$v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{52 \text{ m}}{8 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 6,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



5. (11633) Μικρό σώμα μάζας $m = 200 \text{ g}$ κινείται σε οριζόντιο δρόμο, με τον οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Τη χρονική στιγμή που θεωρούμε ως $t = 0 \text{ s}$ το σώμα κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 72 \text{ km/h}$. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της τριβής ολίσθησης,

Μονάδες 6

Δ2) τη χρονική στιγμή που θα σταματήσει το σώμα να κινείται.

Μονάδες 6

Δ3) την μετατόπιση του σώματος, από τη χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι να σταματήσει.

Μονάδες 6

Δ4) το έργο της τριβής ολίσθησης, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι να σταματήσει το σώμα να κινείται.

Μονάδες 7

Απάντηση

$$m = 200 \text{ g} = 0,2 \text{ Kg}$$

$$v_0 = 72 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg. \quad (1)$$

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu mg \Rightarrow T = 0,2(0,2\text{Kg})\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T = 0,4 \text{ N}.$$

Δ2)

Ορίζω σαν θετική τη φορά της ταχύτητας και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow -T = m\alpha \Leftrightarrow \alpha = -\frac{T}{m} \Rightarrow \alpha = -\frac{0,4 \text{ N}}{0,2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζω τη χρονική διάρκεια $t_{\text{ολ}}$ της επιβραδυνόμενης κίνησης :

$$v = v_0 + \alpha \cdot t \xrightarrow{v=0} 0 = v_0 + \alpha \cdot t_{\text{ολ}} \Leftrightarrow \alpha \cdot t_{\text{ολ}} = -v_0 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = -\frac{v_0}{\alpha} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 10 \text{ s}.$$

Δ3)

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος μέχρι να σταματήσει υπολογίζεται από την εξίσωση :

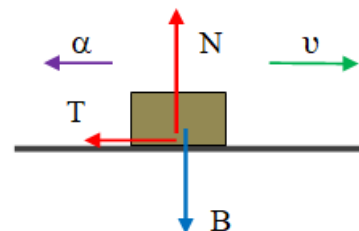
$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2. \quad (1)$$

$$\text{Για } t = 10 \text{ s} \xrightarrow{(1)} \Delta x_{\text{ολ}} = \left[20 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 100 \right] \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 100 \text{ m}.$$

Δ4)

Το έργο της τριβής ολίσθησης μέχρι να σταματήσει το σώμα, είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_{\text{ολ}}) = -(0,4 \text{ N}) \cdot (100 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -40 \text{ J}.$$



6. (11634) Ένα σώμα μάζας 1 kg βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, στο σώμα αρχίζουν να ασκούνται δυνάμεις. Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων έχει οριζόντια διεύθυνση και η τιμή της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Δ1) Να χαρακτηρίσετε τα είδη των κινήσεων που εκτελεί το σώμα, στα χρονικά διαστήματα $0 \rightarrow 5 \text{ s}$, $5 \rightarrow 10 \text{ s}$, $10 \rightarrow 15 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.

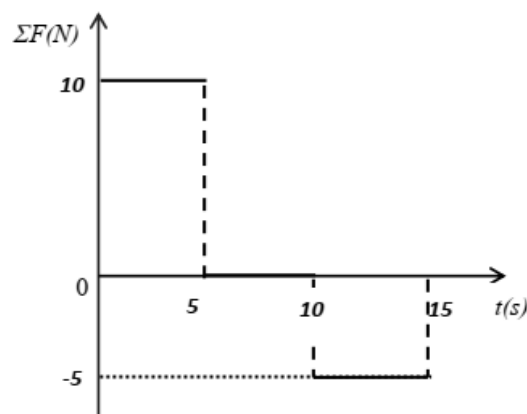
Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης δύναμης από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 15 \text{ s}$.

Μονάδες 7



Απάντηση

Δ1)

$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$: Η συνισταμένη είναι σταθερή και έχει θετική φορά, άρα και η επιτάχυνση είναι σταθερή και έχει θετική φορά.

Αφού το σώμα είναι ακίνητο αρχικά, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τη θετική φορά.

$5 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$: Η συνισταμένη είναι μηδενική, άρα και η επιτάχυνση είναι μηδενική ($\alpha_2 = 0$).

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση προς τη θετική φορά.

$10 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$: Η συνισταμένη είναι σταθερή και έχει αρνητική φορά, άρα και η επιτάχυνση είναι σταθερή και έχει αρνητική φορά.

Αφού η επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα, το σώμα εκτελεί (αρχικά) ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση προς τη θετική φορά.

Δ2)

Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$, η επιτάχυνση έχει τιμή

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma F_1}{m} = \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t ($t \leq 5 \text{ s}$) υπολογίζεται από τη σχέση: $v = \alpha_1 t$.

$$\text{Για } t_1 = 5 \text{ s} \Rightarrow v_1 = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s}) = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ3)

$$\text{0 s} \rightarrow \text{5 s}: s_1 = \Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s})^2 \Rightarrow s_1 = \Delta x_1 = 125 \text{ m}.$$

$$\text{5 s} \rightarrow \text{10 s}: s_2 = \Delta x_2 = v_1 (\Delta t_2) = \left(50 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(5 \text{ s}) \Rightarrow s_2 = \Delta x_2 = 250 \text{ m}.$$

$$\text{0 s} \rightarrow \text{10 s}: s_{1,2} = s_1 + s_2 = 125 \text{ m} + 250 \text{ m} \Rightarrow s_{1,2} = 375 \text{ m}.$$

Δ4)

10 s → 15 s : Η επιτάχυνση έχει αλγεβρική τιμή $\alpha_3 = \frac{\Sigma F_3}{m} = \frac{-5 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_3 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Τη χρονική στιγμή t ($10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}$), το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :
 $v = v_1 + \alpha_3(t - t_2)$, με $t_2 = 10 \text{ s}$.

Για $t = t_3 = 15 \text{ s} \Rightarrow v_3 = [50 + (-5) \cdot (15 - 10)] \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_3 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$:

$$W_{\text{ολ}} = K_3 - K_0 = \frac{1}{2} m(v_3^2 - v_0^2) \Rightarrow W_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (625 - 0) \text{ J} \Rightarrow W_{\text{ολ}} = 312,5 \text{ J}.$$

Εναλλακτικός τρόπος :

Υπολογίζω τη μετατόπιση στο χρονικό διάστημα $10 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$.

$$\Delta x_3 = v_1(\Delta t_3) + \frac{1}{2} \alpha_3(\Delta t_3)^2 = \left[50 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-5) \cdot 5^2 \right] \text{ m} \Rightarrow \Delta x_3 = 187,5 \text{ m}.$$

Το συνολικό έργο της συνισταμένης δύναμης είναι :

$$W_{\text{ολ}} = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) + (\Sigma F_2)(\Delta x_2) + (\Sigma F_3)(\Delta x_3) = (10 \text{ N})(125 \text{ m}) + 0 + (-5 \text{ N})(187,5 \text{ m}) \Rightarrow W_{\text{ολ}} = 312,5 \text{ J}.$$

7. (11636) Ένα αυτοκίνητο μάζας $m = 1000 \text{ kg}$ ξεκινάει από την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 2 \text{ m/s}^2$ σε ευθύγραμμο δρόμο για χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = 10 \text{ s}$. Στη συνέχεια με την ταχύτητα που απέκτησε κινείται ομαλά για $\Delta t_2 = 10 \text{ s}$. Στη συνέχεια αποκτά σταθερή επιβράδυνση με την οποία κινείται για χρονικό διάστημα $\Delta t_3 = 5 \text{ s}$ με αποτέλεσμα να σταματήσει.

Δ1) Να υπολογίσετε το διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο στο χρονικό διάστημα Δt_1 . **Μονάδες 5**

Δ2) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με το χρόνο, σε βαθμολογημένους άξονες, για όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης του. **Μονάδες 7**

Δ3) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου για όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησής του. **Μονάδες 7**

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο, σε όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης του. **Μονάδες 6**

Απάντηση

Δ1)

$$t_0 = 0 \rightarrow t_1 = 10 \text{ s}$$

Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 θα διανύσει διάστημα :

$$s_1 = \Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100 \text{ m} \Rightarrow s_1 = 100 \text{ m}.$$

Δ2)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου :

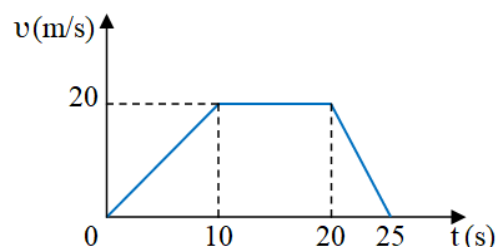
$$v_1 = \alpha t_1 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή

$$t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 20 \text{ s} \text{ έχει σταθερή ταχύτητα μέτρου } v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Στη συνέχεια επιβραδύνεται ομαλά μέχρι να σταματήσει τη χρονική στιγμή $t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 25 \text{ s}$.

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ3) Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 25 \text{ s}$ είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραπεζίου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$\Delta x = E_{\text{τραπ}} = \frac{(25+10) \cdot 20}{2} \text{ m} = 350 \text{ m}.$$

Αφού το αυτοκίνητο κινείται συνεχώς προς τη θετική φορά, ισχύει : $s_{\text{ολ}} = \Delta x = 350 \text{ m}$.

Η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου για όλη τη χρονική διάρκεια είναι :

$$v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} \Rightarrow v_{\mu} = \frac{350 \text{ m}}{25 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ4)

Εφαρμόζω το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) από τη στιγμή που ξεκινά το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει :

$$W_{\text{ολ}} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m (v_3^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \cdot 1000 (0 - 0) \text{ J} \Rightarrow W_{\text{ολ}} = 0 \text{ J}.$$

8. (11638) Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000 kg κινείται αρχικά σε ευθύγραμμο οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου ίσου με 10 m/s. Ο οδηγός του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή $t = 0$, πατώντας το γκάζι προσδίνει στο αυτοκίνητο σταθερή επιτάχυνση και τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s, το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου έχει διπλασιαστεί.

Να υπολογίσετε:

Δ1) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του αυτοκινήτου στο παραπάνω χρονικό διάστημα των 10 s,

Μονάδες 6

Δ2) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που επιτάχυνε το αυτοκίνητο,

Μονάδες 6

Δ3) τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ s έως

τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s,

Μονάδες 8

Δ4) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που έπρεπε να ασκείται στο αυτοκίνητο ώστε να διπλασιαστεί πάλι η αρχική του ταχύτητα, διανύοντας όμως τη μισή μετατόπιση από ότι στη προηγούμενη περίπτωση.

Μονάδες 5

Απάντηση

Δ1)

Σύμφωνα με την εκφώνηση : $v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = 2v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του αυτοκινήτου είναι :

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (400 - 100) \text{ J} = 150000 \text{ J}.$$

Δ2)

Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της επιτάχυνσης στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$ είναι :

$$\alpha = \frac{v - v_0}{t_1 - 0} \Rightarrow \alpha = \frac{(20 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} \Rightarrow \alpha = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$F_{\text{ολ}} = m\alpha \Rightarrow F_{\text{ολ}} = (1000 \text{ Kg}) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 1000 \text{ N}.$$

Δ3)

Το διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$s = \Delta x = v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow s = \Delta x = \left[10 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \right] \text{ m} \Rightarrow s = \Delta x = 150 \text{ m}.$$

Υπολογίζω τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$:

$$v_{\mu} = \frac{s}{t_1} \Rightarrow v_{\mu} = \frac{150 \text{ m}}{10 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ4)

Το μέτρο της μετατόπισης του αυτοκινήτου στη 2η περίπτωση, είναι : $\Delta x' = 75 \text{ m}$.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη 2η περίπτωση, από τη στιγμή που το αυτοκίνητο αρχίζει να επιταχύνεται μέχρι να διπλασιαστεί η ταχύτητά του :

$$W_{\text{ολ}}' = \Delta K \Leftrightarrow F_{\text{ολ}}'(\Delta x') = \Delta K \Leftrightarrow F_{\text{ολ}}' = \frac{\Delta K}{\Delta x'} \Rightarrow F_{\text{ολ}}' = \frac{150000 \text{ J}}{75 \text{ m}} \Rightarrow F_{\text{ολ}}' = 2000 \text{ N}.$$

9. (11639) Μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ εκτοξεύεται με οριζόντια αρχική ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$ σε οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το σώμα ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$.

Δίνεται ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα,

Μονάδες 5

Δ2) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$,

Μονάδες 5

Δ3) τη μετατόπιση του σώματος στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του,

Μονάδες 8

Δ4) το συνολικό έργο της τριβής ολίσθησης, από τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης, μέχρι τη στιγμή που θα σταματήσει το σώμα να κινείται.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg. \quad (1)$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu mg \Rightarrow T = 0,5(2 \text{ Kg})\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T = 10 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (με θετική φορά της τριβής) και υπολογίζω το μέτρο της επιβράδυνσης :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow T = m\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{T}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{10 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$v_1 = v_0 - \alpha t_1 \Rightarrow v_1 = (20 - 5 \cdot 2) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ3)

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζω το συνολικό χρονικό διάστημα μέχρι να σταματήσει το σώμα:

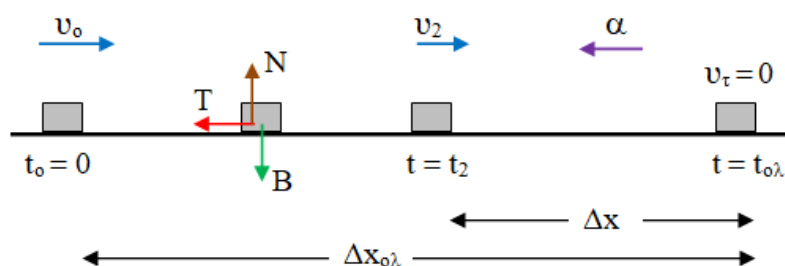
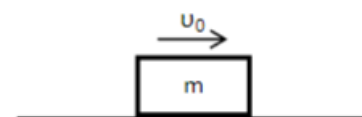
$$v = v_0 - \alpha t \xrightarrow{v=0} 0 = v_0 - \alpha t_{\text{ολ}} \Leftrightarrow \alpha t_{\text{ολ}} = v_0 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{v_0}{\alpha} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{20}{5} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 4 \text{ s}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$, η ταχύτητα έχει μέτρο :

$$v_2 = v_0 - \alpha t_2 = (20 - 5 \cdot 3) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος στη διάρκεια του τελευταίου δευτερολέπτου ($\Delta t = 1 \text{ s}$) είναι :

$$\Delta x = v_2 (\Delta t) - \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta x = \left(5 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 2,5 \text{ m}.$$



Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σώματος από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να σταματήσει :

$$W_T = \Delta K \Rightarrow W_T = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow W_T = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 400 \text{ J} \Rightarrow W_T = -400 \text{ J}.$$

Εναλλακτική απάντηση

Υπολογίζω το μέτρο της μετατόπισης του σώματος μέχρι να ακινητοποιηθεί :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = v_0 t_{\text{ολ}} - \frac{1}{2}at_{\text{ολ}}^2 \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = \left(20 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 40 \text{ m}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να σταματήσει το σώμα, είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_{\text{ολ}}) = -(10 \text{ N})(40 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -400 \text{ J}.$$

10. (11640) Μικρό σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του οριζόντιου επιπέδου είναι $\mu = 0,4$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ ασκείται στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου ίσο με 50 N με την επίδραση της οποίας το σώμα αρχίζει να κινείται στο οριζόντιο επίπεδο. Δίνεται ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$. Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα,

Μονάδες 7

Δ2) την κινητική ενέργεια του σώματος την χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$,

Μονάδες 6

Δ3) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$,

Μονάδες 8

Δ4) τη μέση ισχύ που προσφέρθηκε στο σώμα, μέσω της δύναμης $\vec{F}$, στη χρονική διάρκεια από την $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Απάντηση

Δ1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg. \quad (1)$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu mg \Rightarrow T = 0,4(5 \text{ Kg})\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T = 20 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (αλγεβρικά) :

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow F - T = ma \Leftrightarrow a = \frac{F - T}{m} \Rightarrow a = \frac{(50 - 20) \text{ N}}{5 \text{ Kg}} \Rightarrow a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου :

$$v = at_1 \Rightarrow v = \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2 \text{ s}) \Rightarrow v = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Την ίδια στιγμή, η κινητική ενέργεια είναι : $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 144 \text{ J} = 360 \text{ J}.$

Δ3)

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$\Delta x = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x = 12 \text{ m}.$$

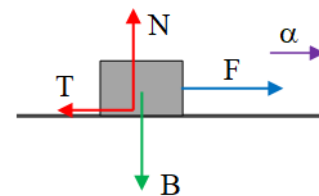
Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$W_F = F(\Delta x) = (50 \text{ N})(12 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 600 \text{ J}.$$

Δ4)

Η μέση ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ στη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_1 - t_0 = 2 \text{ s}$, είναι :

$$\bar{P}_F = \frac{W_F}{t_1} = \frac{600 \text{ J}}{2 \text{ s}} \Rightarrow \bar{P}_F = 300 \text{ W}.$$



11. (11642) Ένας μαθητής ξεκινά την χρονική στιγμή $t = 0$, να παρατηρεί ένα σώμα μάζας $m = 10 \text{ kg}$ που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_1 = 20 \text{ m/s}$. Το σώμα διανύει διάστημα $s_1 = 100 \text{ m}$ κινούμενο με σταθερή ταχύτητα και στη συνέχεια επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση μέχρι να σταματήσει. Αν γνωρίζετε ότι η χρονική διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι $\Delta t = 5 \text{ s}$ τότε:

Δ1) να υπολογίσετε το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος,

Μονάδες 5

Δ2) να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες από την χρονική στιγμή $t = 0$ έως την χρονική στιγμή που το σώμα σταματά,

Μονάδες 7

Δ3) να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος για τη συνολική χρονική διάρκεια που ο μαθητής παρατήρησε την κίνηση του,

Μονάδες 7

Δ4) να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του τραχέος τμήματος του δρόμου στον οποίο κινείται, αν γνωρίζετε ότι η τριβή ολίσθησης είναι η μοναδική δύναμη που επιβραδύνει το σώμα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Μονάδες 6

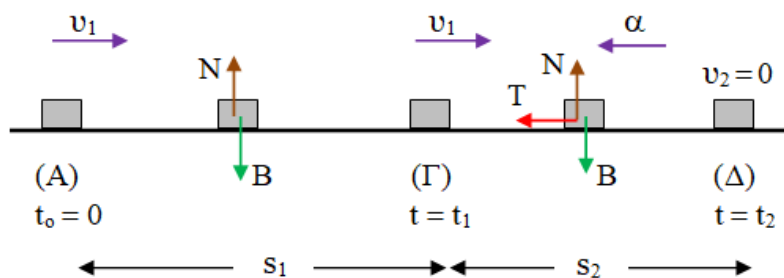
Απάντηση

Δ1)

$\Gamma \rightarrow \Delta$: το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η επιβράδυνση έχει μέτρο:

$$\alpha = \frac{v_1 - v_2}{\Delta t_2} = \frac{(20 - 0)}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Δ2)

$\Lambda \rightarrow \Gamma$: ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Από την εξίσωση του διαστήματος υπολογίζω τη χρονική διάρκεια κίνησης t_1 :

$$s_1 = v_1 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{s_1}{v_1} \Rightarrow t_1 = \frac{100}{20} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 5 \text{ s}.$$

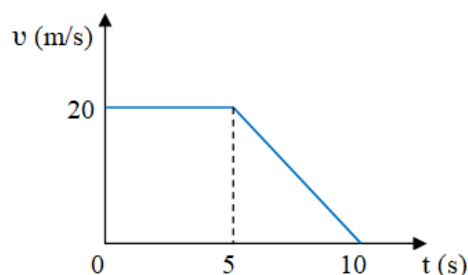
$\Gamma \rightarrow \Delta$: ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = v_1 - \alpha(t - t_1) \Rightarrow v = 20 - 4(t - 5) \text{ ή } v = 40 - 4t. \text{ (S.I.)}$$

Το σώμα σταματά τη στιγμή $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 5 \text{ s} + 5 \text{ s} = 10 \text{ s}$.

Το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ3)

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σώμα είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραpezίου στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου:

$$s_{\text{ολ}} = E_{\text{trap}} = \frac{(10 + 5) \cdot 20}{2} \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 150 \text{ m}.$$

Η μέση ταχύτητα στη χρονική διάρκεια $t_{ολ} = t_1 + \Delta t_2 = 10 \text{ s}$, έχει μέτρο :

$$v_{\mu} = \frac{s_{ολ}}{t_{ολ}} = \frac{150 \text{ m}}{10 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ4)

$\Gamma \rightarrow \Delta$:

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (θετική φορά της επιβράδυνσης) :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow T = m\alpha \Rightarrow T = (10 \text{ Kg}) \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow T = 40 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg \Rightarrow N = 100 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης υπολογίζω την τιμή του συντελεστή τριβής :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{40 \text{ N}}{100 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,4.$$

12. (11643) Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνεται η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο.

Δ1) Να υπολογίσετε τα μέτρα των επιταχύνσεων a_1 και a_2 με τις οποίες κινείται το σώμα κατά τα χρονικά διαστήματα $0\text{ s} - 4\text{ s}$ και $8\text{ s} - 10\text{ s}$ αντίστοιχα.

Μονάδες 5

Δ2) Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της τιμής της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως και την χρονική στιγμή $t = 10\text{ s}$.

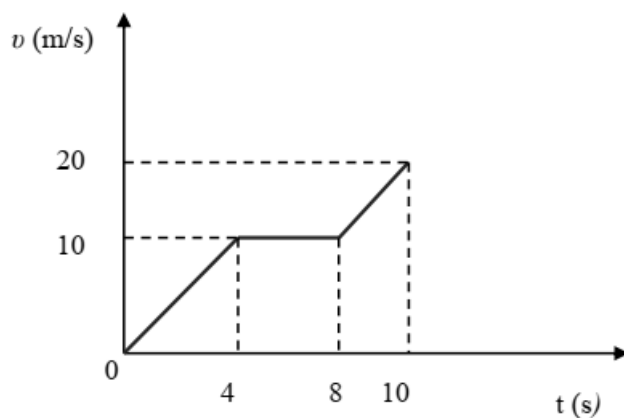
Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος κατά το χρονικό διάστημα $0\text{ s} - 10\text{ s}$. **Μονάδες 7**

Δ4) Αν K_1 και K_2 είναι οι τιμές της κινητικής ενέργειας του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = 2\text{ s}$ και

$t_2 = 9\text{ s}$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{K_1}{K_2}$.

Μονάδες 7



Απάντηση

Δ1)

$$0\text{ s} \rightarrow 4\text{ s}: \alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1' - t_0} = \frac{(10-0)\frac{\text{m}}{\text{s}}}{(4-0)\text{s}} = 2,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

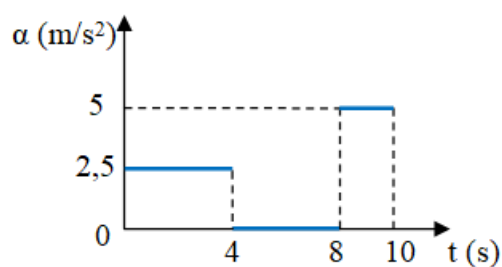
$$8\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}: \alpha_2 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2'} = \frac{(20-10)\frac{\text{m}}{\text{s}}}{(10-8)\text{s}} = 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

$$0\text{ s} \rightarrow 4\text{ s}: \alpha = 2,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$4\text{ s} \rightarrow 8\text{ s}: v = \text{σταθερή} \Rightarrow \alpha = 0.$$

$$8\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}: \alpha = 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Δ3)

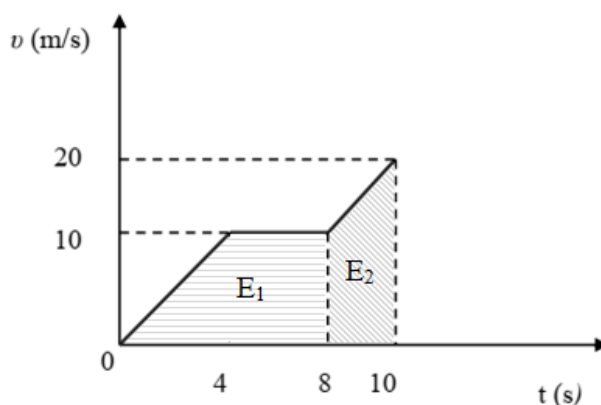
Το συνολικό διάστημα είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$s_{\text{ολ}} = E_{1(\text{τραπ})} + E_{2(\text{τραπ})} = \frac{(8+4) \cdot 10}{2} \text{ m} + \frac{(20+10) \cdot 2}{2} \text{ m} \Rightarrow$$

$$s_{\text{ολ}} = 60\text{ m} + 30\text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 90\text{ m}.$$

Η μέση ταχύτητα υπολογίζεται έχει τιμή :

$$v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{90\text{ m}}{10\text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 9\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Δ4)

0 s → 4 s : Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με $v_0 = 0$ και επιτάχυνση $\alpha_1 = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = \alpha_1 t_1 = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4 s → 8 s : Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ($v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{σταθερή}$).

8 s → 10 s : Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με $v_0' = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και επιτάχυνση $\alpha_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 9 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου

$$v_2 = v_0' + \alpha_2(t_2 - t_2') \xrightarrow{t_2' = 8 \text{ s}} v_2 = [10 + 5 \cdot (9 - 8)] \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το πηλίκο των κινητικών ενεργειών είναι :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2}{\frac{1}{2} m v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{9}.$$

13. (11644) Στο δάπεδο του διαδρόμου του σχολείου βρίσκεται ακίνητο ένα κιβώτιο με βιβλία συνολικής μάζας $m = 20 \text{ kg}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο Γιάννης αρχίζει να σπρώχνει το κιβώτιο ασκώντας σε αυτό οριζόντια σταθερή δύναμη μέτρου 50 N . Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ η ταχύτητα του κιβωτίου έχει μέτρο $v = 2 \text{ m/s}$ και ο Γιάννης σταματά να σπρώχνει το κιβώτιο. Στη συνέχεια το κιβώτιο κινείται για λίγο ακόμη πάνω στο δάπεδο και τέλος σταματά.

Δίνεται ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) την επιτάχυνση του κιβωτίου στη χρονική διάρκεια που ο Γιάννης έσπρωχνε το κιβώτιο,

Μονάδες 5

Δ2) τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου,

Μονάδες 7

Δ3) την ενέργεια που προσφέρθηκε από το Γιάννη στο κιβώτιο, μέσω του έργου της δύναμης.

Μονάδες 6

Δ4) το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κιβώτιο πάνω στο δάπεδο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι να σταματήσει.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

$$t_0 = 0 \text{ s} \rightarrow t_1 = 4 \text{ s}$$

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

($v_0 = 0$). Ισχύει :

$$v_1 = \alpha_1 t_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{v_1}{t_1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (αλγεβρικά) για το διάστημα $0 \text{ s} - 4 \text{ s}$ και υπολογίζω το μέτρο της τριβής ολίσθησης :

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow T = F - m\alpha_1 \Rightarrow T = 50 \text{ N} - (20 \text{ Kg})\left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T = 40 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B = mg = 200 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{40 \text{ N}}{200 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,2.$$

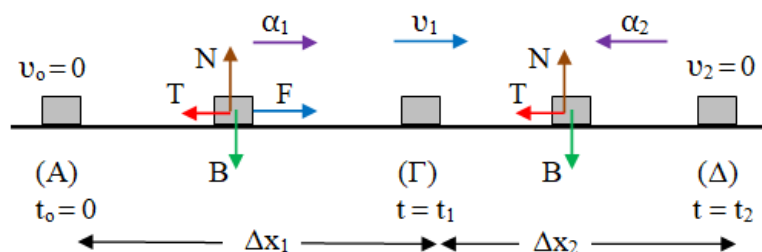
Δ3)

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} \left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (16 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 4 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$W_F = F(\Delta x_1) = (50 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 200 \text{ J}.$$



Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που ξεκινά το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_F + W_T = 0 \Leftrightarrow W_T = -W_F \Leftrightarrow -T(\Delta x_{ολ}) = -W_F \Leftrightarrow \Delta x_{ολ} = \frac{W_F}{T} \Rightarrow$$

$$\Delta x_{ολ} = \frac{200 \text{ J}}{40 \text{ N}} \Rightarrow \Delta x_{ολ} = 5 \text{ m}.$$

Εναλλακτική απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που καταργείται η δύναμη μέχρι να σταματήσει το κιβώτιο :

$$\Sigma W = K_{\Delta} - K_{\Gamma} \Leftrightarrow -T(\Delta x_2) = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Leftrightarrow \Delta x_2 = \frac{mv_1^2}{2T} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{20 \cdot 2^2}{2 \cdot 40} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 1 \text{ m}.$$

Η συνολική μετατόπιση έχει μέτρο : $\Delta x_{ολ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 4 \text{ m} + 1 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{ολ} = 5 \text{ m}.$

14. (11645) Ένα κιβώτιο με πλακάκια μάζας $m = 50 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο πάνω στο έδαφος. Με τη βοήθεια ενός γερανού το κιβώτιο ανυψώνεται κατακόρυφα. Η δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί ο γερανός στο κιβώτιο, έχει κατακόρυφη διεύθυνση και η τιμή της στα πρώτα δύο μέτρα της ανόδου, συναρτήσει του ύψους h του κιβωτίου από το έδαφος παριστάνεται στο διάγραμμα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της επιτάχυνσης του κιβωτίου τη χρονική στιγμή που βρίσκεται σε ύψος 1m πάνω από το έδαφος,

Μονάδες 6

Δ2) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για να ανυψωθεί το κιβώτιο κατά 2 m πάνω από το έδαφος,

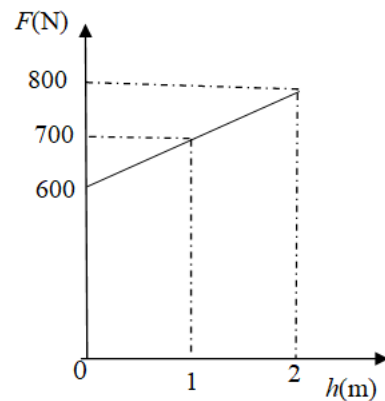
Μονάδες 6

Δ3) το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου τη χρονική στιγμή που βρίσκεται σε ύψος ίσο με 2 m πάνω από το έδαφος.

Μονάδες 7

Δ4) το χρόνο που θα χρειαζόταν το κιβώτιο για να ανέλθει κατά 2 m, αν ανέβαινε συνεχώς με σταθερή επιτάχυνση ίση με αυτήν που υπολογίσατε στο ερώτημα Δ1.

Μονάδες 6



Απάντηση

Δ1)

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, στο σώμα ασκείται και το βάρος του που έχει μέτρο

$$B = mg = (50 \text{ Kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 500 \text{ N}.$$

Σε ύψος $h_1 = 1 \text{ m}$, η δύναμη έχει μέτρο $F_1 = 700 \text{ N}$.

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = m\alpha_1 \Leftrightarrow F_1 - B = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F_1 - B}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(700 - 500) \text{ N}}{50 \text{ Kg}} \Rightarrow$$

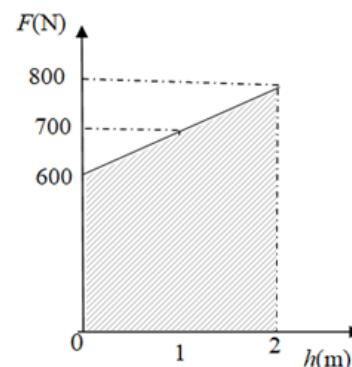
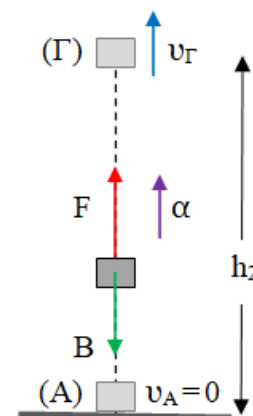
$$\alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Η δύναμη $\vec{F}$ έχει σταθερή διεύθυνση και το μέτρο της μεταβάλλεται με το ύψος h από το έδαφος.

Το έργο της δύναμης στα πρώτα 2 m της κίνησης είναι ίσο (αριθμητικά) με το αντίστοιχο εμβαδό στο διάγραμμα δύναμης – ύψους :

$$W_F = E_{\text{τραπ}} = \frac{(800 + 600) \cdot 2}{2} \text{ J} \Rightarrow W_F = 1400 \text{ J}.$$



Δ3)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του κιβωτίου από το σημείο Α του εδάφους μέχρι το σημείο Γ σε ύψος $h_2 = 2 \text{ m}$:

$$K_{\Gamma} - K_A = W_F + W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 - 0 = W_F - Bh_2 \Leftrightarrow v_{\Gamma}^2 = \frac{2(W_F - Bh_2)}{m} \Rightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{\frac{2(W_F - Bh_2)}{m}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_{\Gamma} = \sqrt{\frac{2(1400 - 1000)}{50}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{16} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\Gamma} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ4)

Αν το κιβώτιο είχε σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, θα εκτελούσε ευθύγραμμη ομαλά

επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Σε χρονική διάρκεια Δt το κιβώτιο θα διένυε απόσταση h_2 .

Ισχύει :

$$h_2 = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \Leftrightarrow (\Delta t)^2 = \frac{2h_2}{\alpha} \Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2h_2}{\alpha}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{4}} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 1 \text{ s}.$$

15. (11646) Από ένα στρατιωτικό ελικόπτερο, που για λίγο αιωρείται ακίνητο σε κάποιο ύψος πάνω από ένα φυλάκιο, αφήνεται ένα δέμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ για να το παραλάβουν οι στρατιώτες του φυλακίου. Το δέμα πέφτει κατακόρυφα και διέρχεται από ένα σημείο (Α) της τροχιάς του με ταχύτητα μέτρου 10 m/s και από ένα άλλο σημείο (Β) με ταχύτητα μέτρου 20 m/s . Το σημείο (Β) βρίσκεται πιο κοντά στο έδαφος και απέχει από το σημείο (Α), απόσταση 30 m . Ο αέρας ασκεί δύναμη $\vec{F}$ στο δέμα η οποία έχει την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά από την ταχύτητα του δέματος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Δ1) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου μεταξύ των θέσεων Α και Β.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη διαδρομή του δέματος από το Α ως το Β.

Μονάδες 7

Αν με τα παραπάνω δεδομένα, υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή, να υπολογίσετε:

Δ3) το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Δ4) το χρόνο κίνησης του δέματος μεταξύ των σημείων Α και Β.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του δέματος μεταξύ των θέσεων Α, Β είναι :

$$\Delta K = K_B - K_A = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (400 - 100) \text{ J} \Rightarrow \Delta K = 300 \text{ J}.$$

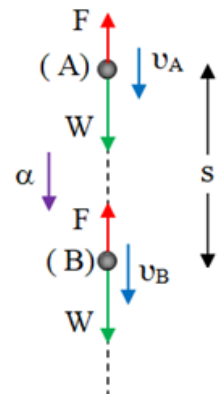
Δ2)

Στο δέμα ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις : το βάρος $\vec{W}$ και η δύναμη $\vec{F}$ από τον αέρα (με φορά προς τα πάνω).

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το Α στο Β :

$$W_W + W_F = \Delta K \Leftrightarrow W_F = \Delta K - mgs \Rightarrow W_F = 300 \text{ J} - 600 \text{ J} \Rightarrow$$

$$W_F = -300 \text{ J}.$$



Δ3)

Αφού η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή και έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση, ισχύει :

$$W_F = -F \cdot s \Leftrightarrow F = -\frac{W_F}{s} \Rightarrow F = -\frac{-300 \text{ J}}{30 \text{ m}} \Rightarrow F = 10 \text{ N}.$$

Δ4)

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης του δέματος :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow mg - F = ma \Leftrightarrow a = \frac{mg - F}{m} \Rightarrow a = \frac{(20 - 10) \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το δέμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Από τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης υπολογίζω τη χρονική διάρκεια κίνησης :

$$a = \frac{v_B - v_A}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{v_B - v_A}{a} \Rightarrow \Delta t = \frac{(20 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ s}.$$

16. (11647) Ένας κύβος μάζας 10 kg ολισθαίνει πάνω σε λείο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα, μέτρου $v_0 = 3 \text{ m/s}$, κατά μήκος μιας ευθείας που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'x$. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ όπου ο κύβος διέρχεται από τη θέση $x = 0 \text{ m}$ του άξονα κινούμενος προς τη θετική φορά αρχίζει να ασκείται σε αυτόν οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα. Το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται με την θέση x του κύβου, σύμφωνα με την σχέση $F = 10 \cdot x$ [F σε N και x σε m]. Τη χρονική στιγμή που ο κύβος διέρχεται από τη θέση $x = 4 \text{ m}$ η δύναμη $\vec{F}$ παύει να ασκείται. Αμέσως μετά την κατάργηση της $\vec{F}$ ο κύβος εισέρχεται σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο, μέχρι να σταματήσει να κινείται. Η κίνηση στο τραχύ δάπεδο διαρκεί χρόνο ίσο με 2,5 s. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Δ1) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κύβου στη θέση $x = 2 \text{ m}$.

Μονάδες 5

Δ2) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ σε συνάρτηση με τη θέση x για τη μετατόπιση από $0 \text{ m} \rightarrow 4 \text{ m}$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε την ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύβο, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$, κατά τη διάρκεια της μετατόπισης του κύβου από τη θέση $x = 0 \text{ m}$ έως τη θέση $x = 4 \text{ m}$.

Μονάδες 7

Δ3) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κύβου στη θέση $x = 4 \text{ m}$.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κύβου-δαπέδου στο τραχύ δάπεδο.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

Στη θέση $x_1 = 2 \text{ m}$ η δύναμη έχει μέτρο

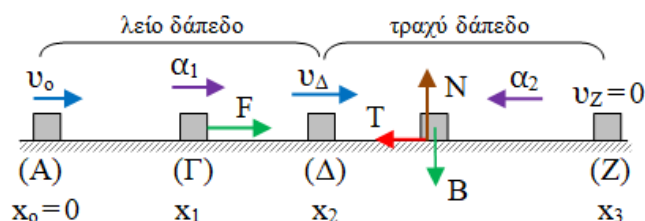
$$F_1 = 10 \cdot 2 \text{ N} = 20 \text{ N}.$$

Αφού το δάπεδο είναι λείο, άρα η μοναδική δύναμη στον άξονα x είναι η δύναμη $\vec{F}$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F_1 = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F_1}{m}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \alpha_1 = \frac{20 \text{ N}}{10 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Δ2)

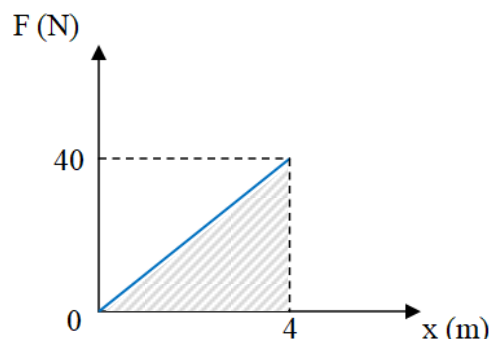
Σχεδιάζω το διάγραμμα της σχέσης $F = 10x$ (S.I.).

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow F = 0.$$

$$\text{Για } x = 4 \text{ m} \Rightarrow F = 40 \text{ N}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για τη διαδρομή από $x_0 = 0$ έως $x_2 = 4 \text{ m}$ είναι ίσο (αριθμητικά) με το αντίστοιχο εμβαδό στο διάγραμμα $F = f(x)$:

$$W_F = E_{\text{τριγ}} = \frac{40 \cdot 4}{2} \text{ J} \Rightarrow W_F = 80 \text{ J}.$$



Δ3)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από την αρχική θέση Α ($x_0 = 0$) έως τη θέση Δ ($x_2 = 4 \text{ m}$) :

$$K_{\Delta} - K_A = W_F \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\Delta}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_F \Leftrightarrow v_{\Delta}^2 = v_0^2 + \frac{2W_F}{m} \Leftrightarrow v_{\Delta} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2W_F}{m}}.$$

Με αντικατάσταση : $v_{\Delta} = \sqrt{9 + \frac{2 \cdot 80}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \sqrt{25} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\Delta} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Δ4)

Στο τραχύ δάπεδο το σώμα δέχεται στον άξονα x μόνο τη σταθερή δύναμη τριβής, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση για χρονική διάρκεια $\Delta t_2 = 2,5 \text{ s}$.

Υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης :

$$\alpha_2 = \frac{v_z - v_{\Delta}}{\Delta t_2} = \frac{(0 - 5) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,5 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x υπολογίζω το μέτρο της τριβής :

$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow -T = m\alpha_2 \Leftrightarrow T = -m\alpha_2 \Rightarrow T = -(10\text{Kg})\left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T = 20 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 100 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής υπολογίζω τον συντελεστή τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{20 \text{ N}}{100 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,2.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση χρησιμοποιεί το ίδιο σύμβολο x για τρεις διαφορετικές θέσεις του κύβου.

17. (11648) Μία παλέτα με τούβλα μάζας $m = 400 \text{ kg}$ ανυψώνεται κατακόρυφα με τη βοήθεια ενός γερανού κατά 10 m πάνω από το έδαφος. Ο γερανός ασκεί στην παλέτα κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω, το μέτρο της οποίας έχει τέτοια τιμή ώστε η παλέτα ξεκινώντας από την ηρεμία αρχικά να επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση για χρονική διάρκεια ίση με 5 s και να φτάνει σε ύψος 5 m από το έδαφος και στη συνέχεια να επιβραδύνεται ομαλά μέχρι να σταματήσει σε ύψος 10 m πάνω από το έδαφος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της επιτάχυνσης της παλέτας στα πρώτα 5 s της κίνησης, καθώς και το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά στο τέλος της επιταχυνόμενης κίνησης,

Μονάδες 6

Δ2) το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο γερανός στην παλέτα κατά τη διάρκεια της επιταχυνόμενης κίνησης,

Μονάδες 6

Δ3) το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο γερανός στην παλέτα κατά τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης,

Μονάδες 7

Δ4) τη μέση ισχύ του γερανού κατά τη διάρκεια της ανόδου της παλέτας.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Στη χρονική διάρκεια από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 5 \text{ s}$, ένα σημείο της παλέτας εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Από την εξίσωση της μετατόπισης (για $\Delta y_1 = h_1 = 5 \text{ m}$) υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης α_1 :

$$h_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2h_1}{t_1^2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2 \cdot 5 \text{ m}}{25 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha_1 = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας της χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ2)

Κατά τη διάρκεια της κίνησης, στην παλέτα ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις: η δύναμη από το γερανό που έχει φορά προς τα πάνω και σταθερό μέτρο F_1 και το βάρος που έχει μέτρο $B = mg$.

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$\Sigma F_1 = m\alpha_1 \Leftrightarrow F_1 - B = m\alpha_1 \Leftrightarrow F_1 = mg + m\alpha_1 \Leftrightarrow F_1 = m(g + \alpha_1).$$

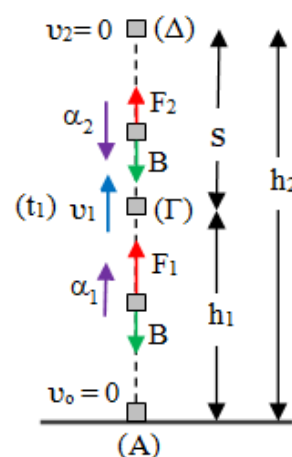
$$\text{Με αντικατάσταση: } F_1 = (400 \text{ Kg}) \left(10,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow F_1 = 4160 \text{ N}.$$

Δ3)

Στη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης, ένα σημείο διανύει απόσταση $s = h_2 - h_1 = (10 - 5) \text{ m} = 5 \text{ m}$ μέχρι να ακινητοποιηθεί. Έστω F_2 το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο γερανός στην παλέτα.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το σημείο Γ σε ύψος h_1 μέχρι το σημείο Δ σε ύψος h_2 :

$$W_F + W_B = K_\Delta - K_\Gamma \Leftrightarrow (F_2 - mg)s = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Leftrightarrow F_2 - mg = -\frac{mv_1^2}{2s} \Leftrightarrow F_2 = m\left(g - \frac{v_1^2}{2s}\right).$$



Με αντικατάσταση : $F_2 = 400 \cdot \left(10 - \frac{2^2}{2 \cdot 5}\right) \text{N} \Rightarrow F_2 = 3840 \text{N}.$

Δ4)

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στην επιβραδυνόμενη κίνηση υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιβράδυνσης α_2 :

$$\Sigma F_2 = m\alpha_2 \Leftrightarrow F_2 - mg = m\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{F_2 - mg}{m} = \frac{F_2}{m} - g \Rightarrow \alpha_2 = \left(\frac{3840}{400} - 10\right) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από τη εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση υπολογίζω τη χρονική διάρκεια Δt_2 της κίνησης :

$$v_2 = v_1 + \alpha_2(\Delta t_2) \xrightarrow{v_2=0} 0 = v_1 + \alpha_2(\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v_1}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = -\frac{2}{-0,4} \text{s} \Rightarrow \Delta t_2 = 5 \text{s}.$$

Το έργο της δύναμης που ασκεί ο γερανός σε όλη τη διάρκεια της κίνησης είναι:

$$W_F = F_1 \cdot h_1 + F_2 \cdot s = (4160 + 3840) \cdot 5 \text{ J} = 40000 \text{ J}.$$

Η συνολική διάρκεια της κίνησης είναι :

$$\Delta t_{\text{ολ}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 5 \text{ s} + 5 \text{ s} = 10 \text{ s}.$$

Η μέση ισχύς του γερανού κατά τη διάρκεια της ανόδου της παλέτας είναι :

$$P_{\mu} = \frac{W_F}{\Delta t_{\text{ολ}}} = \frac{40000 \text{ J}}{10 \text{ s}} \Rightarrow P_{\mu} = 4000 \text{ W}.$$

18. (11649) Ένα κιβώτιο μάζας $m = 20 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δάπεδο. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κιβωτίου σε συνάρτηση με το χρόνο. Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης στα 5 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησης του κιβωτίου είναι $\Sigma F = 40 \text{ N}$.

Δ1) Να χαρακτηρίσετε τα είδη των κινήσεων που εκτελεί το κιβώτιο στις χρονικές διάρκειες $0 \text{ έως } 5 \text{ s}$ και $5 \text{ s έως } 15 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Να υπολογίσετε:

Δ2) το μέτρο της επιτάχυνσης και της μετατόπισης του κιβωτίου, στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5 \text{ s}$,

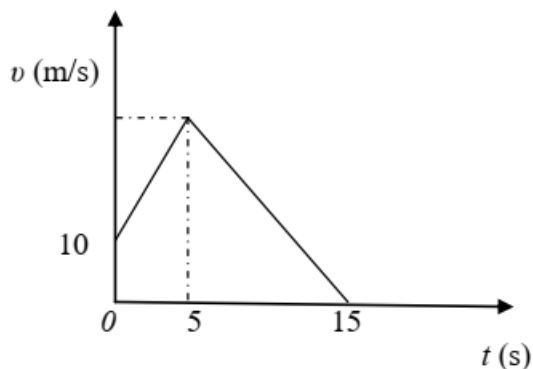
Μονάδες 7

Δ3) τη μέση ταχύτητα του κιβωτίου στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 15 \text{ s}$,

Μονάδες 6

Δ4) το έργο της συνισταμένης δύναμης στη χρονική διάρκεια $5 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$.

Μονάδες 7



Απάντηση

Δ1)

$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$: Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

$5 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$: Το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται γραμμικά με το χρόνο (και τη χρονική στιγμή $t_2 = 15 \text{ s}$ μηδενίζεται), άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.

Δ2)

$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$: Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης :

$$\Sigma F_1 = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\Sigma F_1}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{40 \text{ N}}{20 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η τιμή της μετατόπισης μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \left(10 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 25 \right) \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 75 \text{ m}.$$

Δ3)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ το κιβώτιο έχει ταχύτητα μέτρου :

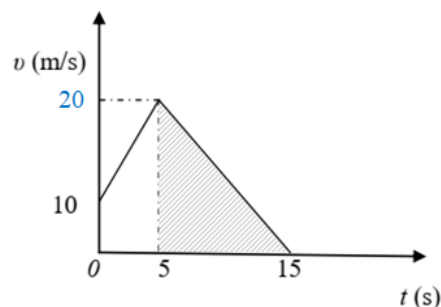
$$v_1 = v_0 + \alpha_1 t_1 = (10 + 2 \cdot 5) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$5 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$: Η τιμή της μετατόπισης είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του τριγώνου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$\Delta x_2 = E_{\text{τριγ}} = \frac{20 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 100 \text{ m}.$$

Εναλλακτικά, η τιμή της μετατόπισης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Delta x_2 = \frac{v_1 (\Delta t_2)}{2} = \frac{20 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 100 \text{ m}.$$



Το συνολικό διάστημα είναι : $s_{ολ} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 175 \text{ m}$.

Η μέση ταχύτητα έχει μέτρο : $v_{\mu} = \frac{s_{ολ}}{t_{ολ}} = \frac{175 \text{ m}}{15 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = \frac{35}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη χρονική διάρκεια $5 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$:

$$\Sigma W_2 = K_3 - K_2 = 0 - \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow \Sigma W_2 = -\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 400 \text{ J} \Rightarrow \Sigma W_2 = -4000 \text{ J}.$$

Εναλλακτική απάντηση

Υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης στη χρονική διάρκεια $5 \text{ s} - 15 \text{ s}$:

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0 - 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(15 - 5) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το έργο της συνισταμένης δύναμης στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$\Sigma W_2 = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (m \alpha_2)(\Delta x_2) \Rightarrow \Sigma W_2 = -(20 \cdot 2 \cdot 100) \text{ J} \Rightarrow \Sigma W_2 = -4000 \text{ J}.$$

19. (11650) Μεταλλικός κύβος έλκεται με τη βοήθεια ενός ηλεκτροκινητήρα, πάνω σε οριζόντιο διάδρομο. Στον κύβο ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση. Με τη βοήθεια συστήματος φωτοπυλών παίρνουμε την πληροφορία ότι το μέτρο της ταχύτητας του κύβου τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι ίσο με 2 m/s και τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ είναι ίσο με $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Η μέση ισχύς του ηλεκτροκινητήρα (ο μέσος ρυθμός προσφερόμενης ενέργειας στον κύβο μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$), στο παραπάνω χρονικό διάστημα των 2 s είναι $P_\mu = 98 \text{ W}$. Επίσης, έχει μετρηθεί πειραματικά ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κύβου και του διαδρόμου και βρέθηκε ίσος με $0,2$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται ο κύβος,

Μονάδες 5

Δ2) την ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύβο μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα των 2 s ,

Μονάδες 6

Δ3) το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 7

Δ4) τη μάζα του κύβου.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της επιτάχυνσης του κύβου είναι :

$$\alpha = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{(12 - 2) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(2 - 0) \text{s}} \Rightarrow \alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Από τη σχέση της μέσης ισχύος υπολογίζω το έργο της δύναμης $\vec{F}$:

$$P_\mu = \frac{W_F}{\Delta t} \Leftrightarrow W_F = P_\mu (\Delta t) \Rightarrow W_F = (98 \text{ W})(2 \text{ s}) \Rightarrow W_F = 196 \text{ J}.$$

Δ3)

Υπολογίζω το μέτρο της μετατόπισης του κύβου μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 :

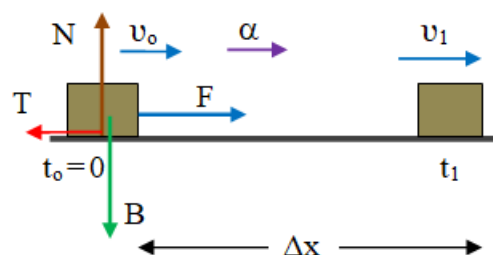
$$\Delta x = v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \left(2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2^2 \right) \text{m} \Rightarrow \Delta x = 14 \text{m}.$$

Από τη σχέση του έργου σταθερής δύναμης υπολογίζω το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$:

$$W_F = F(\Delta x) \Leftrightarrow F = \frac{W_F}{\Delta x} \Rightarrow F = \frac{196 \text{ J}}{14 \text{ m}} \Rightarrow F = 14 \text{ N}.$$

Δ4)

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, στον κύβο ασκούνται και οι εξής δυνάμεις: η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, το βάρος $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο.



Στον άξονα y ο κύβος ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = mg. \quad (1)$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης προκύπτει :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu mg. \quad (2)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow F - T = ma \xrightarrow{(2)} F - \mu mg = ma \Leftrightarrow F = m(\mu g + a) \Leftrightarrow m = \frac{F}{\mu g + a}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } m = \frac{14}{0,2 \cdot 10 + 5} \text{ Kg} \Rightarrow m = 2 \text{ Kg}.$$

20. (11652) Ένα κιβώτιο μάζας 5 kg είναι αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F_1 = 20 \text{ N}$ με αποτέλεσμα το κιβώτιο να επιταχύνεται. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, αρχίζει να ασκείται στο κιβώτιο και άλλη σταθερή δύναμη $\vec{F}_2$, με φορά αντίθετη από αυτήν που είχε η $\vec{F}_1$, οπότε η ταχύτητα του κιβωτίου μηδενίζεται τη στιγμή $t_2 = 9 \text{ s}$.

Δ1) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κιβωτίου κατά την διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης, καθώς και το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$.

Μονάδες 8

Δ3) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου, σε συνάρτηση με το χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων, για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 9 \text{ s}$ και να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του κιβωτίου στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ στο χρονικό διάστημα $5 \text{ s} \rightarrow 9 \text{ s}$.

Μονάδες 5

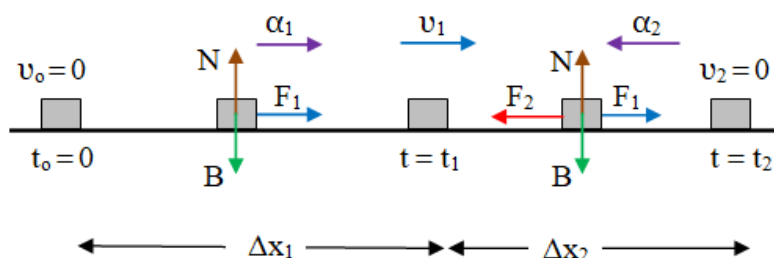
Απάντηση

Δ1) $0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης :

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{20 \text{ N}}{5 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).



Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, το μέτρο της ταχύτητας είναι : $v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Δ2) $5 \text{ s} \rightarrow 9 \text{ s}$

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση :

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{(0 - 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(9 - 5) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_2 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ άρα η επιτάχυνση έχει μέτρο } |\alpha_2| = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (με θετική φορά προς τα δεξιά) :

$$\Sigma F_x = m \alpha_2 \Leftrightarrow F_1 - F_2 = m \alpha_2 \Leftrightarrow F_2 = F_1 - m \alpha_2 \Rightarrow F_2 = 20 \text{ N} - (5 \text{ Kg}) \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow F_2 = 45 \text{ N}.$$

Δ3)

$0 \text{ s} - 5 \text{ s}$: το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση : $v = 4t$. (S.I.)

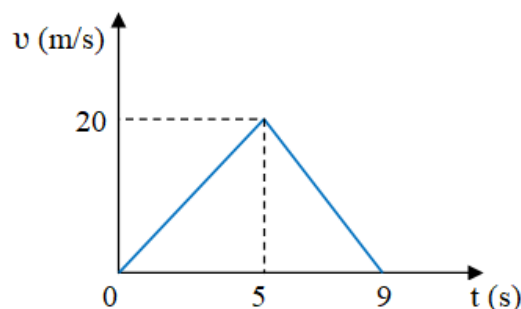
για $t = 0 \Rightarrow v = 0$.

για $t = 5 \text{ s} \Rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

$5 \text{ s} - 9 \text{ s}$: το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση : $v = v_1 + \alpha_2(t - t_1) \Rightarrow v = 20 - 5(t - 5)$. (S.I.)

για $t = 9 \text{ s} \Rightarrow v = 0$.

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κιβώτιο είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τριγώνου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου : $s_{ολ} = E_{\text{τριγ}} = \frac{20 \cdot 9}{2} \text{ m} \Rightarrow s_{ολ} = 90 \text{ m}.$

Η μέση ταχύτητα του κιβωτίου έχει μέτρο : $v_{\mu} = \frac{s_{ολ}}{t_{ολ}} = \frac{90 \text{ m}}{9 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Δ4)

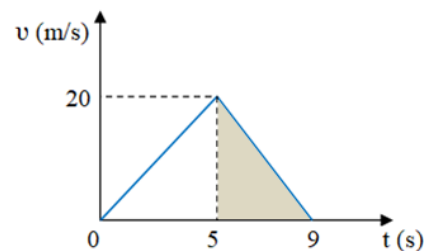
Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $5 \text{ s} \rightarrow 9 \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Delta x_2 = \frac{v_1 \cdot (\Delta t_2)}{2} = \frac{20 \cdot 4}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 40 \text{ m}.$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της μετατόπισης

Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $5 \text{ s} \rightarrow 9 \text{ s}$ είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου (που έχει βάση το χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = 4 \text{ s}$), στο διάγραμμα της ταχύτητας :

$$\Delta x_2 = E_{\text{τριγ}(2)} = \frac{20 \cdot 4}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 40 \text{ m}.$$



➤ Το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ σε αυτή τη χρονική διάρκεια είναι :

$$W_2 = -F_2(\Delta x_2) = -(45 \text{ N})(40 \text{ m}) \Rightarrow W_2 = -1800 \text{ J}.$$

21. (11654) Ένα κιβώτιο μάζας $m = 4 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο στο έδαφος. Στο κιβώτιο ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη μέτρου 80 N , με φορά προς τα πάνω, οπότε και αρχίζει να ανυψώνεται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση.

Δ1) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία ανέρχεται το κιβώτιο.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου, τη χρονική στιγμή, που βρίσκεται σε ύψος $h = 5 \text{ m}$ από το έδαφος.

Μονάδες 6

Δ3) Να αποδείξετε ότι στη διάρκεια της ανόδου του κιβωτίου με τη δράση της δύναμης, η δυναμική ενέργεια που έχει σε οποιοδήποτε ύψος είναι ίση με την κινητική του ενέργεια στο ίδιο ύψος.

Μονάδες 6

Δ4) Τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο βρίσκεται σε ύψος $h = 5 \text{ m}$ από το έδαφος καταργείται η δύναμη. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος από το έδαφος στο οποίο φθάνει το κιβώτιο.

Μονάδες 7

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Θεωρήστε ως επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια το έδαφος, καθώς και την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Απάντηση

Δ1)

Για τη διαδρομή από το σημείο Α του εδάφους μέχρι το σημείο Γ σε ύψος h :

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της

Μηχανικής :

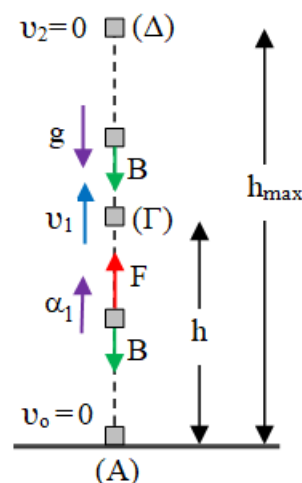
$$\alpha_1 = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F - B}{m} = \frac{F - mg}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(80 - 40) \text{ N}}{4 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το Α μέχρι το Γ :

$$K_{\Gamma} - K_A = W_F + W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = (F - B) \cdot h \Leftrightarrow v_1^2 = \frac{2(F - mg)h}{m} \Rightarrow$$

$$v_1^2 = \frac{2 \cdot (80 - 40) \cdot 5 \text{ m}^2}{4 \text{ s}^2} = 100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Δ3)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το έδαφος μέχρι ένα τυχαίο σημείο σε ύψος y ($0 \leq y \leq 5 \text{ m}$) :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F + W_B \Leftrightarrow K - 0 = (F - B) \cdot y \Rightarrow K = (80 - 40)y \text{ ή } K = 40y. \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια στη θέση αυτή (ως προς το έδαφος) είναι : $U = mgy \Rightarrow U = 40y. \text{ (S.I.)} \quad (2)$

$$(1), (2) \Rightarrow K = U.$$

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το σημείο Α του εδάφους μέχρι το ανώτερο σημείο Δ :

$$W_F + W_B = K_{\Delta} - K_A \Leftrightarrow Fh - mgh_{\max} = 0 \Leftrightarrow Fh = mgh_{\max} \Leftrightarrow h_{\max} = \frac{Fh}{mg}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } h_{\max} = \frac{80 \cdot 5}{4 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow h_{\max} = 10 \text{ m}.$$

22. (11655) Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ που κινείται σε οριζόντιο ευθύγραμμο δρόμο.

Δ1) Αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα στα χρονικά διαστήματα :

$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$, $10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$ και $20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες, για το χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$.

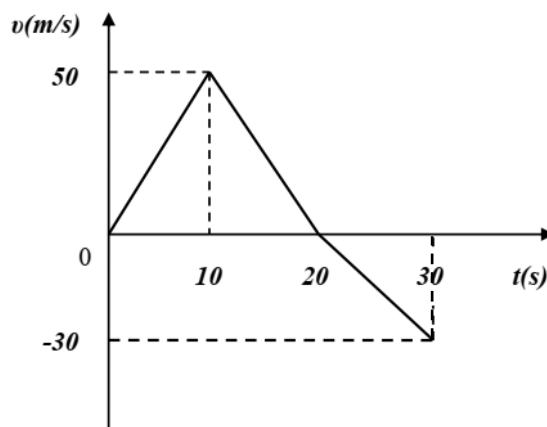
Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος για το χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης δύναμης για το χρονικό διάστημα από $10 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$.

Μονάδες 7



Απάντηση

Δ1)

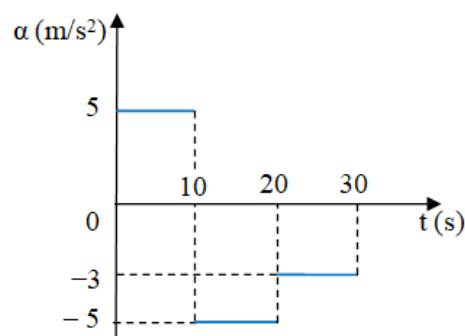
$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s} : \alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{(50 - 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(10 - 0) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s} : \alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0 - 50) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(20 - 10) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_2 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \alpha_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{(-30 - 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(30 - 20) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_3 = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Δ3)

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

$$0 \text{ s} - 20 \text{ s} : \Delta x_1 = E_1 = \frac{50 \cdot 20}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 500 \text{ m}.$$

$$20 \text{ s} - 30 \text{ s} : \Delta x_2 = E_2 = \frac{-30 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = -150 \text{ m}.$$

Το συνολικό διάστημα που διανύθηκε, είναι :

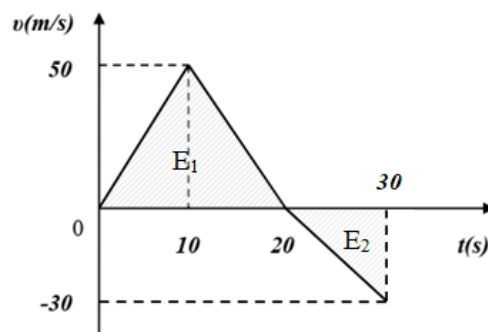
$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 500 \text{ m} + 150 \text{ m} = 650 \text{ m}.$$

$$\text{Η μέση ταχύτητα έχει τιμή : } v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{650 \text{ m}}{30 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = \frac{65}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για το χρονικό διάστημα $10 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$:

$$W_{\text{ολ}} = K_3 - K_1 \Leftrightarrow W_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} m(v_3^2 - v_1^2) \Rightarrow W_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (900 - 2500) \text{ J} \Rightarrow W_{\text{ολ}} = -1600 \text{ J}.$$



23. (11656) Σε ένα κιβώτιο μάζας $m = 10 \text{ kg}$, το οποίο αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου 60 N . Η δύναμη παύει να ασκείται τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, κατά την οποία η ταχύτητα του κιβωτίου είναι $v_1 = 20 \text{ m/s}$. Στη συνέχεια το κιβώτιο ολισθαίνει στο δάπεδο μέχρι να σταματήσει. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) την επιτάχυνση του κιβωτίου στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 4

Δ2) το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου.

Μονάδες 7

Δ3) το έργο της δύναμης στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Δ4) τη συνολική μετατόπιση του κιβωτίου πάνω στο δάπεδο.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

$$t_0 = 0 \text{ s} \rightarrow t_1 = 5 \text{ s}$$

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

$$\text{Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι : } \alpha_1 = \frac{v_1}{t_1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της τριβής ολίσθησης :

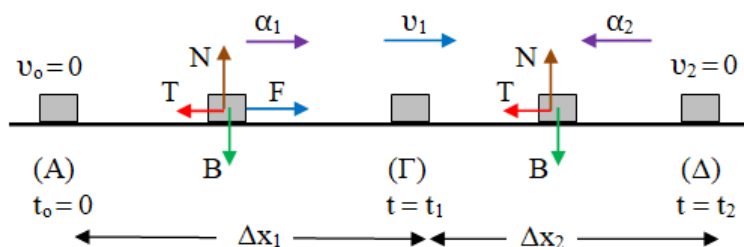
$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow T = F - m\alpha_1 \Rightarrow T = 60 \text{ N} - (10 \text{ Kg})\left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T = 20 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B = mg = 100 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{20 \text{ N}}{100 \text{ N}} = 0,2.$$



Δ3)

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (25 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 50 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$W_F = F(\Delta x_1) = (60 \text{ N})(50 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 3000 \text{ J}.$$

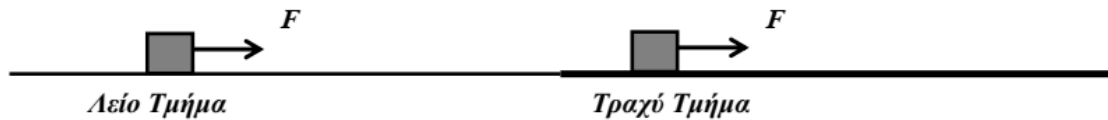
Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που ξεκινά το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_F + W_T = 0 \Leftrightarrow W_T = -W_F \Leftrightarrow -T(\Delta x_{\text{ολ}}) = -W_F \Leftrightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = \frac{W_F}{T}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \Delta x_{\text{ολ}} = \frac{3000 \text{ J}}{20 \text{ N}} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 150 \text{ m}.$$

24. (11660) Κιβώτιο μάζας $m = 2 \text{ kg}$ αρχικά ηρεμεί σε λείο οριζόντιο δρόμο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$, ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 4 \text{ N}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Να υπολογίσετε:

Δ1) το διάστημα που διανύει το κιβώτιο από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Τη χρονική στιγμή t_1 και χωρίς να καταργηθεί η δύναμη, το κιβώτιο εισέρχεται με την ταχύτητα που έχει εκείνη τη στιγμή σε ένα τραχύ τμήμα του δρόμου με το οποίο εμφανίζει τριβή ολίσθησης, με αποτέλεσμα να κινείται τώρα ευθύγραμμα και ομαλά.

Να υπολογίσετε:

Δ2) το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δρόμου,

Μονάδες 8

Δ3) το έργο της δύναμης κατά τη διάρκεια του 7ου δευτερολέπτου της κίνησης του κιβωτίου.

Μονάδες 5

Δ4) τη θερμική ενέργεια που μεταφέρεται κατά τη διάρκεια του 7ου δευτερολέπτου της κίνησης του κιβωτίου.

Μονάδες 5

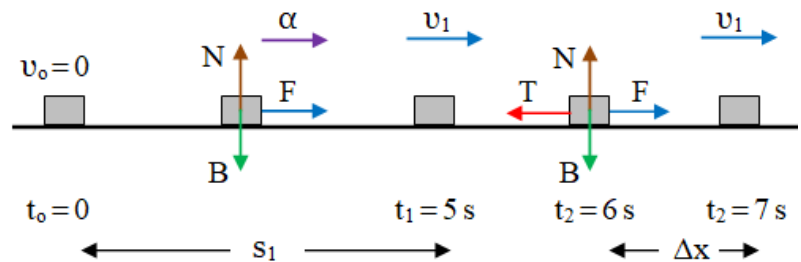
Απάντηση

Δ1)

$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης :

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{4 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Στη χρονική διάρκεια $0 - t_1$ διανύει διάστημα : $s_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (25 \text{ s}^2) \Rightarrow s_1 = 25 \text{ m}.$

Δ2)

$t > 5 \text{ s}$

Αφού το κιβώτιο κινείται ομαλά, στον άξονα x ισχύει : $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \Rightarrow T = F = 4 \text{ N}.$

Στον άξονα y το κιβώτιο ισορροπεί, άρα : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg \Rightarrow N = 20 \text{ N}.$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{4 \text{ N}}{20 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,2.$

Δ3)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου : $v_1 = \alpha t_1 \Rightarrow v_1 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (5 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Το 7ο δευτερόλεπτο είναι η χρονική διάρκεια $\Delta t = 7 \text{ s} - 6 \text{ s} = 1 \text{ s}.$

Σε αυτή τη χρονική διάρκεια το σώμα έχει σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_1$.

Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια Δt , είναι : $\Delta x = v_1 (\Delta t) = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (1 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x = 10 \text{ m}.$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στη διάρκεια του 7ου s είναι : $W_F = F(\Delta x) = (4 \text{ N})(10 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 40 \text{ J}.$

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σώματος κατά τη διάρκεια του 7ου δευτερολέπτου :

$$W_T + W_F = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Leftrightarrow W_T + W_F = 0 \Leftrightarrow W_T = -W_F = -40\text{J}.$$

Η θερμική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον μέσω του έργου της τριβής είναι :

$$Q_T = |W_T| = 40\text{J}.$$

25. (11661) Σώμα μάζας 5 kg βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s στο σώμα ασκούνται δυο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, οι διευθύνσεις των οποίων είναι κάθετες μεταξύ τους, και τα μέτρα τους συνδέονται με τη σχέση $F_1 = \frac{3}{4}F_2$. Το σώμα αρχίζει να κινείται πάνω στο οριζόντιο δάπεδο και τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s, το μέτρο της ταχύτητας του ισούται με 8 m/s.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$,

Μονάδες 8

Δ2) τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$,

Μονάδες 5

Δ3) την κινητική ενέργεια του σώματος, τη χρονική στιγμή που η μετατόπιση του είναι $\Delta x = 4$ m, από το σημείο που ξεκίνησε.

Μονάδες 6

Δ4) το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Με την επίδραση των δύο σταθερών δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$), στη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης.

Το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση : $\alpha = \frac{v_1}{t_1} = \frac{\frac{8 \text{ m}}{\text{s}}}{4 \text{ s}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής : $F_{\text{ολ}} = m\alpha = (5 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 10 \text{ N}$.

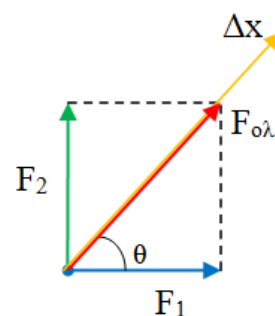
Δ2)

Αφού οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους, το μέτρο της συνισταμένης υπολογίζεται με το Πυθαγόρειο Θεώρημα :

$$F_1^2 + F_2^2 = F_{\text{ολ}}^2 \xrightarrow{F_1 = \frac{3}{4}F_2} \left(\frac{3}{4}F_2 \right)^2 + F_2^2 = F_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow \frac{9}{16}F_2^2 + F_2^2 = F_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{25}{16}F_2^2 = F_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow \frac{5}{4}F_2 = F_{\text{ολ}} \Leftrightarrow F_2 = \frac{4}{5}F_{\text{ολ}} \Rightarrow F_2 = \frac{4}{5} \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow F_2 = 8 \text{ N}.$$

$$\text{Επομένως : } F_1 = \frac{3}{4}F_2 = \frac{3}{4} \cdot 8 \text{ N} \Rightarrow F_1 = 6 \text{ N}.$$



Δ3)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για μετατόπιση $\Delta x = 4$ m από το σημείο εκκίνησης :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ολ}} \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} - 0 = F_{\text{ολ}}(\Delta x) \Rightarrow K = (10 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow K = 40 \text{ J}.$$

Δ4)

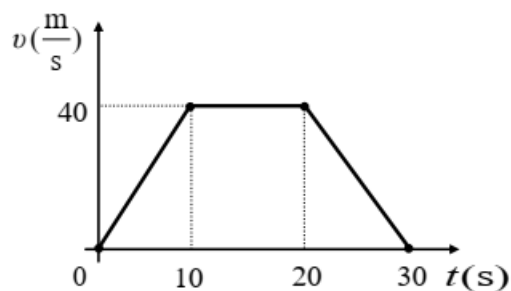
Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (16 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 16 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$W_1 = F_1(\Delta x_1) \cos \theta = F_1(\Delta x_1) \frac{F_1}{F_{\text{ολ}}} \Rightarrow W_1 = 6 \cdot 16 \cdot \frac{6}{10} \text{ J} \Rightarrow W_1 = 57,6 \text{ J}.$$

26. (11662) Μικρό σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκείται στο σώμα οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με αποτέλεσμα το σώμα να αρχίσει να κινείται και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = 0,1$.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Για το χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$:

Δ1) να χαρακτηρίσετε μία προς μία τις επιμέρους κινήσεις που εκτελεί το σώμα.

Μονάδες 3

Δ2) να προσδιορίσετε την τιμή της επιτάχυνσης του σώματος στις κινήσεις όπου η ταχύτητα του μεταβάλλεται και να σχεδιάσετε σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων το διάγραμμα της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

Μονάδες 9

Δ3) να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της αλγεβρικής τιμής της δύναμης $\vec{F}$ σε συνάρτηση με το χρόνο.

Μονάδες 7

Δ4) να υπολογίσετε το έργο της τριβής ολίσθησης.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$: το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

$10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$: το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

$20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$: το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται γραμμικά με το χρόνο, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Δ2)

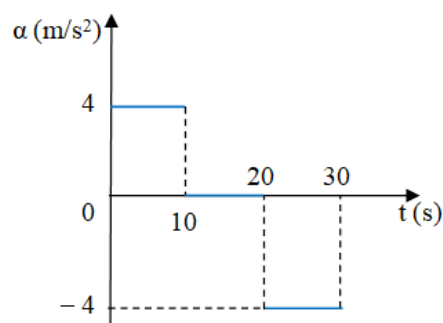
Υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης στα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$, $20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$.

$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}: \alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{(40 - 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(10 - 0) \text{s}} \Rightarrow \alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}: \alpha_2 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{(0 - 40) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(30 - 20) \text{s}} \Rightarrow \alpha_2 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Στο χρονικό διάστημα $10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$, η ταχύτητα είναι σταθερή άρα η επιτάχυνση είναι μηδενική ($\alpha = 0$).

Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

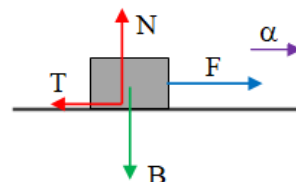


Δ3)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 10 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής: } T = \mu N = 0,1 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T = 1 \text{ N}.$$



Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά) :

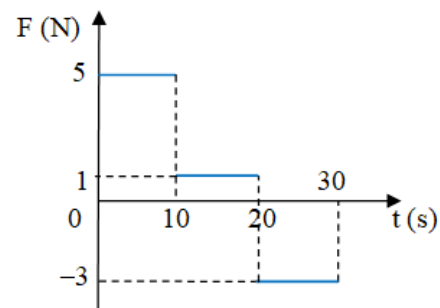
$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F - T = m\alpha \Leftrightarrow F = T + m\alpha. \quad (1)$$

$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s} : \quad (1) \Rightarrow F = 5 \text{ N}.$$

$$10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s} : \quad (1) \Rightarrow F = 1 \text{ N}.$$

$$20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \quad (1) \Rightarrow F = -3 \text{ N}.$$

Το διάγραμμα της αλγεβρικής τιμής της δύναμης $\vec{F}$ με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ4)

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραπεζίου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$\Delta x = E_{\text{τραπ}} = \frac{(30+10) \cdot 40}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 800 \text{ m}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι : $W_T = -T(\Delta x) \Rightarrow W_T = -800 \text{ J}.$

27. (11664) Μικρό σώμα μάζας $m = 400 \text{ g}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,25$. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκείται στο σώμα οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου ίσου με 5 N , μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, όπου καταργείται. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Για το χρονικό διάστημα που ασκείται η δύναμη:

Δ1) να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα.

Μονάδες 7

Δ2) να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$).

Μονάδες 5

Δ3) να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Δ4) να υπολογίσετε το μέσο ρυθμό με τον οποίο η προσφερόμενη στο σώμα ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική.

Μονάδες 7

Απάντηση

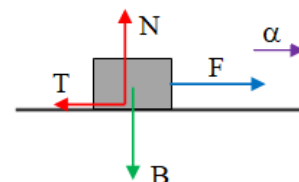
Δ1) $m = 400 \text{ g} = 0,4 \text{ Kg}$.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 4 \text{ N}$.

Από το νόμο της τριβής: $T = \mu N = 0,25 \cdot 4 \text{ N} \Rightarrow T = 1 \text{ N}$.

Θεωρώ σαν θετική τη φορά της δύναμης $\vec{F}$ και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F - T = m\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F - T}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{(5 - 1) \text{ N}}{0,4 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Δ2)

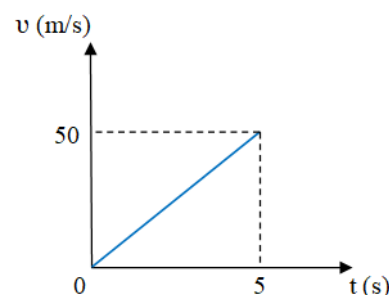
Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Η ταχύτητα μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$v = \alpha t \Rightarrow v = 10t. \text{ (S.I.) } [0 \leq t \leq 5 \text{ s}]$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα: $v_1 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ3)

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (5 \text{ s})^2 \Rightarrow \Delta x = 125 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης στην ίδια χρονική διάρκεια είναι: $W_F = F(\Delta x) = (5 \text{ N})(125 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 625 \text{ J}$.

Δ4)

Το έργο της τριβής ολίσθησης στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$ είναι:

$$W_T = -T(\Delta x) = -(1 \text{ N})(125 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -125 \text{ J}.$$

Η ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμική στην ίδια χρονική διάρκεια είναι: $Q_T = |W_T| = 125 \text{ J}$.

Ο μέσος ρυθμός με τον οποίο η ενέργεια μετατράπηκε σε θερμική στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι:

$$\frac{Q_T}{t_1} = \frac{125 \text{ J}}{5 \text{ s}} = 25 \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

28. (11665) Ένα μικρό σώμα μάζας 2 kg βρίσκεται αρχικά ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ασκείται στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Η δύναμη ασκείται στο σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s οπότε εκείνη τη στιγμή έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 20$ m/s. Τη χρονική στιγμή t_1 η δύναμη καταργείται και το σώμα επιβραδύνεται ομαλά μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 12$ s που η ταχύτητά του μηδενίζεται.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10$ m/s².

Να υπολογίσετε:

Δ1) την επιβράδυνση που προκαλεί η τριβή στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$.

Μονάδες 5

Δ2) το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου.

Μονάδες 6

Δ3) το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 7

Δ4) το έργο της τριβής από τη χρονική στιγμή $t = 0$ s, μέχρι τη χρονική στιγμή που σταματά το σώμα.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

$$t_1 = 4 \text{ s} \rightarrow t_2 = 12 \text{ s} \quad (\Delta t_2 = 8 \text{ s})$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου v_1 .

Η αλγεβρική τιμή της επιβράδυνσης είναι :

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{(0 - 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(12 - 4) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_2 = -2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το μέτρο επιβράδυνσης είναι : $|\alpha_2| = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

Δ2)

$$t_1 = 4 \text{ s} \rightarrow t_2 = 12 \text{ s}$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (με θετική φορά προς τα δεξιά) και υπολογίζω το μέτρο

της τριβής ολίσθησης : $\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow -T = m\alpha_2 \Rightarrow T = -(2 \text{ Kg})(-2,5) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow T = 5 \text{ N}.$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί,
άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 20 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{5 \text{ N}}{20 \text{ N}} = 0,25.$$

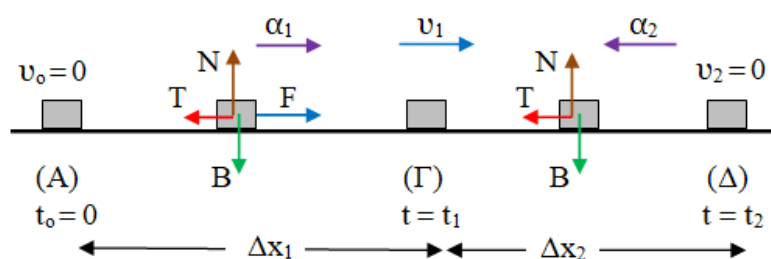
Δ3)

$$t_0 = 0 \text{ s} \rightarrow t_1 = 4 \text{ s}$$

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$). Η επιτάχυνση έχει μέτρο :

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{t_1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (με θετική φορά προς τα δεξιά) και υπολογίζω το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$:



$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow F = T + m\alpha_1 \Rightarrow F = 5\text{ N} + (2\text{ Kg})\left(5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow F = 15\text{ N}.$$

Δ4)

Η μετατόπιση του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 έχει μέτρο :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}\left(5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(16\text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 40\text{ m}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $A \rightarrow \Delta$:

$$W_T + W_F = K_\Delta - K_A \Leftrightarrow W_T + W_F = 0 \Leftrightarrow W_T = -W_F \Rightarrow W_T = -F(\Delta x_1) = -(15\text{ N})(40\text{ m}) \Rightarrow W_T = -600\text{ J}.$$

Εναλλακτική απάντηση στο Δ4

Η μετατόπιση του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 έχει μέτρο :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}\left(5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(16\text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 40\text{ m}.$$

Η μετατόπιση από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 έχει μέτρο :

$$\Delta x_2 = v_1(\Delta t_2) + \frac{1}{2}\alpha_2(\Delta t_2)^2 \Rightarrow \Delta x_2 = \left(20 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 64\right)\text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 80\text{ m}.$$

Το μέτρο της συνολικής μετατόπισης του σώματος είναι :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 40\text{ m} + 80\text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 120\text{ m}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_{\text{ολ}}) = -(5\text{ N})(120\text{ m}) \Rightarrow W_T = -600\text{ J}.$$

29. (11667) Ο θάλαμος ανελκυστήρα μάζας $m = 500 \text{ kg}$ είναι αρχικά ακίνητος και ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ κατεβαίνει σε χρονικό διάστημα 12 s από τον τελευταίο όροφο στο ισόγειο ενός πολυώροφου κτιρίου. Στο θάλαμο εκτός από το βάρος του ασκείται, μέσω ενός συρματόσχοινου, μία κατακόρυφη προς τα πάνω δύναμη $\vec{F}$.

Η τιμή της $\vec{F}$ σε συνάρτηση με το χρόνο καθόδου παριστάνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Δ1) Να χαρακτηρίσετε τις κινήσεις που εκτελεί ο θάλαμος και να υπολογίσετε την τιμή της επιτάχυνσής του σε κάθε μία από αυτές.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του θαλάμου τις χρονικές στιγμές 4 s , 8 s και 12 s .

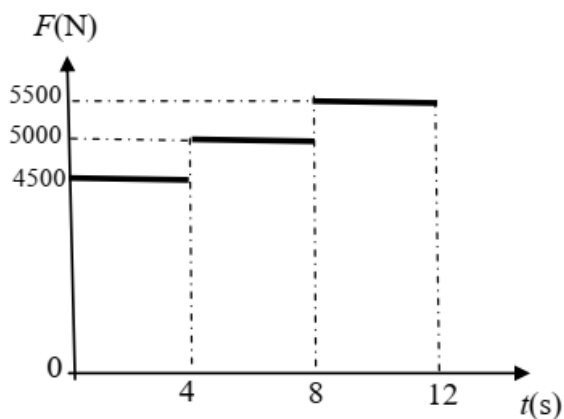
Μονάδες 6

Δ3) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της ταχύτητας του θαλάμου συναρτήσει του χρόνου και να υπολογίσετε το ολικό μήκος της διαδρομής που έκανε ο ανελκυστήρας κατά την κάθοδό του.

Μονάδες 8

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ και τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του θαλάμου στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή 4 s έως τη χρονική στιγμή 8 s .

Μονάδες 5



Απάντηση

Δ1)

Το βάρος του θαλάμου έχει μέτρο : $B = mg = (500 \text{ Kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow B = 5000 \text{ N}$.

Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow B - F = ma \Leftrightarrow a = \frac{B - F}{m}.$$

$$0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s} : \quad a_1 = \frac{5000 \text{ N} - 4500 \text{ N}}{500 \text{ Kg}} \Rightarrow a_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη ($v_0 = 0$).

$$4 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s} : \quad a_2 = \frac{5000 \text{ N} - 5000 \text{ N}}{500 \text{ Kg}} \Rightarrow a_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

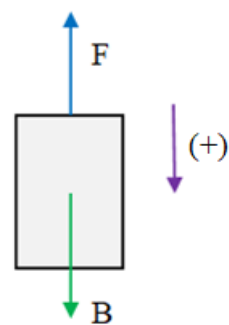
$$8 \text{ s} \rightarrow 12 \text{ s} : \quad a_3 = \frac{5000 \text{ N} - 5500 \text{ N}}{500 \text{ Kg}} \Rightarrow a_3 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη ($v > 0$, $a < 0$).

Δ2)

$0 \text{ s} \leq t \leq 4 \text{ s}$: Η εξίσωση της ταχύτητας είναι $v = a_1 t \Rightarrow v = t$. (S.I.) (1)

$$\text{Για } t_1 = 4 \text{ s} \xrightarrow{(1)} v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



$$4 \text{ s} \leq t \leq 8 \text{ s} : \quad v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{σταθερή}.$$

$$\text{Για } t_2 = 8 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$8 \text{ s} \leq t \leq 12 \text{ s} :$ Η εξίσωση της ταχύτητας είναι

$$v = v_2 + \alpha_3(t - t_2) \Rightarrow v = 4 - (t - 8) \quad \text{ή} \quad v = 12 - t. \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

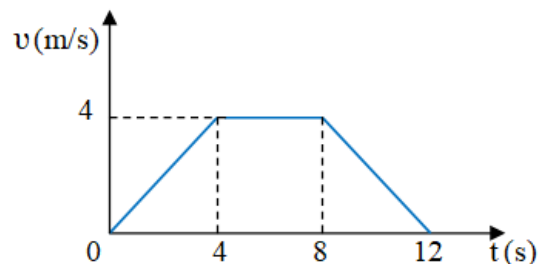
$$\text{Για } t_3 = 12 \text{ s} \xrightarrow{(2)} v_3 = (12 - 12) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_3 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ3)

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το συνολικό διάστημα $s_{\text{ολ}}$ είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραpezίου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$s_{\text{ολ}} = E_{\text{τραπ}} = \frac{(12 + 4) \cdot 4}{2} \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 32 \text{ m}.$$



Δ4)

$4 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s} :$

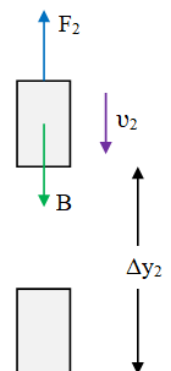
$$\text{Το μέτρο της μετατόπισης είναι : } \Delta y_2 = v_2(\Delta t_2) = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(4 \text{ s}) \Rightarrow \Delta y_2 = 16 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_F = -F_2(\Delta y_2) = -(5000 \text{ N})(16 \text{ m}) \Rightarrow W_F = -80000 \text{ J}.$$

Για τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και το (αντίστοιχο) έργο του βάρους του θαλάμου, ισχύει :

$$\Delta U_\beta = -W_B = -B(\Delta y_2) \Rightarrow \Delta U_\beta = -(5000 \text{ N})(16 \text{ m}) \Rightarrow \Delta U_\beta = -80000 \text{ J}.$$



30. (11668) Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000 Kg κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα μέτρου $v = 72 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ο οδηγός φρενάρει οπότε το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιβράδυνση και ακινητοποιείται τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$.

Να υπολογίσετε

Δ1) την επιβράδυνση του αυτοκινήτου.

Μονάδες 6

Δ2) την κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου την χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ3) τη δύναμη που επιβραδύνει το αυτοκίνητο.

Μονάδες 6

Δ4) Αν S είναι το διάστημα που διανύει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει όταν έχει αρχική ταχύτητα

$v = 72 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$ και S' το διάστημα που διανύει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει αν είχε αρχική ταχύτητα

$v' = 36 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$ να αποδείξετε ότι $S = 4S'$.

Να θεωρήσετε ότι η δύναμη που επιβραδύνει το αυτοκίνητο είναι ίδια και στις δυο περιπτώσεις.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1) Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου

$$v_0 = 72 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της επιβράδυνσης του αυτοκινήτου είναι : $\alpha = \frac{v_0 - v}{t_1} = \frac{(20 - 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ s}} \Rightarrow \alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

Δ2)

Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ η ταχύτητα του αυτοκινήτου έχει μέτρο :

$$v = v_0 - \alpha t \Rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η κινητική ενέργεια την ίδια χρονική στιγμή, είναι :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 100 \text{ J} \Rightarrow K = 50000 \text{ J}.$$

Δ3)

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της συνισταμένης δύναμης :

$$F_{\text{ολ}} = m \alpha \Rightarrow F_{\text{ολ}} = (1000 \text{ Kg}) \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 5000 \text{ N}.$$

Η συνισταμένη $\vec{F}_{\text{ολ}}$ έχει αντίθετη φορά από την αρχική ταχύτητα.

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που αρχίζει να επιβραδύνεται το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει.

$$\underline{\text{1η περίπτωση}} \quad \left(v_0 = 72 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow -F_{\text{ολ}} \cdot s = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Leftrightarrow s = \frac{m v_0^2}{2 F_{\text{ολ}}}. \quad (1)$$

2η περίπτωση $\left(v_o' = 36 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$

$$\Sigma W' = \Delta K' \Leftrightarrow -F_{o\lambda} \cdot s' = 0 - \frac{1}{2} m v_o'^2 \Leftrightarrow s' = \frac{m v_o'^2}{2 F_{o\lambda}}. \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{s}{s'} = \left(\frac{v_o}{v_o'} \right)^2 = \left(\frac{20}{10} \right)^2 \Rightarrow \frac{s}{s'} = 4 \Rightarrow s = 4s'.$$

31. (11669) Τα σώματα του σχήματος Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$ αντίστοιχα και συνδέονται με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στο Σ_1 ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη με μέτρο $F = 90 \text{ N}$ και το σύστημα των σωμάτων, τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζει να ανεβαίνει κατακόρυφα, με το νήμα τεντωμένο. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα..

Δ1) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα και να εφαρμόσετε για το καθένα το 2ο νόμο του Newton.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση των σωμάτων.

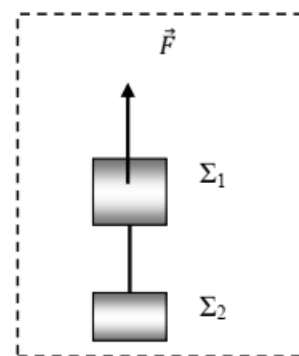
Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε το συνολικό έργο των βαρών των σωμάτων όταν αυτά έχουν ανυψωθεί κατά $h = 10 \text{ m}$ πάνω από την αρχική τους θέση.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε τη συνολική κινητική ενέργεια των σωμάτων όταν αυτά έχουν ανυψωθεί κατά $h = 10 \text{ m}$ πάνω από την αρχική τους θέση.

Μονάδες 6



Απάντηση

Δ1)

Αφού το νήμα είναι τεντωμένο και μη εκτατό, τα δύο σώματα κινούνται με την ίδια σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$.

Στο Σ_1 ασκούνται τρεις δυνάμεις : η δύναμη $\vec{F}$, το βάρος του $\vec{B}_1$ και η τάση του νήματος $\vec{T}_1$ (με φορά προς τα κάτω).

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (με θετική φορά προς τα πάνω) :

$$\Sigma F_1 = m_1 \alpha \Leftrightarrow F - B_1 - T_1 = m_1 \alpha. \quad (1)$$

Στο Σ_2 ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος του $\vec{B}_2$ και η τάση του νήματος $\vec{T}_2$ (με φορά προς τα πάνω).

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F_2 = m_2 \alpha \Leftrightarrow T_2 - B_2 = m_2 \alpha. \quad (2)$$

Δ2)

Αφού η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, ισχύει : $T_1 = T_2 = T$.

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

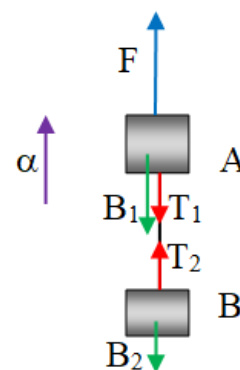
$$F - B_1 - T_1 + T_2 - B_2 = m_1 \alpha + m_2 \alpha \xrightarrow{T_1 = T_2} F - m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2) \alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{F - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} \Rightarrow \alpha = \frac{(90 - 60) \text{ N}}{6 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ3)

Αφού τα σώματα κινούνται προς τα πάνω, το έργο του βάρους είναι αρνητικό.

$$W_{B(\text{ολ})} = W_{B1} + W_{B2} = -m_1 gh - m_2 gh \Rightarrow W_{B(\text{ολ})} = -(m_1 + m_2)gh \Rightarrow W_{B(\text{ολ})} = -600 \text{ J}.$$



Δ4)

Έστω ότι μετά από χρόνο t , κάθε σώμα έχει ανυψωθεί κατά h . Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{\alpha} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{20}{5}} \text{ s} \Rightarrow t = 2 \text{ s}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας κάθε σώματος τη στιγμή $t = 2 \text{ s}$, είναι :

$$v = \alpha t \Rightarrow v = \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η συνολική κινητική ενέργεια των σωμάτων την ίδια στιγμή, είναι :

$$K_{\text{ολ}} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \Rightarrow K_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 100 \text{ J} \Rightarrow K_{\text{ολ}} = 300 \text{ J}.$$

Εναλλακτική απάντηση για το Δ4

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή κάθε σώματος από την αρχική θέση μέχρι να ανέβει κατά h .

Σ₁

$$K_1 - 0 = W_F + W_{B1} + W_{T1} \Leftrightarrow K_1 = F \cdot h + W_{B1} - T_1 \cdot h. \quad (3)$$

Σ₂

$$K_2 - 0 = W_{B2} + W_{T2} \Leftrightarrow K_2 = W_{B2} + T_2 \cdot h. \quad (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow K_1 + K_2 = F \cdot h + W_{B1} - T_1 \cdot h + W_{B2} + T_2 \cdot h \xrightarrow{T_1=T_2} K_{\text{ολ}} = F \cdot h + W_{B\text{ολ}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } K_{\text{ολ}} = (90 \text{ N})(10 \text{ m}) - 600 \text{ J} \Rightarrow K_{\text{ολ}} = 300 \text{ J}.$$

32. (11670) Μικρός μεταλλικός κύβος, αφήνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, από ύψος $h = 30 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος ενώ ταυτόχρονα αρχίζει να ασκείται στον κύβο σταθερή κατακόρυφη δύναμη με μέτρο 20 N και κατεύθυνση προς το έδαφος. Ο κύβος φθάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας στη διάρκεια της κίνησης είναι σταθερή και ίση με $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Θεωρήστε ως επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια το έδαφος, καθώς και την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) την επιτάχυνση του κύβου,

Μονάδες 6

Δ2) τη μάζα του κύβου,

Μονάδες 6

Δ3) την κινητική ενέργεια του κύβου τη χρονική στιγμή που φθάνει στο έδαφος,

Μονάδες 6

Δ4) το λόγο της κινητικής ενέργειας K προς τη βαρυτική δυναμική ενέργεια U του κύβου τη χρονική στιγμή που απέχει 18 m από το έδαφος.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου α ($v_0 = 0$).

Μέχρι να φτάσει στο έδαφος διανύει απόσταση $s = h$, σε χρόνο t_1 . Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2h}{t_1^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 30 \text{ m}}{4 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow B + F = m\alpha \Leftrightarrow F = m\alpha - mg \Leftrightarrow F = m(\alpha - g) \Leftrightarrow$$

$$m = \frac{F}{\alpha - g} \Rightarrow m = \frac{20 \text{ N}}{(15 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow m = 4 \text{ Kg}.$$

Δ3)

1ος τρόπος

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος ο κύβος, έχει ταχύτητα μέτρου :

$$v_1 = \alpha t_1 = \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η κινητική ενέργεια του κύβου την ίδια στιγμή είναι :

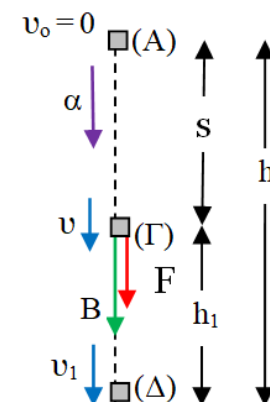
$$K = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} (4 \text{ Kg}) \left(900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow K = 1800 \text{ J}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του κύβου από το σημείο Α (σε ύψος h) μέχρι το σημείο Δ (στο έδαφος) :

$$K_\Delta - K_A = W_F + W_B \Leftrightarrow K_\Delta - 0 = Fh + mgh \Leftrightarrow K_\Delta = (F + mg)h.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } K = (20 + 40) \cdot 30 \text{ J} \Rightarrow K = 1800 \text{ J}.$$



Δ4)

Μέχρι τη στιγμή που απέχει $h_1 = 18 \text{ m}$ από το έδαφος, έχει διανύσει απόσταση :

$$s = h - h_1 = 30 \text{ m} - 18 \text{ m} \Rightarrow s = 12 \text{ m}.$$

1ος τρόπος

Από την εξίσωση του διαστήματος υπολογίζω τη χρονική διάρκεια της κίνησης :

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2s}{a} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 12}{15}} \text{ s} \Rightarrow t = \sqrt{1,6} \text{ s}.$$

Την ίδια στιγμή η ταχύτητα έχει μέτρο : $v = at \Rightarrow v = 15\sqrt{1,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Η κινητική ενέργεια του κύβου τη στιγμή t είναι : $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 225 \cdot 1,6 \text{ J} \Rightarrow K = 720 \text{ J}.$

Η δυναμική ενέργεια στη θέση αυτή είναι : $U = mgh_1 = 4 \cdot 10 \cdot 18 \text{ J} \Rightarrow U = 720 \text{ J}.$

Επομένως : $K = U \Leftrightarrow \frac{K}{U} = 1.$

2ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$ (από ύψος h μέχρι ύψος h_1) :

$$\Delta K = W_{\text{ολ}} \Leftrightarrow K - 0 = (mg + F)s \Rightarrow K = (40 + 20) \cdot 12 \text{ J} \Rightarrow K = 720 \text{ J}.$$

Η δυναμική ενέργεια στη θέση αυτή είναι : $U = mgh_1 = 4 \cdot 10 \cdot 18 \text{ J} \Rightarrow U = 720 \text{ J}.$

Επομένως : $K = U \Leftrightarrow \frac{K}{U} = 1.$

33. (11671) Κιβώτιο μάζας 40 kg είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου, $F_1 = 80 \text{ N}$. Τη χρονική στιγμή t_1 , όταν το κιβώτιο έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x_1 = 16 \text{ m}$, η δύναμη $\vec{F}_1$ καταργείται και ταυτόχρονα αρχίζει να ασκείται πάνω στο σώμα δύναμη $\vec{F}_2$ αντίρροπη της $\vec{F}_1$, με μέτρο $F_2 = 10 \text{ N}$, που έχει ως αποτέλεσμα το κιβώτιο να σταματήσει τη χρονική στιγμή t_2 .

Δ1) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κιβωτίου όταν έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x_1 = 16 \text{ m}$ από την αρχική του θέση.

Μονάδες 6

Δ2) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας, σε συνάρτηση με το χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων για όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης.

Μονάδες 8

Δ3) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του κιβωτίου στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_2$.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ στη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$.

Μονάδες 5

Απάντηση

Δ1)

$0 \rightarrow t_1$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{80 \text{ N}}{40 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Με την επίδραση της $\vec{F}_1$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$). Ισχύει:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2(\Delta x_1)}{\alpha_1} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(\Delta x_1)}{\alpha_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16}{2}} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 4 \text{ s}.$$

Τη στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου: $v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Δ2)

$t_1 \rightarrow t_2$

Με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}_2$ το σώμα αποκτά επιβράδυνση μέτρου:

$$\alpha_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{10 \text{ N}}{40 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Κατά τη χρονική διάρκεια $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου v_1 . Ισχύει:

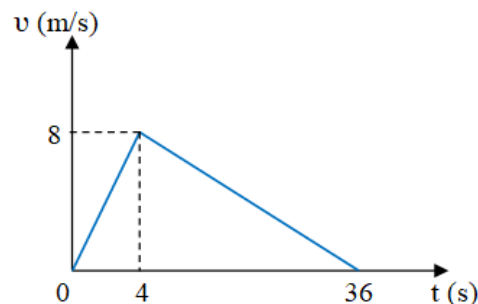
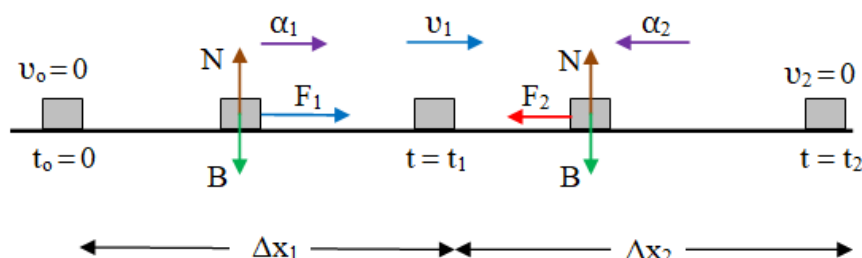
$$v_2 = v_1 - \alpha_2(\Delta t_2) \xrightarrow{v_2=0} \alpha_2(\Delta t_2) = v_1 \Rightarrow$$

$$\Delta t_2 = \frac{v_1}{\alpha_2} = \frac{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \Delta t_2 = 32 \text{ s}.$$

Το σώμα θα σταματήσει τη χρονική στιγμή

$$t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 4 \text{ s} + 32 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 36 \text{ s}.$$

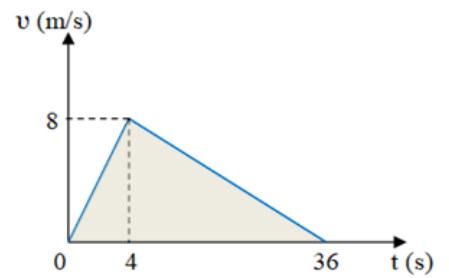
Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ3)

Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 36\text{ s}$ είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τριγώνου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

$$\Delta x_{\text{ολ}} = E_{\text{τριγ}} = \frac{8 \cdot 36}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 144 \text{ m}.$$



Δ4)

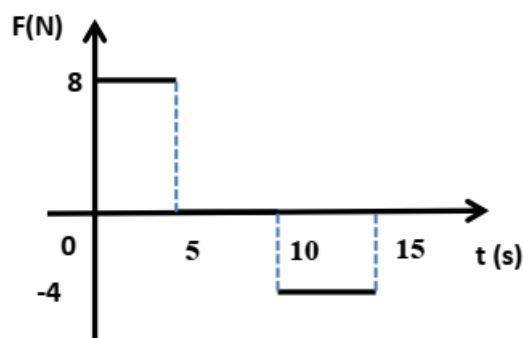
Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 4\text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_2 = \Delta x_{\text{ολ}} - \Delta x_1 = 144 \text{ m} - 16 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 128 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$W_{F_2} = -F_2(\Delta x_2) = -(10 \text{ N})(128 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_2} = -1280 \text{ J}.$$

34. (11673) Μεταλλικός κύβος μάζας m κινείται ευθύγραμμα πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο έχοντας τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ταχύτητα μέτρου 4 m/s . Στον κύβο ασκείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ s δύναμη $\vec{F}$, ίδιας διεύθυνσης με την ταχύτητα του. Η τιμή της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο, για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 15$ s φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.



Την χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s ο κύβος έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $v = 14 \text{ m/s}$.

Δ1) Να χαρακτηρίσετε την κίνηση που εκτελεί το σώμα στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 5$ s και να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε τη μάζα του κύβου.

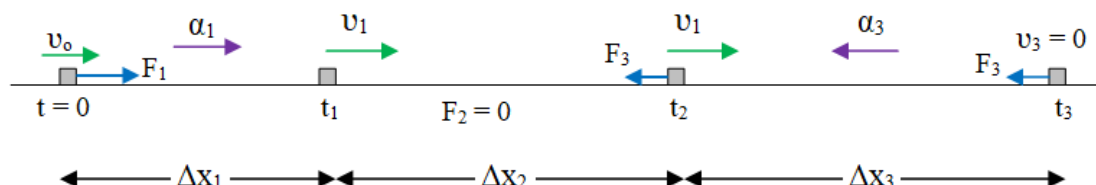
Μονάδες 6

Δ3) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας του κύβου, σε συνάρτηση με το χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 15$ s.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα $10 \rightarrow 15$ s.

Μονάδες 6



Απάντηση

Δ1)

Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$ η δύναμη είναι σταθερή, άρα ο κύβος αποκτά σταθερή επιτάχυνση ίδιας διεύθυνσης με την ταχύτητα. Αφού το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται, ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1} = \frac{(14 - 4) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$:

$$F_1 = m\alpha_1 \Leftrightarrow m = \frac{F_1}{\alpha_1} \Rightarrow m = \frac{8 \text{ N}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow m = 4 \text{ Kg}.$$

Δ3)

$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$: Η εξίσωση της ταχύτητας είναι :

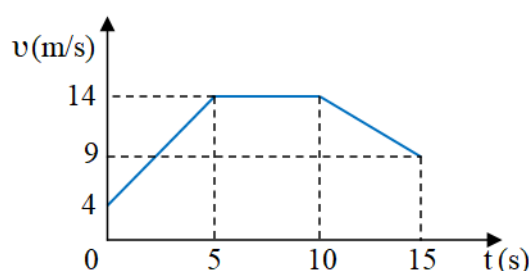
$$v = v_0 + \alpha_1 t \Rightarrow v = 4 + 2t. \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{για } t = 0 \Rightarrow v = 4 \text{ m/s},$$

$$\text{για } t = 5 \text{ s} \Rightarrow v = 14 \text{ m/s}.$$

$5 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$: $F_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$, άρα :

$$v = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{σταθερή}.$$



$10 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$: Η επιτάχυνση έχει αλγεβρική τιμή : $\alpha_3 = \frac{F_3}{m} = \frac{-4 \text{ N}}{4 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_3 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι : $v = v_1 + a_3(t - t_2) \Rightarrow v = 14 - (t - 10)$ ή $v = 24 - t$. (S.I.)

Τη χρονική στιγμή $t_3 = 15$ s, η ταχύτητα έχει τιμή : $v_3 = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για το χρονικό διάστημα $10 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$:

$$W_3 = K_3 - K_2 = \frac{1}{2} m(v_3^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} (4 \text{ Kg})(81 - 196) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow W_3 = -230 \text{ J}.$$

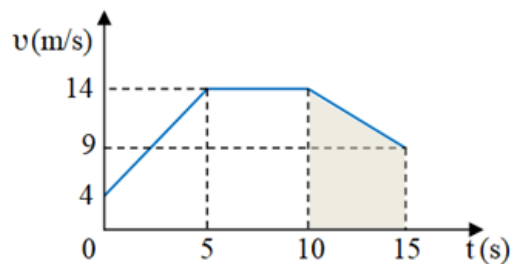
Εναλλακτική απάντηση

Η τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $10 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$ είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου τραπεζίου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$\Delta x_3 = E_{\text{τραπ}} = \frac{(14 + 9) \cdot 5}{2} \text{ m} = 57,5 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$W_3 = F_3(\Delta x_3) = (-4 \text{ N})(57,5 \text{ m}) \Rightarrow W_3 = -230 \text{ J}.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι κατά το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 5 \text{ s}$ η δύναμη $\vec{F}$ έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Μεταλλικός κύβος μάζας m κινείται ευθύγραμμα πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου 4 m/s , προς τη θετική φορά του άξονα x . Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στον κύβο δύναμη $\vec{F}$ που έχει τη διεύθυνση του άξονα».

35. (11674) Ένα αυτοκίνητο μάζας $m = 1000 \text{ Kg}$ είναι σταματημένο σε ένα φανάρι Φ1, οριζόντιου δρόμου, που είναι κόκκινο. Τη στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ που ανάβει το πράσινο, ο οδηγός πατάει το γκάζι, οπότε το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση, με αποτέλεσμα την χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$ να έχει ταχύτητα μέτρου $v_2 = 10 \text{ m/s}$. Στη συνέχεια συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα μέχρι να φτάσει στο επόμενο φανάρι Φ2 που απέχει $d = 500 \text{ m}$ από το προηγούμενο.

Να υπολογίσετε:

Δ1) Τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο κατά την επιταχυνόμενη κίνησή του.

Μονάδες 6

Δ2) Την απόσταση του αυτοκινήτου από το δεύτερο φανάρι Φ2 τη χρονική t_2 .

Μονάδες 6

Δ3) Τη χρονική στιγμή που το αυτοκίνητο φτάνει στο δεύτερο φανάρι Φ2.

Μονάδες 6

Δ4) Το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$, όπου t_1 είναι μια χρονική στιγμή πριν τη στιγμή t_2 , κατά την οποία το αυτοκίνητο κινούνταν με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 5 \text{ m/s}$.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

Στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$ το αυτοκίνητο έχει σταθερή επιτάχυνση μέτρου

$$\alpha = \frac{v_2}{t_2} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ s}} \Rightarrow \alpha = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο :

$$F_{\text{ολ}} = m\alpha = (1000 \text{ Kg}) \left(2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 2500 \text{ N}.$$

Δ2)

Στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_2$ το αυτοκίνητο έχει μετακινηθεί κατά

$$s_1 = \frac{1}{2} \alpha t_2^2 = \frac{1}{2} \left(2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (16 \text{ s}^2) \Rightarrow s_1 = 20 \text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή t_2 απέχει από το φανάρι απόσταση : $s_2 = d - s_1 = 500 \text{ m} - 20 \text{ m} \Rightarrow s_2 = 480 \text{ m}.$

Δ3)

Στο χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_3 - t_2$ το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου v_2 . Ισχύει :

$$s_2 = v_2 (\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{480 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow \Delta t_2 = 48 \text{ s}.$$

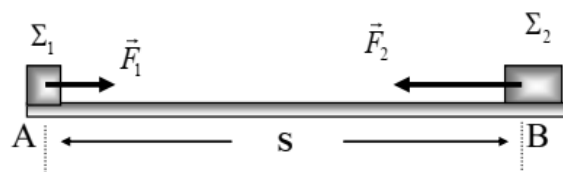
Άρα, το αυτοκίνητο φτάνει στο φανάρι Φ2 τη χρονική στιγμή : $t_3 = t_2 + \Delta t_2 = 4 \text{ s} + 48 \text{ s} \Rightarrow t_3 = 52 \text{ s}.$

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$:

$$W_{\text{ολ}} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (100 - 25) \text{ J} \Rightarrow W_{\text{ολ}} = 37500 \text{ J}.$$

36. (11675) Δύο μεταλλικοί κύβοι Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 5 \text{ kg}$ και $m_2 = 10 \text{ kg}$ κινούνται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο κατά μήκος μιας ευθείας ο ένας προς τον άλλο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ βρίσκονται στα σημεία A, B του οριζόντιου δαπέδου, έχουν ταχύτητες ίδιας διεύθυνσης και αντίθετης φοράς μέτρου $v_1 = 5 \text{ m/s}$ και $v_2 = 5 \text{ m/s}$ αντίστοιχα και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $S = 200 \text{ m}$. Δυο εργάτες σπρώχνουν τους κύβους Σ_1 και Σ_2 ασκώντας σε αυτούς οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, όπως παριστάνεται στο σχήμα, με μέτρα $F_1 = 20 \text{ N}$ και $F_2 = 60 \text{ N}$ αντίστοιχα, οι οποίες έχουν τη διεύθυνση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία A, B. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ δαπέδου και κάθε κύβου είναι $\mu = 0,4$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Δ1) Να σχεδιάσετε τη δύναμη τριβής που δέχεται κάθε κύβος και να υπολογίσετε το μέτρο της.

Μονάδες 6

Δ2) Να χαρακτηρίσετε πλήρως το είδος της κίνησης που εκτελεί κάθε κύβος.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε την απόσταση από το σημείο A στο οποίο θα συναντηθούν οι δυο κύβοι.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε τη συνολική ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύβο Σ_1 από τον εργάτη που τον σπρώχνει από την στιγμή $t = 0 \text{ s}$ έως τη στιγμή που οι δυο κύβοι συναντώνται.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Ο κύβος Σ_1 κινείται προς τα δεξιά, άρα η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_1$ έχει φορά προς τα αριστερά.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g = 50 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T_1 = \mu N_1 \Rightarrow T_1 = 20 \text{ N}.$$

Ο κύβος Σ_2 κινείται προς τα αριστερά, άρα η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_2$ έχει φορά προς τα δεξιά.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g = 100 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T_2 = \mu N_2 \Rightarrow T_2 = 40 \text{ N}.$$

Δ2)

κύβος Σ_1

$$\text{Στον άξονα x ισχύει : } \Sigma F_{1,x} = F_1 - T_1 = 20 \text{ N} - 20 \text{ N} \Rightarrow \Sigma F_{1,x} = 0.$$

Άρα ο Σ_1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

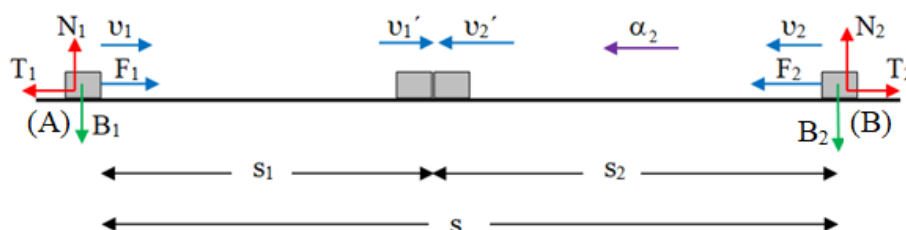
κύβος Σ_2

$$\text{Στον άξονα x ισχύει : } \Sigma F_{2,x} = F_2 - T_2 = 60 \text{ N} - 40 \text{ N} \Rightarrow \Sigma F_{2,x} = 20 \text{ N},$$

ίδιας κατεύθυνσης με την αρχική ταχύτητα $\vec{v}_2$.

Άρα ο Σ_2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με επιτάχυνση μέτρου

$$\alpha_2 = \frac{\Sigma F_{2,x}}{m_2} = \frac{20 \text{ N}}{10 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Δ3)

Έστω ότι οι δύο κύβοι συναντώνται τη χρονική στιγμή t .

Ο Σ_1 θα έχει διανύσει διάστημα $s_1 = v_1 t \Rightarrow s_1 = 5t$. (S.I.) (1)

Ο Σ_2 θα έχει διανύσει διάστημα $s_2 = v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \Rightarrow s_2 = 5t + t^2$. (S.I.) (2)

Τη στιγμή που συναντώνται ισχύει :

$$s_1 + s_2 = s \xrightarrow{(1),(2)} 5t + 5t + t^2 = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t - 200 = 0.$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-200) = 100 + 800 = 900.$$

$$t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} s = \frac{-10 \pm 30}{2} s \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-10+30}{2} s \Rightarrow t_1 = 10 s, \text{ δεκτή} \\ t_2 = \frac{-10-30}{2} s \Rightarrow t_2 = -20 s, \text{ απορρίπτεται.} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας $t = 10 \text{ s}$ στη σχέση (1), προκύπτει : $s_1 = 50 \text{ m}$.

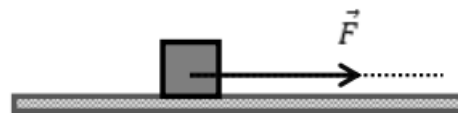
Άρα οι κύβοι θα συναντηθούν σε απόσταση 50 m δεξιά από το Α.

Δ4)

Η ενέργεια που μεταφέρθηκε από τον εργάτη στον κύβο Σ_1 στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$, είναι ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ που ασκεί ο εργάτης στον κύβο :

$$W_{F_1} = F_1 \cdot s_1 = (20 \text{ N})(50 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_1} = 1000 \text{ J}.$$

37. (11676) Κύβος μάζας m είναι αρχικά ακίνητος σε οριζόντιο δάπεδο. Στον κύβο ασκείται οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ οπότε αυτός αρχίζει να κινείται στο οριζόντιο δάπεδο. Κατά την κίνηση του κύβου ασκείται σε αυτόν τριβή μέτρου $T = 6 \text{ N}$, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Μετά από μετατόπιση κατά $\Delta x = 4 \text{ m}$ στο οριζόντιο δάπεδο ο κύβος κινείται με ταχύτητα μέτρου $v = 4 \text{ m/s}$. Το έργο της $\vec{F}$ στην παραπάνω μετατόπιση είναι $W_F = 32 \text{ J}$.



Να υπολογίσετε:

Δ1) το έργο της τριβής στη παραπάνω μετατόπιση,

Μονάδες 6

Δ2) το μέτρο της δύναμης,

Μονάδες 6

Δ3) τη μάζα του κύβου,

Μονάδες 7

Δ4) το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που πρέπει να ασκηθεί στον κύβο ώστε να αποκτήσει κινητική ενέργεια $K = 18 \text{ J}$ σε χρονικό διάστημα 2 s αν γνωρίζετε ότι αυτός βρίσκεται αρχικά ακίνητος σε λείο οριζόντιο δάπεδο.

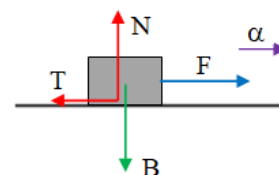
Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι :

$$W_T = -T(\Delta x) = -(6 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -24 \text{ J}.$$



Δ2)

Από τη σχέση ορισμού του έργου σταθερής δύναμης, υπολογίζω το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$:

$$W_F = F(\Delta x) \Leftrightarrow F = \frac{W_F}{\Delta x} \Rightarrow F = \frac{32 \text{ J}}{4 \text{ m}} \Rightarrow F = 8 \text{ N}.$$

Δ3)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από την αρχική θέση του κύβου μέχρι να μετατοπιστεί κατά Δx :

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_F + W_T \Leftrightarrow m = \frac{2(W_F + W_T)}{v^2} \Rightarrow m = \frac{2 \cdot (32 - 24)}{16} \text{ Kg} \Rightarrow m = 1 \text{ Kg}.$$

Εναλλακτική απάντηση

Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου α .

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$v = \alpha t \Leftrightarrow t = \frac{v}{\alpha}. \quad (1)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \xrightarrow{(1)} \Delta x = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{v^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{v^2}{2\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{v^2}{2(\Delta x)}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \alpha = \frac{4^2}{2 \cdot 4 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F - T = m\alpha \Leftrightarrow m = \frac{F - T}{\alpha} \Rightarrow m = \frac{8 - 6}{2} \text{ Kg} \Rightarrow m = 1 \text{ Kg}.$$

Δ4)

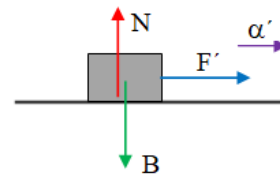
$$\text{Ισχύει: } K' = \frac{1}{2} m v'^2 \Leftrightarrow v' = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{2 \cdot 18}{1}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v' = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου α' . Ισχύει:

$$\alpha' = \frac{v'}{t'} = \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{s}} \Rightarrow \alpha' = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$F' = m \alpha' = (1 \text{ Kg}) \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F' = 3 \text{ N}.$$



38. (11678) Ένα κιβώτιο μάζας $m = 20 \text{ Kg}$ είναι αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ με τη βοήθεια ενός σχοινιού ασκούμε στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο 50 N . Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ το κιβώτιο έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 4 \text{ m}$ πάνω στο οριζόντιο δάπεδο. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Να υπολογίσετε:

Δ1) Την επιτάχυνση με την οποία κινείται το κιβώτιο.

Μονάδες 6

Δ2) Το συντελεστή τριβής μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου.

Μονάδες 7

Δ3) Το έργο της δύναμης τριβής από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο κινείται με ταχύτητα μέτρου 2 m/s .

Μονάδες 7

Δ4) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου σε συνάρτηση με το χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Απάντηση

Δ1)

Η συνισταμένη δύναμη στον άξονα x είναι σταθερή, άρα το κιβώτιο έχει σταθερή επιτάχυνση. Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Ισχύει :

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2(\Delta x)}{t^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 4 \text{ m}}{4 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική τη φορά της επιτάχυνσης) :

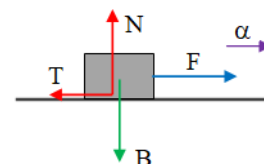
$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F - T = m\alpha \Leftrightarrow T = F - m\alpha \Rightarrow T = 50 \text{ N} - 40 \text{ N} \Rightarrow T = 10 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το κιβώτιο ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 200 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{10 \text{ N}}{200 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,05.$$



Δ3)

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα έχει μέτρο $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ισχύει :

$$v_1 = \alpha t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_1}{\alpha} \Rightarrow t_1 = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}.$$

Υπολογίζω τη μετατόπιση στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (1 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 1 \text{ m}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_1) = -(10 \text{ N})(1 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -10 \text{ J}.$$

Δ4)

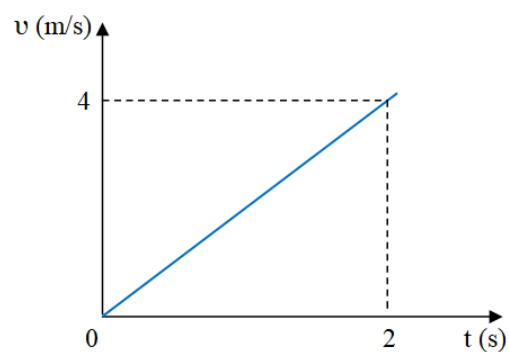
Στη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 2\text{ s}$, το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση :

$$v = at \Rightarrow v = 2t. \text{ (S.I.)}$$

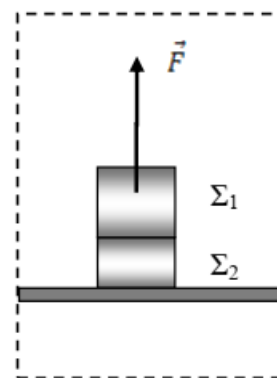
Τη χρονική στιγμή $t = 2\text{ s}$ το κιβώτιο έχει ταχύτητα μέτρου

$$v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για το χρονικό διάστημα $0\text{ s} \rightarrow 2\text{ s}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



39. (11679) Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 3 \text{ Kg}$ και $m_2 = 2 \text{ Kg}$ αντίστοιχα και είναι συγκολλημένα. Το συσσωμάτωμα αρχικά είναι ακίνητο πάνω στο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκούμε στο σώμα Σ_1 μέσω νήματος μια κατακόρυφη σταθερή δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο 60 N και το συσσωμάτωμα αρχίζει να ανυψώνεται κατακόρυφα. Μόλις το συσσωμάτωμα φτάσει σε ύψος $h = 16 \text{ m}$ από το έδαφος, το σώμα Σ_2 αποκολλάται, ενώ η δύναμη συνεχίζει να ασκείται στο σώμα Σ_1 . Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$. Θεωρήστε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.



Να υπολογίσετε

Δ1) την επιτάχυνση με την οποία κινείται το συσσωμάτωμα των δύο σωμάτων πριν την αποκόλληση,

Μονάδες 6

Δ2) την χρονική στιγμή που αποκολλάται το Σ_2 ,

Μονάδες 6

Δ3) την ταχύτητα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη στιγμή της αποκόλλησης,

Μονάδες 6

Δ4) τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του Σ_1 , με επίπεδο αναφοράς το έδαφος, 1 s μετά την αποκόλληση του Σ_2 .

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, στα σώματα ασκούνται και τα βάρη $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$.

Τα βάρη των σωμάτων έχουν μέτρα :

$$B_1 = m_1 g = 30 \text{ N},$$

$$B_2 = m_2 g = 20 \text{ N}.$$

Μέχρι τη στιγμή της αποκόλλησης τα σώματα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση $\vec{a}$.

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για το συσσωμάτωμα :

$$\Sigma F = (m_1 + m_2)a \Leftrightarrow F - B_1 - B_2 = (m_1 + m_2)a \Leftrightarrow a = \frac{F - (B_1 + B_2)}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$a = \frac{60 \text{ N} - 50 \text{ N}}{5 \text{ Kg}} \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

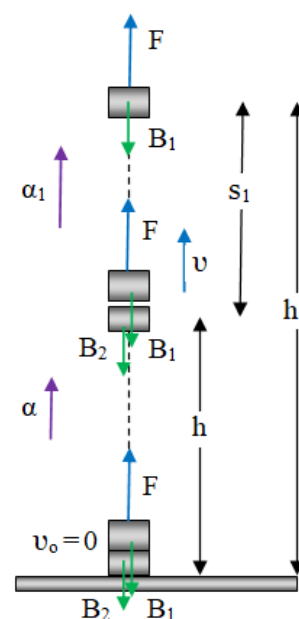
Μέχρι τη στιγμή της αποκόλλησης τα σώματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$). Για τη χρονική στιγμή t που βρίσκονται σε ύψος h ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{a} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 16}{2}} \text{ s} \Rightarrow t = 4 \text{ s}.$$

Δ3)

Τη στιγμή της αποκόλλησης τα σώματα έχουν ταχύτητα μέτρου :

$$v = at = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}) \Rightarrow v = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Δ4)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για το Σ_1 :

$$\Sigma F_1 = m_1 \alpha_1 \Leftrightarrow F - B_1 = m_1 \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F - B_1}{m_1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(60 - 30) \text{ N}}{3 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Μετά την αποκόλληση, το Σ_1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου $v = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 1 \text{ s}$ μετά την αποκόλληση το Σ_1 διανύει διάστημα

$$s_1 = v(\Delta t) + \frac{1}{2} \alpha_1 (\Delta t)^2 = \left(8 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow s_1 = 13 \text{ m}.$$

Τη στιγμή αυτή το Σ_1 βρίσκεται σε ύψος : $h_1 = h + s_1 = 16 \text{ m} + 13 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 29 \text{ m}.$

Η δυναμική ενέργεια του Σ_1 ως προς το έδαφος, την ίδια στιγμή, είναι :

$$U_1 = m_1 g h_1 = 3 \cdot 10 \cdot 29 \text{ J} \Rightarrow U_1 = 870 \text{ J}.$$

40. (11680) Μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$. Στο σώμα, τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ της οποίας η τιμή μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα και ότι για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$ η κατεύθυνση της κίνησης του σώματος δεν μεταβάλλεται.

Για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$:

Δ1) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της τιμής της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο ($a - t$).

Μονάδες 7

Δ2) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της τιμής της ταχύτητας που κινείται το σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο ($v - t$).

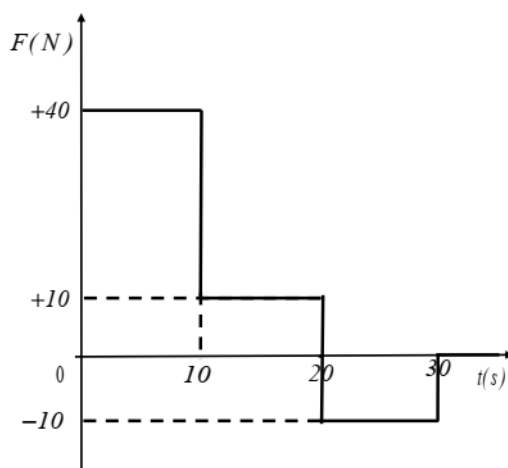
Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που κινείται το σώμα.

Μονάδες 5

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της τριβής από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή που σταματάει το σώμα.

Μονάδες 7



Απάντηση

Δ1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \\ \Rightarrow N = 20 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N \Rightarrow T = 10 \text{ N}.$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (αλγεβρικά) :

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F - T}{m}.$$

$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s} : \alpha_1 = \frac{(40 - 10) \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s} : \alpha_2 = \frac{(10 - 10) \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \alpha_3 = \frac{(-10 - 10) \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_3 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

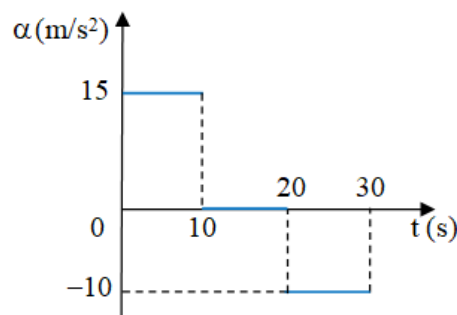
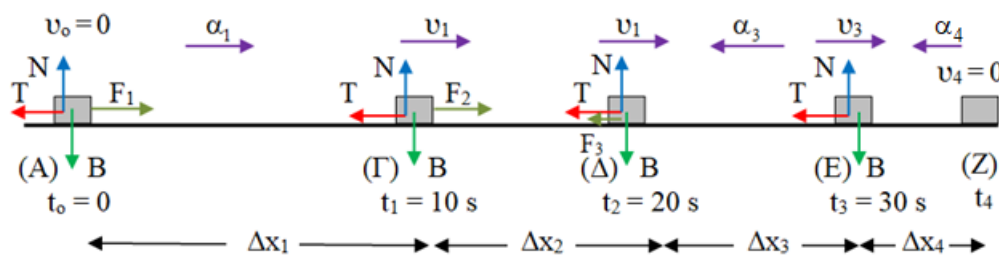
Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Δ2)

Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση : $v = \alpha_1 t \Rightarrow v = 15t.$ (S.I.)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου : $v_1 = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$



Στο χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$ το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = v_1 = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

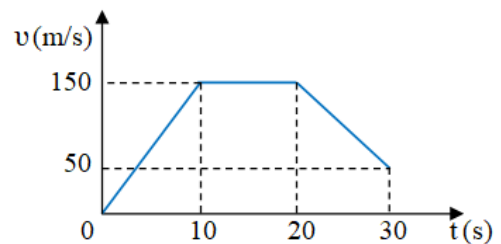
Στο χρονικό διάστημα $20\text{ s} \rightarrow 30\text{ s}$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ($v > 0, \alpha < 0$).

Το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση :

$$v = v_1 + \alpha_1(t - t_2) \Rightarrow v = 150 - 10(t - 20) \quad \text{ή}$$

$$v = 350 - 10t. \quad (\text{S.I.})$$

Τη χρονική στιγμή $t_3 = 30\text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου : $v_3 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου, για τη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 30\text{ s}$, φαίνεται στο σχήμα.

Δ3)

Μετά τη χρονική στιγμή $t_3 = 30\text{ s}$ η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται ($F = 0$) και το σώμα επιβραδύνεται με την επίδραση της τριβής μέχρι να σταματήσει τη χρονική στιγμή t_4 .

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F_x = m\alpha_4 \Leftrightarrow -T = m\alpha_4 \Leftrightarrow \alpha_4 = -\frac{T}{m} \Rightarrow \alpha_4 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\text{Ισχύει : } v_4 = v_3 + \alpha_4(\Delta t_4) \xrightarrow{v_4=0} \alpha_4(\Delta t_4) = -v_3 \Leftrightarrow \Delta t_4 = -\frac{v_3}{\alpha_4} \Rightarrow \Delta t_4 = 10\text{ s}.$$

$$t_4 = t_3 + \Delta t_4 = 30\text{ s} + 10\text{ s} \Rightarrow t_4 = 40\text{ s}.$$

Άρα το σώμα κινείται για χρονική διάρκεια 40 s .

Δ4)

$0\text{ s} \rightarrow 30\text{ s}$: Η μετατόπιση $\Delta x_{1,2,3}$ είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$\Delta x_{1,2,3} = E_{\text{trap}(1)} + E_{\text{trap}(2)} = \frac{(20+10) \cdot 150}{2} \text{ m} + \frac{(150+50) \cdot 10}{2} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta x_{1,2,3} = 2250 \text{ m} + 1000 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{1,2,3} = 3250 \text{ m}.$$

$$\text{30 s} \rightarrow \text{40 s} : \Delta x_4 = \frac{v_3(\Delta t_4)}{2} = \frac{50 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_4 = 250 \text{ m}.$$

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_{1,2,3} + \Delta x_4 = 3250 \text{ m} + 250 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 3500 \text{ m}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_{\text{ολ}}) = -(10 \text{ N})(3500 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -35000 \text{ J}.$$

Εναλλακτική απάντηση

$$\text{0 s} \rightarrow \text{10 s} : \Delta x_1 = E_{\text{trap}} = \frac{150 \cdot 10}{2} \text{ m} = 750 \text{ m}.$$

$$\text{10 s} \rightarrow \text{20 s} : \Delta x_2 = E_{\text{ορθ}} = 150 \cdot 10 \text{ m} = 1500 \text{ m}.$$

$$\text{20 s} \rightarrow \text{30 s} : \Delta x_3 = E_{\text{τραπ}} = \frac{(150+50) \cdot 10}{2} \text{ m} = 1000 \text{ m}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που ξεκινά το σώμα μέχρι να σταματήσει :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow F_1(\Delta x_1) + F_2(\Delta x_2) + F_3(\Delta x_3) + W_T = 0 \Rightarrow W_T = -40 \cdot 750 \text{ J} - 10 \cdot 1500 \text{ J} - (-10) \cdot 1000 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_T = -35000 \text{ J}.$$

41. (11681) Ένα μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκούνται ταυτόχρονα στο σώμα οι σταθερές οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα $F_1 = 30 \text{ N}$ και $F_2 = 10 \text{ N}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στο σώμα στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$ ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ ασκείται στο σώμα στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 7 \text{ s}$.



Η αντίσταση του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα.

Δ1) Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της τιμής της συνισταμένης δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο και υπολογίσετε την τιμή της επιτάχυνσης του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ και τη χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_3 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ και το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$:

$$\Sigma F = F_1 - F_2 = 30 \text{ N} - 10 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \Sigma F = 20 \text{ N}.$$

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{20 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

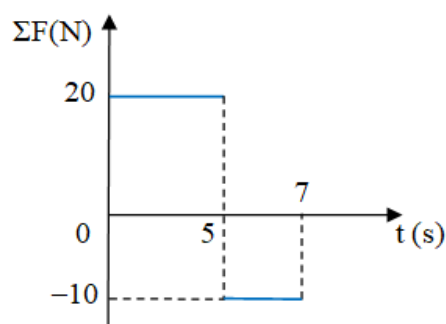
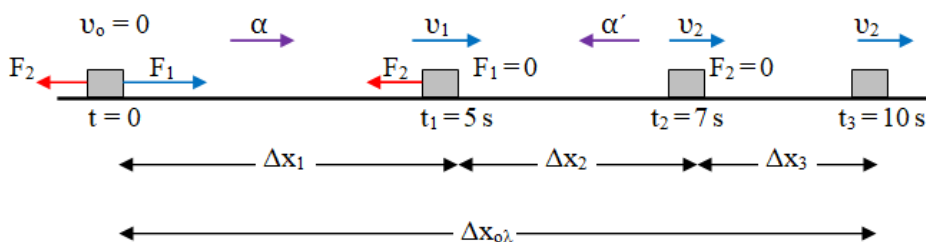
Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$, η επιτάχυνση έχει τιμή $\alpha = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$5 \text{ s} \rightarrow 7 \text{ s}$:

$$\Sigma F' = -F_2 = -10 \text{ N}.$$

$$\alpha' = \frac{\Sigma F'}{m} = \frac{-10 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha' = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Τη χρονική στιγμή $t' = 6 \text{ s}$, η επιτάχυνση έχει τιμή $\alpha' = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Δ2)

Στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1 = 5 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου : $v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Στο χρονικό διάστημα $t_1 = 5 \text{ s} \rightarrow t_2 = 7 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου v_1 . Τη χρονική στιγμή $t_2 = 7 \text{ s}$, η ταχύτητα έχει τιμή :

$$v_2 = v_1 + \alpha_2 (\Delta t_2) = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2 \text{ s}) \Rightarrow v_2 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 7 \text{ s}$ η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική ($\Sigma F'' = 0$), άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Τη χρονική στιγμή $t_3 = 10 \text{ s}$ το σώμα έχει κινητική ενέργεια :

$$K = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} (2 \text{ Kg}) \left(1600 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow K = 1600 \text{ J}.$$

Δ3)

Υπολογίζω την τιμή της μετατόπισης σε κάθε χρονική διάρκεια.

$$\underline{0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}}: \Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (25 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 125 \text{ m}.$$

$$\underline{5 \text{ s} \rightarrow 7 \text{ s}}: \Delta x_2 = v_1 (\Delta t_2) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t_2)^2 = \left(50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (2 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_2 = 90 \text{ m}.$$

$$\underline{7 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}}: \Delta x_3 = v_2 (\Delta t_3) = \left(40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (3 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_3 = 120 \text{ m}.$$

Η συνολική μετατόπιση έχει τιμή :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 125 \text{ m} + 90 \text{ m} + 120 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 335 \text{ m}.$$

Δ4)

Η δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στο σώμα στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5 \text{ s}$ (μετατόπιση Δx_1).

Το έργο της είναι :

$$W_{F_1} = F_1 (\Delta x_1) = (30 \text{ N}) (125 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_1} = 3750 \text{ J}.$$

Η δύναμη $\vec{F}_2$ ασκείται στο σώμα στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 7 \text{ s}$ (μετατόπιση $\Delta x_{1,2}$).

Το έργο της είναι :

$$W_{F_2} = -F_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) = - (10 \text{ N}) (215 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_2} = -2150 \text{ J}.$$

42. (11684) Ένα ξύλινο κιβώτιο μάζας $m = 50 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$, κατά την οποία το κιβώτιο βρίσκεται στη θέση $x = 0 \text{ m}$ του οριζόντιου άξονα Ox , αρχίζει να ασκείται σε αυτό σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο 150 N . Αφού το κιβώτιο μετατοπιστεί κατά $\Delta x_1 = 20 \text{ m}$ καταργείται ακαριαία η δύναμη $\vec{F}$. Στη συνέχεια το κιβώτιο κινείται ακόμα κατά $\Delta x_2 = 10 \text{ m}$ και σταματά. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για την μετατόπιση $\Delta x_1 = 20 \text{ m}$.

Μονάδες 5

Δ2) Τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου.

Μονάδες 8

Δ3) Την τιμή της επιτάχυνσης του κιβωτίου στη διάρκεια της μετατόπισής του κατά $\Delta x_2 = 10 \text{ m}$.

Μονάδες 6

Δ4) Την κινητική ενέργεια του κιβωτίου την στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$.

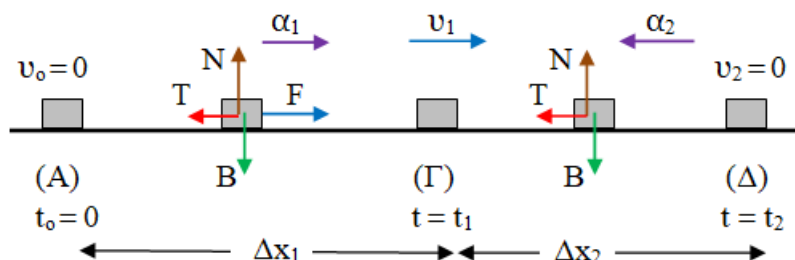
Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι για μετατόπιση Δx_1 , είναι :

$$W_F = F(\Delta x_1) = (150 \text{ N})(20 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 3000 \text{ J}.$$



Δ2)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από θέση Α που ξεκινά το σώμα μέχρι τη θέση Δ που σταματά :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_F + W_T = 0 - 0 \Leftrightarrow W_F - T(\Delta x_{ολ}) = 0 \Leftrightarrow T = \frac{W_F}{\Delta x_{ολ}} \Rightarrow T = \frac{3000 \text{ J}}{30 \text{ m}} \Rightarrow T = 100 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 500 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{100 \text{ N}}{500 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,2.$$

Δ3)

Από τη στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$, στον άξονα x ασκείται μόνο η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (με θετική τη φορά της ταχύτητας) και υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης α_2 :

$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow -T = m\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = -\frac{T}{m} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{100 \text{ N}}{50 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη θέση Γ που καταργείται η δύναμη μέχρι τη θέση Δ ($v_\Delta = 0$):

$$K_\Delta - K_\Gamma = W_{T(2)} \Leftrightarrow 0 - K_\Gamma = -T(\Delta x_2) \Leftrightarrow K_\Gamma = T(\Delta x_2) \Rightarrow K_\Gamma = (100 \text{ N})(10 \text{ m}) \Rightarrow K_\Gamma = 1000 \text{ J}.$$

43. (11688) Μικρό σώμα μάζας $m = 400 \text{ g}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι $\mu = 0,25$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ σταθερής τιμής με τον χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$.

Μονάδες 8

Δ2) Τη μετατόπιση του σώματος στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5 \text{ s}$.

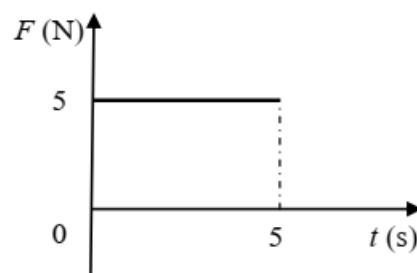
Μονάδες 5

Δ3) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Δ4) Την κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$.

Μονάδες 7



Απάντηση

Δ1)

$$m = 0,4 \text{ Kg.}$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 4 \text{ N.}$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 0,25 \cdot 4 \text{ N} \Rightarrow T = 1 \text{ N.}$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$:

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F - T = m\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F - T}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{(5 - 1) \text{ N}}{0,4 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Άρα, τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$ το σώμα έχει επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Δ2)

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (5 \text{ s})^2 \Rightarrow \Delta x = 125 \text{ m.}$$

Δ3)

Το έργο της δύναμης υπολογίζεται από τη σχέση :

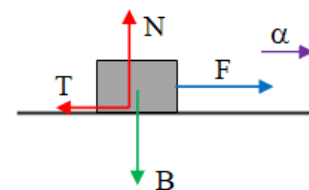
$$W_F = F(\Delta x) = (5 \text{ N})(125 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 625 \text{ J.}$$

Δ4)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου : $v_1 = \alpha t_1 = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (3 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 , η κινητική ενέργεια του σώματος είναι :

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} (0,4 \text{ Kg}) \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow K_1 = 180 \text{ J.}$$



44. (11689) Ένα φορτηγό κινείται σε ευθύγραμμο οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα που έχει σταθερό μέτρο ίσο με $72 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, που διέρχεται από ένα σημείο Α του δρόμου, ξεκινά από το ίδιο

σημείο να κινείται μία μοτοσυκλέτα με σταθερή επιτάχυνση ίση με $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Αν το φορτηγό και η μοτοσυκλέτα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, να υπολογίσετε:

Δ1) τη χρονική στιγμή t_1 όπου τα δύο οχήματα θα έχουν την ίδια ταχύτητα,

Μονάδες 6

Δ2) τη χρονική στιγμή και την απόσταση από το σημείο Α που θα συναντηθούν το φορτηγό και η μοτοσυκλέτα.

Μονάδες 7

Δ3) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για το φορτηγό και τη μοτοσυκλέτα, σε βαθμολογημένους άξονες από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή όπου τα οχήματα συναντώνται.

Μονάδες 7

Δ4) Αν οι μάζες του φορτηγού και της μοτοσυκλέτας είναι 5000 kg και 500 kg αντιστοίχως και οι κινητικές ενέργειες τη στιγμή της συνάντησής τους K_Φ και K_M αντιστοίχως, να υπολογίσετε το

πηλίκιο $\frac{K_\Phi}{K_M}$ τότε.

Μονάδες 5

Απάντηση

Δ1) Το φορτηγό κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_\Phi = 72 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η μοτοσυκλέτα κινείται προς την ίδια κατεύθυνση με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_M = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v_M = \alpha_M t \Rightarrow v_M = 2t. \quad (\text{S.I.})$$

Τη χρονική στιγμή t_1 , ισχύει : $v_M = v_\Phi \Rightarrow 2t_1 = 20 \text{ s} \Rightarrow t_1 = 10 \text{ s}$.

Δ2)

Το φορτηγό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Το διάστημα που θα διανύσει σε χρόνο t υπολογίζεται από τη σχέση :

$$s_\Phi = v_\Phi t \Rightarrow s_\Phi = 20t. \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Η μοτοσυκλέτα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$). Το διάστημα που θα διανύσει σε χρόνο t υπολογίζεται από τη σχέση :

$$s_M = \frac{1}{2} \alpha_M t^2 \Rightarrow s_M = t^2. \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

Τη στιγμή που συναντώνται ισχύει :

$$s_\Phi = s_M \xrightarrow{(1),(2)} 20t = t^2 \Leftrightarrow t^2 - 20t = 0 \Leftrightarrow t(t - 20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0, \text{ (απορρίπτεται)} \\ t = 20 \text{ s.} \end{cases}$$

Άρα, τα δύο οχήματα θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$.

Τη στιγμή της συνάντησης, η απόστασή τους από το Α είναι : $s = 20 \cdot 20 \text{ m} = 400 \text{ m}$.

Δ3)

Για τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο οχημάτων ισχύουν :

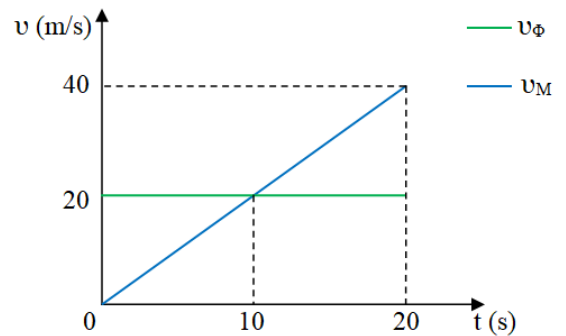
$$v_{\Phi} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_M = 2t. \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$ που συναντώνται τα οχήματα, η μοτοσυκλέτα έχει ταχύτητα μέτρου

$$v_M = 2 \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για τα δύο οχήματα, μέχρι τη στιγμή που συναντώνται, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ4)

Η κινητική ενέργεια του φορτηγού είναι σταθερή :

$$K_{\Phi} = \frac{1}{2} m_{\Phi} v_{\Phi}^2 = \frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 400 \text{ J} \Rightarrow K_{\Phi} = 10^6 \text{ J}.$$

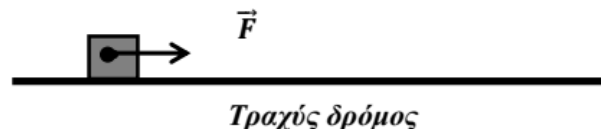
Τη χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$ η μοτοσυκλέτα έχει ταχύτητα μέτρου $v_M = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, άρα έχει κινητική ενέργεια

$$K_M = \frac{1}{2} m_M v_M^2 = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 40^2 \text{ J} \Rightarrow K_M = 4 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$, το πηλίκο των κινητικών ενεργειών είναι :

$$\frac{K_{\Phi}}{K_M} = \frac{10^6}{4 \cdot 10^5} \Rightarrow \frac{K_{\Phi}}{K_M} = 2,5.$$

45. (11692) Ένα κιβώτιο μάζας $m = 4 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δρόμο με τον οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης ίσο με 0,2. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με αποτέλεσμα το κιβώτιο να ξεκινήσει αμέσως να κινείται. Ένας μαθητής που παρατηρεί την κίνηση σημειώνει ότι τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ το κιβώτιο έχει διανύσει 32 m. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.



Μονάδες 5

Δ2) Προσδιορίστε το μέτρο της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 7

Δ3) Ποιο είναι το διάστημα που διανύει το κιβώτιο κατά τη διάρκεια του 3ου δευτερολέπτου της κίνησής του;

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται, με αποτέλεσμα το κιβώτιο να επιβραδυνθεί και τελικά να σταματήσει.

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης της τριβής από τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο σταματά να κινείται.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

$0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$:

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Από την εξίσωση του διαστήματος υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης :

$$s = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2s}{t^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 32 \text{ m}}{16 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Στον άξονα y το κιβώτιο ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 40 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 0,2 \cdot 40 \text{ N} \Rightarrow T = 8 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$:

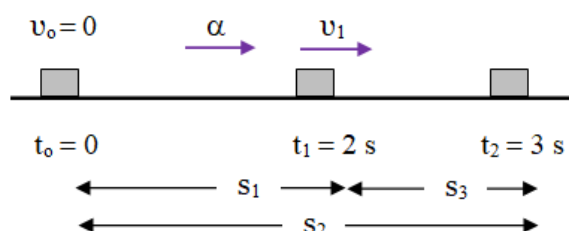
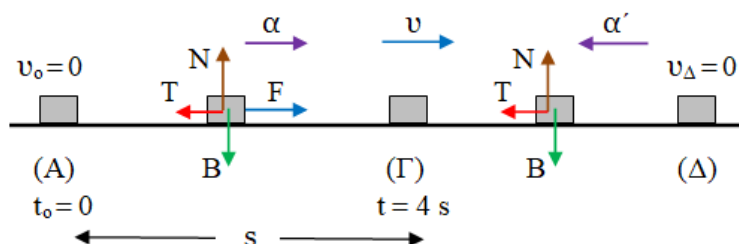
$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F - T = m\alpha \Leftrightarrow F = T + m\alpha \Rightarrow F = 8 \text{ N} + (4 \text{ Kg}) \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F = 24 \text{ N}.$$

Δ3)

Το 3ο s της κίνησης είναι η χρονική διάρκεια

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1 \text{ s},$$

$$\text{με } t_2 = 3 \text{ s}, t_1 = 2 \text{ s}.$$



Στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$, το κιβώτιο διανύει διάστημα : $s_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2$. (1)

Στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_2$, το κιβώτιο διανύει διάστημα : $s_2 = \frac{1}{2} \alpha t_2^2$. (2)

Το διάστημα που διανύει στη διάρκεια του 3ου s, είναι :

$$s_3 = s_2 - s_1 \xrightarrow{(1), (2)} s_3 = \frac{1}{2} \alpha (t_2^2 - t_1^2) \Rightarrow s_3 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (9 - 4) \text{s}^2 \Rightarrow s_3 = 10 \text{ m}.$$

Εναλλακτική απάντηση

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, το κιβώτιο έχει ταχύτητα μέτρου

$$v_1 = \alpha t_1 = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το διάστημα που διανύει από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$ είναι :

$$s_3 = v_1(\Delta t) + \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 = \left(8 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1^2 \right) \text{m} \Rightarrow s_3 = 10 \text{ m}.$$

Δ4)

Τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ το κιβώτιο βρίσκεται στη θέση (Γ) και έχει ταχύτητα μέτρου :

$$v = \alpha t = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}) \Rightarrow v = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη θέση (Γ) μέχρι τη θέση ακινητοποίησης (Δ) :

$$\Sigma W = K_{\Delta} - K_{\Gamma} \Leftrightarrow W_T = 0 - \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow W_T = -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16^2 \text{ J} \Rightarrow W_T = -512 \text{ J}.$$

46. (11693) Ένας γερανός κατεβάζει κατακόρυφα ένα αρχικά ακίνητο δέμα που βρίσκεται σε ύψος 20 m από την επιφάνεια του εδάφους και έχει μάζα 50 kg, με σταθερή επιτάχυνση μέτρου 1 m/s^2 .

Στο δέμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$ από το συρματόσχοινο με το οποίο είναι δεμένο όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, ενώ η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10 \text{ m/s}^2$, να υπολογίσετε:

Δ1) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Δ2) Το μέτρο της ταχύτητας του δέματος όταν έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά 2 m από την αρχική του θέση.

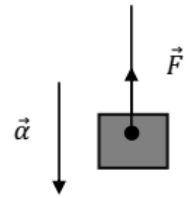
Μονάδες 7

Δ3) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ και το έργο του βάρους, όταν το δέμα έχει μετατοπιστεί κατά 8 m.

Μονάδες 6

Δ4) Τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του δέματος όταν έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά 2 m από τη αρχική του θέση.

Μονάδες 6



Απάντηση

Δ1)

Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow B - F = ma \Leftrightarrow F = mg - ma \Leftrightarrow F = m(g - a) \Rightarrow$$

$$F = 50 \text{ Kg} \cdot (10 - 1) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow F = 450 \text{ N}.$$

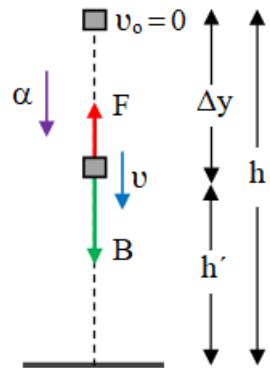
Δ2)

Το δέμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Μέχρι τη χρονική στιγμή t το δέμα έχει μετακινηθεί κατά $\Delta y = 2 \text{ m}$. Ισχύει :

$$\Delta y = \frac{1}{2} a t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2(\Delta y)}{a} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2(\Delta y)}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{1}} \text{ s} \Rightarrow t = 2 \text{ s}.$$

$$\text{Τη στιγμή αυτή το δέμα έχει ταχύτητα μέτρου : } v = at = \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2 \text{ s}) \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Εναλλακτική απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για μετατόπιση μέτρου $\Delta y = 2 \text{ m}$ από την αρχική θέση :

$$\Delta K = W_{\text{ολ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 = m a (\Delta y) \Leftrightarrow v^2 = 2 a (\Delta y) \Rightarrow v = \sqrt{2 a (\Delta y)}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ3)

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού του έργου σταθερής δύναμης για μετατόπιση μέτρου $\Delta y' = 8 \text{ m}$.

$$W_F = F(\Delta y') \cos 180^\circ = -(450 \text{ N})(8 \text{ m}) \Rightarrow W_F = -3600 \text{ J}.$$

$$W_B = mg(\Delta y') \cos 0^\circ = (500 \text{ N})(8 \text{ m}) \Rightarrow W_B = 4000 \text{ J}.$$

Δ4)

Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας για μετατόπιση μέτρου $\Delta y = 2 \text{ m}$, είναι αντίθετη από το έργο του βάρους :

$$\Delta U = -W_B = -mg(\Delta y) = -(500 \text{ N})(2 \text{ m}) \Rightarrow \Delta U = -1000 \text{ J}.$$

Εναλλακτική απάντηση

Έστω h το αρχικό ύψος και h' το ύψος που βρίσκεται το δέμα μετά από μετατόπιση μέτρου $\Delta y = 2 \text{ m}$.

Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι :

$$\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} = mgh' - mgh = -mg(h - h') \Rightarrow \Delta U = -mg(\Delta y).$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } \Delta U = -(500 \text{ N})(2 \text{ m}) \Rightarrow \Delta U = -1000 \text{ J}.$$

47. (11694) Ένας γερανός ανεβάζει κατακόρυφα ένα αρχικά ακίνητο κιβώτιο που βρίσκεται στην επιφάνεια του εδάφους και έχει μάζα 100 kg, με σταθερή επιτάχυνση 2 m/s^2 . Στο κιβώτιο ασκείται δύναμη $\vec{F}$ από το συρματόσχοινο με το οποίο είναι δεμένο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, ενώ η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10 \text{ m/s}^2$, να υπολογίσετε:

Δ1) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Δ2) Το χρόνο κίνησης του κιβωτίου όταν έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά 16 m. Θεωρήστε ως $t = 0 \text{ s}$ τη στιγμή που ξεκινά να ασκείται η $\vec{F}$ και το κιβώτιο εγκαταλείπει το έδαφος.

Μονάδες 5

Δ3) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ καθώς και το έργο του βάρους, όταν το κιβώτιο έχει μετατοπιστεί κατά 8 m.

Μονάδες 7

Δ4) Το λόγο $\frac{K_1}{K_2}$, αν K_1 και K_2 είναι οι κινητικές ενέργειες του κιβωτίου σε ύψη 4 m και 9 m από το έδαφος αντιστοίχως.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

Ορίζω θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow F - B = ma \Leftrightarrow F = mg + ma \Leftrightarrow F = m(g + a) \Rightarrow$$

$$F = (100 \text{ Kg})(10 + 2) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow F = 1200 \text{ N}.$$

Δ2)

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Μετά από χρόνο t θα έχει ανέβει σε ύψος $h = 16 \text{ m}$. Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{a} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 16}{2}} \text{ s} \Rightarrow t = 4 \text{ s}.$$

Δ3)

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού του έργου σταθερής δύναμης για μετατόπιση μέτρου $\Delta y = 8 \text{ m}$.

$$W_F = F(\Delta y)\cos 0^\circ = (1200 \text{ N})(8 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 9600 \text{ J}.$$

$$W_B = mg(\Delta y)\cos 180^\circ = -(1000 \text{ N})(8 \text{ m}) \Rightarrow W_B = -8000 \text{ J}.$$

Δ4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του κιβωτίου από το έδαφος μέχρι το αντίστοιχο ύψος.

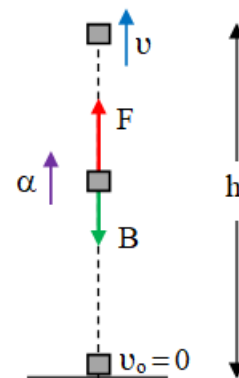
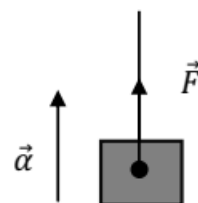
1η περίπτωση

$$K_1 - K_0 = (\Sigma F) \cdot h_1 \Leftrightarrow K_1 = m a h_1. \quad (1)$$

2η περίπτωση

$$K_2 - K_0 = (\Sigma F) \cdot h_2 \Leftrightarrow K_2 = m a h_2. \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{4}{9}.$$



48. (11695) Σε κιβώτιο μάζας $m = 10 \text{ kg}$, το οποίο αρχικά ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, αρχίζει την στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$ μέτρου 20 N .

Δ1) Να υπολογισθεί το διάστημα που θα διανύσει το κιβώτιο από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

Μονάδες 6

Έστω ότι την στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ εκτός από τη δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στο κιβώτιο και μια δεύτερη δύναμη $\vec{F}_2$ ίση με την $\vec{F}_1$, δηλαδή οι δυνάμεις έχουν ίδιο μέτρο και κατεύθυνση.

Δ3) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση του κιβωτίου όταν ασκούνται σε αυτό ταυτόχρονα και οι δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Μονάδες 5

Δ4) Να υπολογίσετε πάλι το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 10 \text{ s}$ όταν ασκούνται ταυτόχρονα και οι δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Να συγκρίνετε αυτό το έργο με το έργο που υπολογίσατε στο ερώτημα Δ2.

Μονάδες 8

Απάντηση

Δ1)

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης, όταν ασκείται μόνο η δύναμη $\vec{F}_1$:

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{20 \text{ N}}{10 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης (το διάστημα) μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (100 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 100 \text{ m}.$$

Δ2)

Το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , είναι :

$$W_{F_1} = F_1(\Delta x_1) = (20 \text{ N})(100 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_1} = 2000 \text{ J}.$$

Δ3)

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης, όταν ασκούνται και οι δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$:

$$\alpha_2 = \frac{F_1 + F_2}{m} = \frac{40 \text{ N}}{10 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ4)

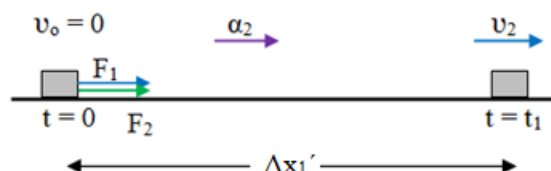
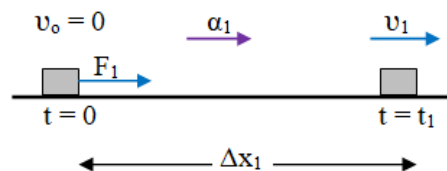
Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης (το διάστημα) μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$\Delta x_1' = \frac{1}{2} \alpha_2 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (100 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1' = 200 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , είναι :

$$W_{F_1}' = F_1(\Delta x_1') = (20 \text{ N})(200 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_1}' = 4000 \text{ J}.$$



Με σύγκριση προκύπτει ότι : $W_{F_1'} = 2W_{F_1}$.

Σχόλιο

Στο ερώτημα Δ4 δεν είναι σαφές αν η εκφώνηση ζητά ποιο έργο είναι μεγαλύτερο ή επιπλέον ζητά και την αριθμητική σχέση των δύο έργων.

49. (11696) Σε κιβώτιο μάζας $m = 10 \text{ kg}$, το οποίο αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, αρχίζει την στιγμή $t = 0$ να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 30 N , οπότε το κιβώτιο ξεκινά να ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου είναι $\mu = 0,2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Δ1) Να υπολογισθεί το μέτρο της τριβής που ασκείται στο κιβώτιο κατά την ολίσθησή του καθώς και η επιτάχυνσή του.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από $t = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογισθεί στο παραπάνω χρονικό διάστημα η ενέργεια που μεταφέρθηκε από το κιβώτιο στο περιβάλλον του μέσω του έργου της τριβής.

Μονάδες 6

Δ4) Αν το δάπεδο ήταν λείο, πόσο θα ήταν το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για το ίδιο χρονικό διάστημα, δηλαδή από $t = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 4 \text{ s}$.

Να συγκρίνετε αυτό το έργο με το έργο που υπολογίσατε στο ερώτημα Δ2.

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 100 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 0,2 \cdot 100 \text{ N} \Rightarrow T = 20 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow F - T = ma \Leftrightarrow a = \frac{F - T}{m} \Rightarrow a = \frac{(30 - 20) \text{ N}}{10 \text{ Kg}} \Rightarrow a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ2)

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ είναι :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (16 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x = 8 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$, είναι :

$$W_F = F(\Delta x) = (30 \text{ N})(8 \text{ m}) = 240 \text{ J}.$$

Δ3)

Το έργο της τριβής στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$, είναι :

$$W_T = -T(\Delta x) = -(20 \text{ N})(8 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -160 \text{ J}.$$

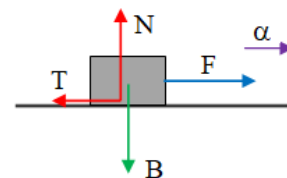
Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον μέσω του έργου της τριβής, στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$Q_T = |W_T| = 160 \text{ J}.$$

Δ4)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στην περίπτωση που το δάπεδο είναι λείο :

$$\Sigma F_x = ma' \Leftrightarrow F = ma' \Leftrightarrow a' = \frac{F}{m} \Rightarrow a' = \frac{30 \text{ N}}{10 \text{ Kg}} \Rightarrow a' = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ είναι :

$$\Delta x' = \frac{1}{2} \alpha' t^2 \Rightarrow \Delta x' = \frac{1}{2} \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (16 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x' = 24 \text{ m}.$$

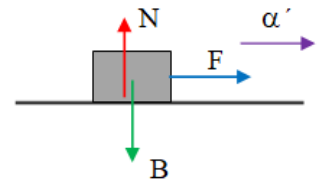
Το έργο της δύναμης στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$W_{F'} = F(\Delta x') = (30 \text{ N})(24 \text{ m}) \Rightarrow W_{F'} = 720 \text{ J}.$$

Από το πηλίκο των έργων της δύναμης στις δύο περιπτώσεις, προκύπτει :

$$\frac{W_{F'}}{W_F} = \frac{720 \text{ J}}{240 \text{ J}} \Rightarrow \frac{W_{F'}}{W_F} = 3 \Rightarrow W_{F'} = 3W_F.$$

Δηλαδή, το έργο της δύναμης είναι τριπλάσιο στην 2η περίπτωση.



Σχόλιο

Στο ερώτημα Δ4 δεν είναι σαφές αν η εκφώνηση ζητά ποιο έργο είναι μεγαλύτερο ή επιπλέον ζητά και την αριθμητική σχέση των δύο έργων.

50. (11697) Ένα κιβώτιο με βιβλία συνολικής μάζας $m = 50 \text{ kg}$ είναι ακίνητο πάνω στο δάπεδο του διαδρόμου ενός σχολείου. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ δύο μαθητές, ο Πάνος και η Μαρία αρχίζουν να σπρώχνουν μαζί το κιβώτιο. Οι δυνάμεις που ασκούν οι μαθητές στο κιβώτιο είναι σταθερές οριζόντιες και ίδιας κατεύθυνσης. Η δύναμη που ασκεί ο Πάνος έχει μέτρο $F_{\Pi} = 200 \text{ N}$ και η δύναμη που ασκεί η Μαρία έχει μέτρο $F_M = 50 \text{ N}$. Τη χρονική στιγμή t_1 , μέχρι την οποία το κιβώτιο έχει ολισθήσει 2 m πάνω στο δάπεδο, η Μαρία σταματά να σπρώχνει το κιβώτιο, ενώ ο Πάνος συνεχίζει να το σπρώχνει. Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου $\mu = 0,4$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Δ1) Να υπολογιστεί το μέτρο της τριβής μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου.

Μονάδες 6

Δ2) Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η Μαρία σταμάτησε να σπρώχνει το κιβώτιο.

Μονάδες 6

Δ3) Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα του μέτρου της ταχύτητας του κιβωτίου συναρτήσει του χρόνου από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_2 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογιστεί η ενέργεια που πρόσφερε ο Πάνος στο κιβώτιο, μέσω του έργου της δύναμης που του άσκησε, από την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ έως την στιγμή t_1 , καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο ο Πάνος προσφέρει ενέργεια στο κιβώτιο όταν πλέον το σπρώχνει μόνος του.

Μονάδες 6

Απάντηση

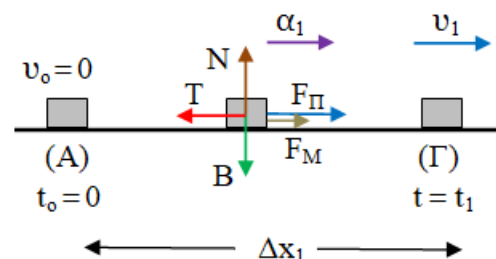
Δ1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 500 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 0,4 \cdot 500 \text{ N} \Rightarrow T = 200 \text{ N}.$$



Δ2)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$:

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Rightarrow F_{\Pi} + F_M - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F_{\Pi} + F_M - T}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(200 + 50 - 200) \text{ N}}{50 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$). Ισχύει :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2(\Delta x_1)}{\alpha_1} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(\Delta x_1)}{\alpha_1}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{1}} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}.$$

Επομένως, η Μαρία σταμάτησε να σπρώχνει το κιβώτιο τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Δ3)

0 s → 2 s :

Το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση : $v = \alpha_1 t \Rightarrow v = t$. (S.I.)

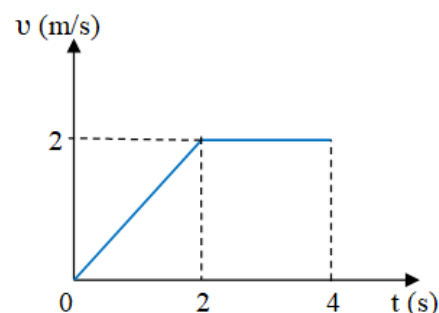
Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ το κιβώτιο έχει ταχύτητα μέτρου

$$v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2 s → 4 s : $\Sigma F_x = F_{\Pi} - T = 200 \text{ N} - 200 \text{ N} \Rightarrow \Sigma F_x = 0$.

Αφού η συνισταμένη είναι μηδενική, η ταχύτητα του κιβωτίου

παραμένει σταθερή : $v = v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



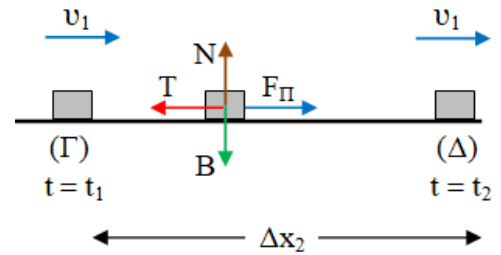
Δ4)

Η ενέργεια που προσέφερε ο Πάνος στο κιβώτιο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, είναι ίση με το έργο της δύναμης που ασκεί ο Πάνος την ίδια χρονική διάρκεια :

$$W_{F_{\Pi}} = F_{\Pi}(\Delta x_1) = (200 \text{ N})(2 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_{\Pi}} = 400 \text{ J}.$$

Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρει ενέργεια ο Πάνος στο κιβώτιο μετά τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$\frac{\Delta W_{\Pi}}{\Delta t} = P_{\Pi} = F_{\Pi} \cdot v \Rightarrow \frac{\Delta W_{\Pi}}{\Delta t} = (200 \text{ N}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow \frac{\Delta W_{\Pi}}{\Delta t} = 400 \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$



51. (11698) Ένα κιβώτιο μάζας $m = 20 \text{ kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, στην θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ του άξονα $x'x$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ αρχίζει να ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$ μέτρου $F_1 = 20 \text{ N}$, η οποία έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ και φορά τη θετική φορά του άξονα. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, κατά την οποία το κιβώτιο βρίσκεται στη θέση x_1 , καταργείται η δύναμη $\vec{F}_1$ και αρχίζει να ασκείται στο κιβώτιο σταθερή δύναμη $\vec{F}_2$ μέτρου $F_2 = 40 \text{ N}$, ίδιας κατεύθυνσης με την $\vec{F}_1$.

Δ1) Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση του μέτρου της επιτάχυνσης του κιβωτίου συναρτήσει του χρόνου από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_2 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να προσδιορίσετε τη θέση x_1 , όπου καταργήθηκε η δύναμη $\vec{F}_1$ και άρχισε να ασκείται η $\vec{F}_2$.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του κιβωτίου την χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε την μέση ταχύτητα του κιβωτίου στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_2 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x .

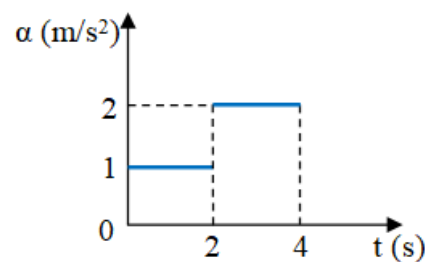
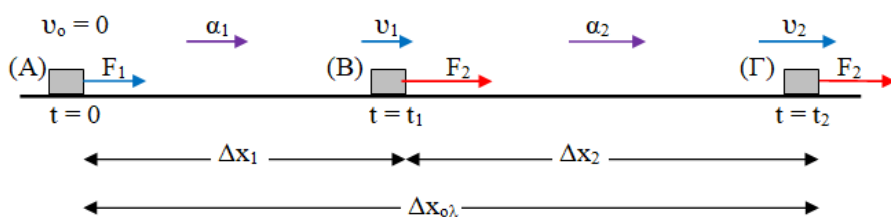
$0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$:

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{20 \text{ N}}{20 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$2 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$:

$$\alpha_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{40 \text{ N}}{20 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το διάγραμμα του μέτρου της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ2)

$0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$:

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου α_1 ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 2 \text{ m}.$$

$$\text{Ισχύει : } \Delta x_1 = x_1 - x_0 \Leftrightarrow x_1 = x_0 + \Delta x_1 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ m}.$$

Επομένως, η δύναμη $\vec{F}_1$ καταργήθηκε στη θέση : $x_1 = 2 \text{ m}$.

Δ3)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ το κιβώτιο έχει ταχύτητα μέτρου

$$v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$2 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$: Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου α_2 και αρχική ταχύτητα μέτρου v_1 . Τη χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου

$$v_2 = v_1 + \alpha_2 (t_2 - t_1) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η κινητική ενέργεια την ίδια στιγμή είναι : $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(20\text{ Kg})\left(36\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow K_2 = 360\text{ J}.$

Δ4)

2 s → 4 s :

Υπολογίζω το μέτρο της μετατόπισης του κιβωτίου στη χρονική διάρκεια $\Delta t_2 = t_2 - t_1 :$

$$\Delta x_2 = v_1(\Delta t_2) + \frac{1}{2}\alpha_2(\Delta t_2)^2 = \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2\text{ s}) + \frac{1}{2}\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4\text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_2 = 8\text{ m}.$$

Για το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κιβώτιο, ισχύει :

$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 2\text{ m} + 8\text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 10\text{ m}.$$

Η μέση ταχύτητα του κιβωτίου για τη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 4\text{ s}$, είναι :

$$v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{10\text{ m}}{4\text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 2,5\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

52. (11699) Μαθητής σπρώχνει ένα κιβώτιο με βιβλία μάζας $m_1 = 50 \text{ kg}$ ασκώντας σε αυτό σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 200 N . Το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω στο δάπεδο του διαδρόμου του σχολείου του. Κατόπιν ο μαθητής αφαιρεί βιβλία και η μάζα του κιβωτίου γίνεται πλέον $m_2 = 40 \text{ kg}$. Στη συνέχεια αρχίζει πάλι να σπρώχνει το κιβώτιο ξεκινώντας από την ηρεμία και ασκώντας πάλι την ίδια σταθερή δύναμη $\vec{F}$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Δ1) Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής που ασκείται στο κιβώτιο μάζας $m_1 = 50 \text{ kg}$, καθώς και τον συντελεστή τριβής μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου.

Μονάδες 6

Για τα πρώτα δύο δευτερόλεπτα της κίνησης του κιβωτίου μάζας $m_2 = 40 \text{ kg}$, να υπολογίσετε:

Δ2) το μέτρο της τριβής μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου καθώς και το διάστημα που διανύει το κιβώτιο.

Μονάδες 7

Δ3) το έργο της τριβής.

Μονάδες 6

Δ4) την ενέργεια που πρόσφερε ο μαθητής στο κιβώτιο και το ποσό αυτής που έγινε κινητική ενέργεια.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Στον άξονα y το κιβώτιο μάζας m_1 ισορροπεί, άρα :

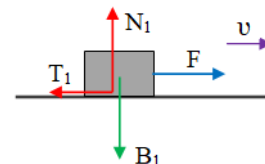
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g = 500 \text{ N}.$$

Αφού το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα, ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F - T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = F = 200 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_1 = \mu N_1 \Leftrightarrow \mu = \frac{T_1}{N_1} \Rightarrow \mu = \frac{200 \text{ N}}{500 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,4.$$



Δ2)

Στον άξονα y το κιβώτιο μάζας m_2 ισορροπεί, άρα :

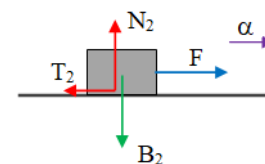
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g = 400 \text{ N}.$$

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης είναι : $T_2 = \mu N_2 = 0,4 \cdot 400 \text{ N} \Rightarrow T_2 = 160 \text{ N}$.

Αφού $F > T_2$, το κιβώτιο θα επιταχυνθεί προς την κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης :

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow F - T_2 = ma \Leftrightarrow a = \frac{F - T_2}{m} \Rightarrow a = \frac{(200 - 160) \text{ N}}{40 \text{ Kg}} \Rightarrow a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης (διάστημα) του κιβωτίου μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x = 2 \text{ m}.$$

Δ3)

Το έργο της τριβής ολίσθησης $\vec{T}_2$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$, είναι :

$$W_{T_2} = - T_2 (\Delta x) = - (160 \text{ N}) (2 \text{ m}) \Rightarrow W_{T_2} = - 320 \text{ J}.$$

Δ4)

Η ενέργεια που πρόσφερε ο μαθητής στο κιβώτιο είναι ίση με το έργο της δύναμης που ασκεί ο μαθητής :

$$W_F = F(\Delta x) = (200 \text{ N})(2 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 400 \text{ J}.$$

Σύμφωνα με το ΘΜΚΕ, η κινητική ενέργεια του κιβωτίου τη στιγμή $t = 2 \text{ s}$ είναι :

$$K = W_F + W_{T_2} = 400 \text{ J} - 320 \text{ J} \Rightarrow K = 80 \text{ J}.$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της κινητικής ενέργειας

Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$, το κιβώτιο έχει ταχύτητα μέτρου $v = at = \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2\text{s}) \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Η κινητική ενέργεια του κιβωτίου την ίδια στιγμή, είναι :

$$K = \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} (40 \text{ Kg}) \left(4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow K = 80 \text{ J}.$$

53. (11701) Μικρό σφαιρίδιο μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ αφήνεται από ύψος $h = 10 \text{ m}$ να εκτελέσει ελεύθερη πτώση. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Δ1) Σε ποιο ύψος η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου (U) είναι ίση με την κινητική του (K);

Μονάδες 5

Δ2) Ποια η ταχύτητα του σφαιριδίου τη στιγμή που η δυναμική του ενέργεια (U) είναι ίση με την κινητική του (K);

Μονάδες 6

Δ3) Έστω $t_{ολ}$ το συνολικό χρονικό διάστημα για να φτάσει το σφαιρίδιο στο έδαφος και t_E το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που άρχισε να κινείται μέχρι τη στιγμή που η δυναμική του ενέργεια θα γίνει ίση με την κινητική του.

Να υπολογιστεί ο λόγος: $\frac{t_{ολ}}{t_E}$.

Μονάδες 7

Δ4) Να γίνουν στο ίδιο διάγραμμα σε βαθμολογημένους άξονες, οι γραφικές παραστάσεις $U=U(y)$, $K=K(y)$ και $E=E(y)$ όπου y η απόσταση του σφαιριδίου από το έδαφος και E η μηχανική ενέργεια του σφαιριδίου.

Μονάδες 7

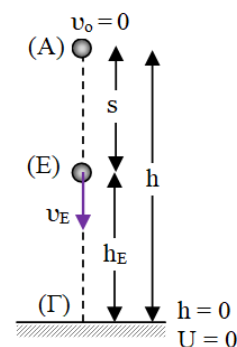
Απάντηση

Δ1)

Το σφαιρίδιο κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για τις θέσεις Α, Ε :

$$K_E + U_E = K_A + U_A \xrightarrow{K_E = U_E} 2U_E = U_A \Leftrightarrow 2mgh_E = mgh \Leftrightarrow$$

$$2h_E = h \Leftrightarrow h_E = \frac{h}{2} \Rightarrow h_E = 5 \text{ m}.$$



Δ2)

Σε ύψος $h_E = 5 \text{ m}$, ισχύει :

$$K_E = U_E \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_E^2 = mgh_E \Leftrightarrow v_E^2 = 2gh_E \Leftrightarrow v_E = \sqrt{2gh_E} \Rightarrow v_E = \sqrt{2\left(10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5\text{m})} \Rightarrow v_E = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ3)

Η απόσταση από το Α μέχρι το Ε είναι : $s = h - h_E \Rightarrow s = 5 \text{ m}$.

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2}gt_{ολ}^2 \\ s = \frac{1}{2}gt_E^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{h}{s} = \frac{t_{ολ}^2}{t_E^2} \Leftrightarrow \frac{t_{ολ}}{t_E} = \sqrt{\frac{h}{s}} \Rightarrow \frac{t_{ολ}}{t_E} = \sqrt{2}.$$

Δ4)

Η δυναμική ενέργεια της σφαίρας σε απόσταση y από το έδαφος, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$U = mgy \Rightarrow \boxed{U = 20y}. \text{ (S.I.)} \quad (1) \quad [0 \leq y \leq 10 \text{ m}]$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1), η δυναμική ενέργεια U είναι ανάλογη με το ύψος y , άρα το διάγραμμα της σχέσης $U = f(y)$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η μηχανική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή : $E_{μηχ} = K + U$. (2)

Σε ύψος $y = h$: $K = 0 \Rightarrow E_{μηχ} = mgh \Rightarrow E_{μηχ} = 200 \text{ J} (= \text{σταθερή}).$

Επομένως, το διάγραμμα της σχέσης $E_{μηχ} = f(y)$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα y .

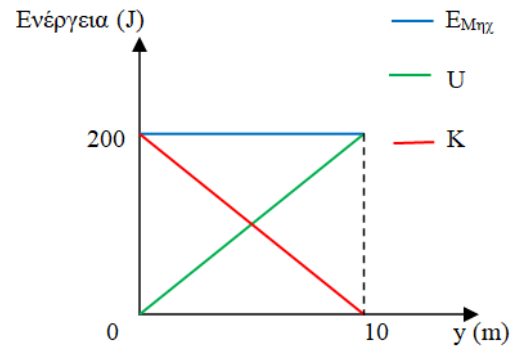
$$(2) \Rightarrow K = E_{\mu\eta\chi} - U \xrightarrow{(1)} \boxed{K = 200 - 20y}. \text{ (S.I.)} \quad (3) \quad [0 \leq y \leq 10 \text{ m}]$$

Σύμφωνα με τη σχέση (3), το διάγραμμα κινητικής ενέργειας – ύψους $K = f(y)$ είναι ευθεία με αρνητική κλίση.

Στο έδαφος ($y = 0$): $U = 0$, $K = E_{\mu\eta\chi} = 200 \text{ J}$.

Στο ψηλότερο σημείο ($y = h$): $K = 0$, $U = E_{\mu\eta\chi} = 200 \text{ J}$.

Το διάγραμμα που ικανοποιεί τα προηγούμενα συμπεράσματα φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχόλιο :

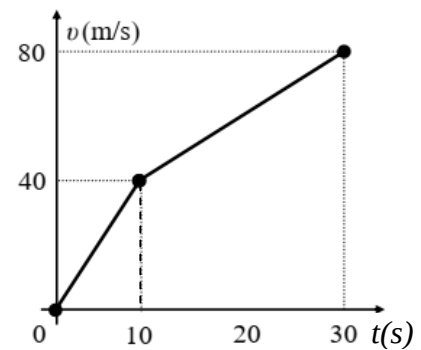
Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το οριζόντιο έδαφος.

54. (11702) Ένα σώμα μάζας 20 Kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0 s – 30 s φαίνεται στο σχήμα.

Δ1) Να υπολογιστεί η συνολική μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 s – 30 s.

Μονάδες 6

Δ2) Να συμπληρωθεί ο πίνακας:



Χρονικό διάστημα (s)	Συνισταμένη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)
0 – 10	
10 – 30	

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογιστεί το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης τα χρονικά διαστήματα 0 s - 10 s και 10 s – 30 s.

Μονάδες 6

Δ4) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (Δ3) να επαληθεύσετε το «Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου».

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1)

Η τιμή της μετατόπισης σε κάθε χρονική διάρκεια είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s} : \Delta x_1 = E_{\text{trap}} = \frac{40 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 200 \text{ m}.$$

$$10 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \Delta x_2 = E_{\text{trap}} = \frac{(80 + 40) \cdot 20}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 1200 \text{ m}.$$

$$0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 200 \text{ m} + 1200 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 1400 \text{ m}.$$

Δ2)

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης και τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε κάθε χρονική διάρκεια.

$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s} : \alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Sigma F_1 = m\alpha_1 = 80 \text{ N}.$$

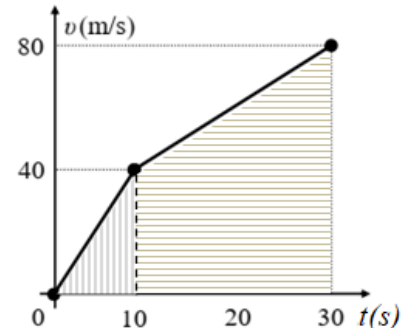
$$10 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(80 - 40) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(30 - 10) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Sigma F_2 = m\alpha_2 = 40 \text{ N}.$$

Δ3)

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού του έργου σταθερής δύναμης σε κάθε χρονική διάρκεια.

$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s} : W_1 = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) = (80 \text{ N})(200 \text{ m}) \Rightarrow W_1 = 16000 \text{ J}.$$



10 s → 30 s : $W_2 = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (40 \text{ N})(1200 \text{ m}) \Rightarrow W_2 = 48000 \text{ J}.$

Δ4)

0 s → 10 s :

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ η ταχύτητα έχει τιμή : $v_1 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή t_1 είναι : $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1600 \text{ J} \Rightarrow K_1 = 16000 \text{ J}.$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι : $\Delta K_1 = K_1 - K_0 = 16000 \text{ J},$

δηλαδή ισχύει : $\Delta K_1 = W_1.$

Επομένως επαληθεύεται το ΘΜΚΕ.

10 s → 30 s :

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 30 \text{ s}$ η ταχύτητα έχει τιμή : $v_2 = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή t_2 είναι : $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 6400 \text{ J} \Rightarrow K_2 = 64000 \text{ J}.$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι : $\Delta K_2 = K_2 - K_1 = 48000 \text{ J},$

δηλαδή ισχύει : $\Delta K_2 = W_2.$

Επομένως επαληθεύεται το ΘΜΚΕ.

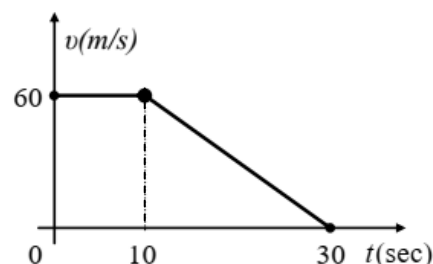
Σχόλιο : Στο ερώτημα Δ4 δεν είναι σαφές αν ζητείται η επαλήθευση του ΘΜΚΕ σε κάθε χρονική διάρκεια ή για τη συνολική χρονική διάρκεια.

55. (11703) Ένα σώμα μάζας 2 Kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0 s - 30 s φαίνεται στο σχήμα.
Δ1) Να υπολογιστεί η συνολική μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 s - 30 s.

Μονάδες 6

Δ2) Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Χρονικό διάστημα (s)	Συνισταμένη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)
0-10	
10-30	



Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογιστεί το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης τα χρονικά διαστήματα 0 s - 10 s, και 10 s - 30 s.

Μονάδες 6

Δ4) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (Δ3) να επαληθεύσετε το «Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου».

Μονάδες 7

Απάντηση

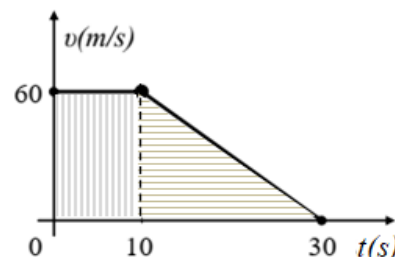
Δ1)

Η τιμή της μετατόπισης σε κάθε χρονική διάρκεια είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου.

$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s} : \Delta x_1 = E_{\text{ορθ}} = 60 \cdot 10 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 600 \text{ m}.$$

$$10 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \Delta x_2 = E_{\text{τρίγ}} = \frac{60 \cdot 20}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 600 \text{ m}.$$

$$0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 600 \text{ m} + 600 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 1200 \text{ m}.$$



Δ2)

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης και τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε κάθε χρονική διάρκεια.

$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s} : \alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{(60 - 60) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Sigma F_1 = m \alpha_1 = 0 \text{ N}.$$

$$10 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : \alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0 - 60) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(30 - 10) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_2 = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Sigma F_2 = m \alpha_2 = -6 \text{ N}.$$

Δ3)

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού του έργου σταθερής δύναμης σε κάθε χρονική διάρκεια.

$$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s} : W_1 = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) = (0 \text{ N})(600 \text{ m}) \Rightarrow W_1 = 0 \text{ J}.$$

$$10 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s} : W_2 = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (-6 \text{ N})(600 \text{ m}) \Rightarrow W_2 = -3600 \text{ J}.$$

Δ4)

0 s → 10 s :

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ η ταχύτητα έχει τιμή : $v_1 = v_o = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι :

$$\Delta K_1 = K_1 - K_o = \frac{1}{2} m (v_o^2 - v_o^2) \Rightarrow \Delta K_1 = 0 \text{ J},$$

δηλαδή ισχύει : $\Delta K_1 = W_1$.

Επομένως επαληθεύεται το ΘΜΚΕ.

10 s → 30 s :

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 30 \text{ s}$ η ταχύτητα έχει τιμή : $v_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι :

$$\Delta K_2 = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 2 (0 - 3600) \text{ J} \Rightarrow \Delta K_2 = -3600 \text{ J},$$

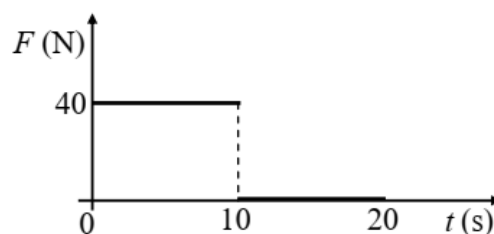
δηλαδή ισχύει : $\Delta K_2 = W_2$.

Επομένως επαληθεύεται το ΘΜΚΕ.

Σχόλια :

- 1) Στο ερώτημα Δ2 δεν αναφέρει η εκφώνηση ότι ζητείται η **αλγεβρική τιμή** της συνισταμένης δύναμης.
- 2) Στο ερώτημα Δ4 δεν είναι σαφές αν ζητείται η επαλήθευση του ΘΜΚΕ σε κάθε χρονική διάρκεια ή για τη συνολική χρονική διάρκεια.

56. (11705) Μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι $\mu = 0,4$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ που η τιμή της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.



Δ1) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου ($a - t$) για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 20 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($u - t$) για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 20 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Δ3) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της τριβής για το χρονικό διάστημα $10 \rightarrow 20 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

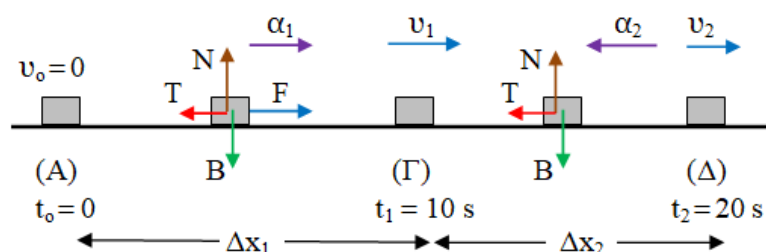
Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 20 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 0,4 \cdot 20 \text{ N} \Rightarrow T = 8 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε κάθε χρονική διάρκεια.



$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$:

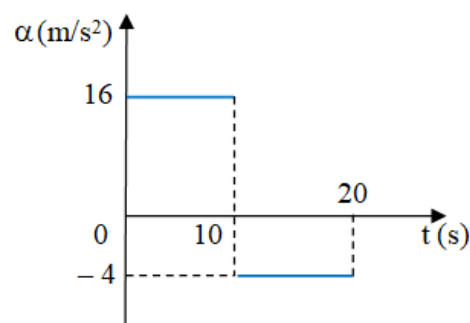
$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{F - T}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(40 - 8) \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$:

$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow -T = m\alpha_2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_2 = -\frac{T}{m} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{8 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Δ2)

$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$: Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = \alpha_1 t \Rightarrow v = 16t. \text{ (S.I.)}$$

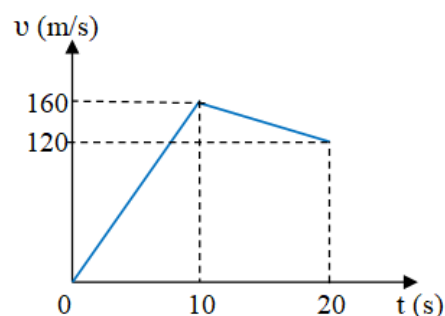
Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου :

$$v_1 = 160 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$: Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ($v > 0, \alpha < 0$).

Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = v_1 + \alpha_2(t - t_1) \Rightarrow v = 160 - 4(t - 10) \text{ ή } v = 200 - 4t. \text{ (S.I.)}$$



Τη χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου : $v_2 = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Δ3)

$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$:

Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} \left(16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (100 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 800 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$W_F = F(\Delta x_1) = (40 \text{ N})(800 \text{ m}) = 32000 \text{ J}.$$

Δ4)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 160 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ενώ τη χρονική στιγμή

$t_2 = 20 \text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου $v_2 = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

1ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για το χρονικό διάστημα $10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$:

$$W_{T(2)} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} (2 \text{ Kg})(120^2 - 160^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow W_{T(2)} = -11200 \text{ J}.$$

2ος τρόπος

Το μέτρο της μετατόπισης στο χρονικό διάστημα $10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$ είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραπεζίου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$\Delta x_2 = E_{\text{τραπ}} = \frac{(160 + 120) \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 1400 \text{ m}.$$

Το έργο της τριβής στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$W_{T(2)} = -T(\Delta x_2) = -(8 \text{ N})(1400 \text{ m}) \Rightarrow W_{T(2)} = -11200 \text{ J}.$$

57. (11706) Μικρή σφαίρα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ βρίσκεται σε ύψος $h = 180 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνεται να πέσει εκτελώντας ελεύθερη πτώση. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα. Να υπολογίσετε:

Δ1) Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας τη χρονική στιγμή που φθάνει στο έδαφος. **Μονάδες 6**

Δ2) Το διάστημα που διανύει η σφαίρα στη διάρκεια του 3ου δευτερολέπτου της κίνησής της. **Μονάδες 7**

Δ3) Το έργο του βάρους της σφαίρας από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που η κινητική της ενέργεια γίνεται ίση με 6250 J . **Μονάδες 6**

Δ4) Το μέσο ρυθμό παραγωγής έργου ($P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$) από το βάρος της σφαίρας από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που φθάνει στο έδαφος.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ1)

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t = t_{ολ}$ που φθάνει η σφαίρα στο έδαφος, έχει διανύσει απόσταση $s = h$. Επομένως :

$$h = \frac{1}{2}gt_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2 \cdot 180 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \Rightarrow t_{ολ} = 6 \text{ s}.$$

Τη στιγμή αυτή έχει ταχύτητα μέτρου :

$$v = gt_{ολ} = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6 \text{ s}) \Rightarrow v = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ2)

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, η σφαίρα

$$\text{διανύει απόσταση : } s_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}^2) \Rightarrow s_1 = 20 \text{ m}.$$

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$, η σφαίρα διανύει απόσταση :

$$s_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{1}{2}\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(9 \text{ s}^2) \Rightarrow s_2 = 45 \text{ m}.$$

Το διάστημα που διανύει η σφαίρα από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$ (στο 3ο δευτερόλεπτο) είναι :

$$s = s_2 - s_1 = 45 \text{ m} - 20 \text{ m} \Rightarrow s = 25 \text{ m}.$$

Δ3)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ, για τη διαδρομή της σφαίρας από τη θέση που αφήνεται ελεύθερη μέχρι τη θέση που έχει κινητική ενέργεια $K = 6250 \text{ J}$:

$$W_B = K - 0 = K \Rightarrow W_B = 6250 \text{ J}.$$

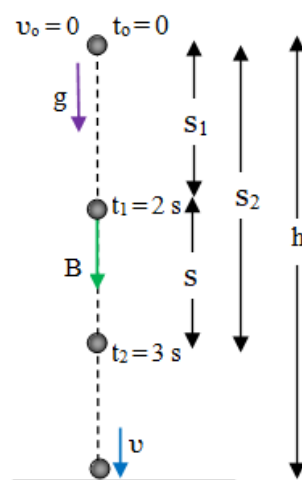
Δ4)

Μέχρι να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος, το βάρος παράγει έργο :

$$W_{B(ολ)} = mgh = 5 \cdot 10 \cdot 180 \text{ J} = 9000 \text{ J}.$$

Η μέση ισχύς του βάρους στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$P_{\mu} = \frac{W_{B(ολ)}}{t_{ολ}} = \frac{9000 \text{ J}}{6 \text{ s}} \Rightarrow P_{\mu} = 1500 \text{ W}.$$



58. (11932) Το οριζόντιο, ακλόνητο δάπεδο της εικόνας παρουσιάζει την εξής ιδιομορφία: το τμήμα του AB, μήκους $(AB) = 5 \text{ m}$ είναι λείο, ενώ το τμήμα του BΓ, έχει πολύ μεγάλο μήκος και είναι τραχύ.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ σημειακό αντικείμενο εκτοξεύεται από το σημείο A προς το σημείο Γ του δαπέδου με οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_0$, μέτρου $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Η μάζα του σημειακού αντικειμένου είναι $m = 1 \text{ kg}$ και η γήινη βαρυντική επιτάχυνση $\vec{g}$ θεωρείται σταθερή, με μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σημειακό αντικείμενο και στο τραχύ τμήμα BΓ του δαπέδου είναι $\mu = 0,5$.

Δ1. Να υπολογίσετε:

Δ1.1. Τη χρονική διάρκεια (Δt_1) της κίνησης του σημειακού αντικειμένου στο λείο τμήμα AB του δαπέδου.

Μονάδες 4

Δ1.2. Τη χρονική διάρκεια (Δt_2) της κίνησης του σημειακού αντικειμένου στο τραχύ τμήμα BΓ του δαπέδου.

Μονάδες 9

Δ1.3. Το μέτρο της συνολικής μετατόπισης (Δx) του σημειακού αντικειμένου στη χρονική διάρκεια $\Delta t_1 + \Delta t_2$.

Μονάδες 4

Δ1.4. Το συνολικό έργο της τριβής ολίσθησης $(W_{T_{ολ}})$ που δέχεται το σημειακό αντικείμενο.

Μονάδες 4

Δ2. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $v = f(t)$ [μέτρο ταχύτητας – χρόνου]

και $x = g(t)$ [θέσης – χρόνου] για το σύνολο της κίνησης του σημειακού αντικειμένου, θεωρώντας $x_A = 0$.

Μονάδες 4

Απάντηση

Δ1)

Δ1.1)

A → B: Στον άξονα x δεν ασκείται δύναμη, άρα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Στη χρονική διάρκεια Δt_1 το μέτρο της μετατόπισης είναι $\Delta x_1 = (AB) = 5 \text{ m}$.

Ισχύει:

$$\Delta x_1 = v_0 (\Delta t_1) \Leftrightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_0} \Rightarrow \Delta t_1 = 0,5 \text{ s}.$$

Δ1.2)

B → Δ: Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 10 \text{ N}$.

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης είναι: $T = \mu N = 0,5 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T = 5 \text{ N}$.

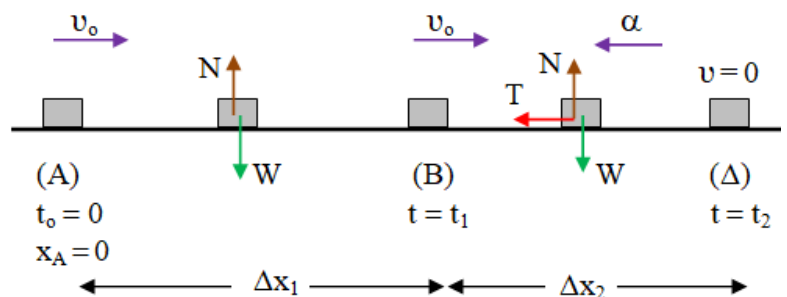
Με την επίδραση της τριβής το σώμα αποκτά επιβράδυνση μέτρου α .

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x:

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow T = m\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{T}{m} \Rightarrow \alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, μέχρι να σταματήσει μετά από χρονική διάρκεια Δt_2 .

$$\text{Ισχύει: } v = v_0 - \alpha(\Delta t_2) \xrightarrow{v=0} \alpha(\Delta t_2) = v_0 \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{v_0}{\alpha} \Rightarrow \Delta t_2 = 2 \text{ s}.$$



Δ1.3)

B → Δ :

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος μέχρι να σταματήσει, είναι :

$$\Delta x_2 = v_o(\Delta t_2) - \frac{1}{2} \alpha (\Delta t_2)^2 = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2 \text{ s}) - \frac{1}{2} \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_2 = 10 \text{ m}.$$

Επομένως, η συνολική μετατόπιση έχει μέτρο :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 5 \text{ m} + 10 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 15 \text{ m}.$$

Δ1.4)

Στο σώμα ασκείται δύναμη τριβής μόνο κατά τη διάρκεια της μετατόπισης Δx_2 .

Το συνολικό έργο της τριβής ολίσθησης, είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_2) = -(5 \text{ N})(10 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -50 \text{ J}.$$

Δ2)

Η συνολική διάρκεια της κίνησης, είναι :

$$t_{\text{ολ}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 0,5 \text{ s} + 2 \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 2,5 \text{ s}.$$

α) διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου (v – t)

0 s – 0,5 s

Η ταχύτητα είναι σταθερή : $v = v_o = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Το διάγραμμα είναι ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στον άξονα t.

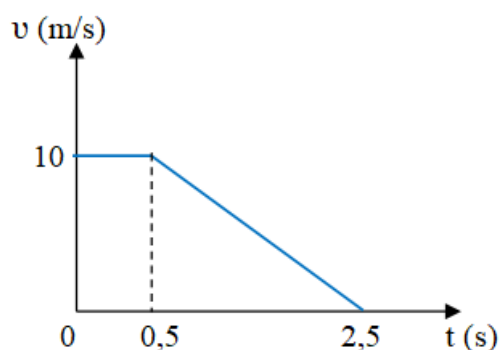
0,5 s – 2,5 s

Το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση :

$$v = v_o - \alpha(t - t_1) \Rightarrow v = 10 - 5(t - 0,5). \text{ (S.I.)}$$

Το διάγραμμα της σχέσης είναι πλάγιο τμήμα με αρνητική κλίση.

Για $t = 2,5 \text{ s} \Rightarrow v = 0$.



β) διάγραμμα θέσης – χρόνου (x – t)

0 s – 0,5 s

Η θέση x του σώματος προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$x = vt \Rightarrow x = 10t. \text{ (S.I.)}$$

Το διάγραμμα της σχέσης είναι πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα.

Για $t = 0 \text{ s} \Rightarrow x = 0 \text{ m}$.

Για $t = 0,5 \text{ s} \Rightarrow x = x_1 = 5 \text{ m}$.

0,5 s – 2,5 s

Η θέση x του σώματος προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$x = x_1 + v_o(t - t_1) - \frac{1}{2} \alpha (t - t_1)^2 \Rightarrow$$

$$x = 5 + 10(t - 0,5) - 2,5(t - 0,5)^2. \text{ (S.I.)}$$

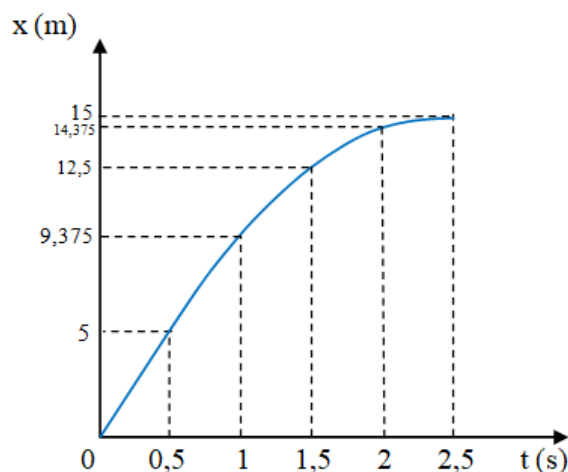
Το διάγραμμα της σχέσης είναι παραβολή, η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

* Για $t = 1 \text{ s} \Rightarrow x = 9,375 \text{ m}$.

* Για $t = 1,5 \text{ s} \Rightarrow x = 12,5 \text{ m}$.

* Για $t = 2 \text{ s} \Rightarrow x = 14,375 \text{ m}$.

* Για $t = 2,5 \text{ s} \Rightarrow x = 15 \text{ m}$.



59. (11933) Σώμα (αμελητέων διαστάσεων) μάζας $m = 1 \text{ kg}$ κινείται σε οριζόντιο δρόμο με τον οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ολ}$. Η χαρτοταινία στην οποία καταγράφεται η κίνησή του δίνεται στην Εικόνα 1:



Εικόνα 1: Η χαρτοταινία στην οποία καταγράφεται η κίνηση του σώματος ($\Delta 1$).

$\Delta 1$. Αν το σώμα, κατά τη διάρκεια της κίνησής του, δέχεται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F_1 = 5 \text{ N}$, να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ολ}$ σώματος - δρόμου.

Μονάδες 5

Το ίδιο σώμα βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x = 0$ του ίδιου οριζόντιου δρόμου. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F_2 οπότε το σώμα αρχίζει να κινείται. Η χαρτοταινία στην οποία καταγράφεται η κίνησή του δίνεται τώρα στην Εικόνα 2:



Εικόνα 2: Η χαρτοταινία στην οποία καταγράφεται η κίνηση του σώματος ($\Delta 2$).

και η μετατόπισή του, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ έχει μέτρο $\Delta x_1 = 25 \text{ m}$.

$\Delta 2$. Να υπολογίσετε:

$\Delta 2.1$. το μέτρο της δύναμης F_2 .

Μονάδες 5

$\Delta 2.2$. το μέτρο της ταχύτητας v_1 του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 5

$\Delta 2.3$. την μέση ισχύ $\bar{P}$ της δύναμης F_2 από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 5

$\Delta 2.4$. την ισχύ P_1 της δύναμης F_2 τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Η επιτάχυνση της βαρύτητας να θεωρηθεί σταθερή, με μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

Υποθέτω ότι οι διαδοχικές θέσεις των κουκίδων στις δύο χαρτοταινίες αντιστοιχούν σε ίσα χρονικά διαστήματα Δt .

$\Delta 1$)

Αφού οι αποστάσεις s ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κουκίδες στην εικόνα 1 είναι ίσες, άρα η ταχύτητα του σώματος έχει σταθερό μέτρο $\left(|v| = \frac{s}{\Delta t} = \text{σταθ.} \right)$, επομένως η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

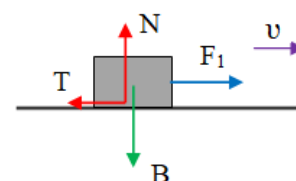
Από τον 1ο νόμο του Newton, προκύπτει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_1 - T = 0 \Leftrightarrow T = F_1 \Rightarrow T = 5 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 10 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής : } T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{5 \text{ N}}{10 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,5.$$



Δ2)

Δ2.1) Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κουκίδες στην εικόνα 2 αυξάνεται συνεχώς, επομένως αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητας. Άρα η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.

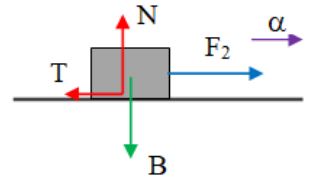
Αφού οι δυνάμεις $\vec{F}_2$, $\vec{T}$ είναι σταθερές, η επιτάχυνση είναι σταθερή άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2(\Delta x_1)}{t_1^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 25 \text{ m}}{25 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F_2 - T = m\alpha \Leftrightarrow F_2 = T + m\alpha \Rightarrow F_2 = 5 \text{ N} + (1 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F_2 = 7 \text{ N}.$$



Δ2.2)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου : $v_1 = \alpha t_1 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (5 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Δ2.3)

Το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ είναι :

$$W_{F_2} = F_2(\Delta x_1) = (7 \text{ N})(25 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_2} = 175 \text{ J}.$$

Η μέση ισχύς της δύναμης $\vec{F}_2$ στη χρονική διάρκεια $0 - t_1$ είναι :

$$P_\mu = \frac{W_{F_2}}{t_1} = \frac{175 \text{ J}}{5 \text{ s}} \Rightarrow P_\mu = 35 \text{ W}.$$

Δ2.4)

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

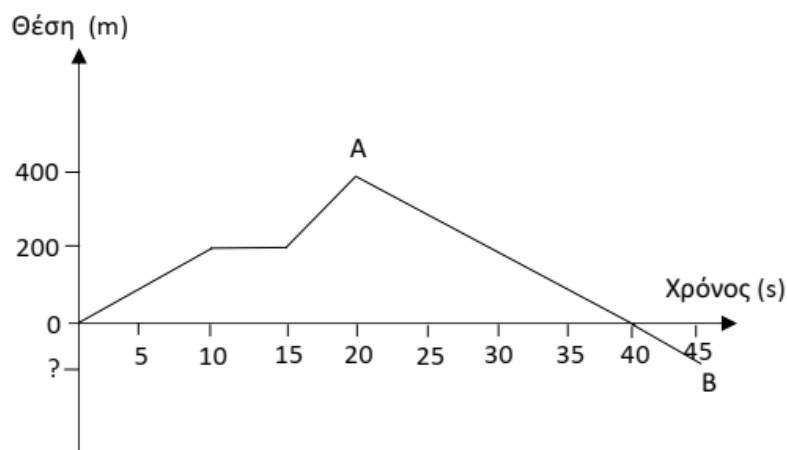
Αφού η δύναμη $\vec{F}_2$ έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα $\vec{v}_1$, τη χρονική στιγμή t_1 η ισχύς της είναι :

$$P_1 = F_2 \cdot v_1 = (7 \text{ N}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow P_1 = 70 \text{ W}.$$

Σχόλιο :

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι οι διαδοχικές θέσεις των κουκίδων στις δύο χαρτοταινίες αντιστοιχούν σε ίσα χρονικά διαστήματα.

60. (12354) Πομπός GPS στερεώνεται στο σώμα ενός παπαγάλου ώστε να στέλνει διαρκώς την θέση του σε ερευνητές που τον παρακολουθούν. Ο παπαγάλος αφήνεται ελεύθερος και η πορεία του καταγράφεται στο πιο κάτω διάγραμμα. Θεωρούμε ότι το εργαστήριο από το οποίο ξεκινάει σε χρόνο $t = 0$ βρίσκεται στην θέση $x = 0$



και ότι το πτηνό κινείται πάνω σε μια νοητή ευθεία καθ' όλη τη διαδρομή του.

Καλείστε να βοηθήσετε τη μελέτη της κίνησης του πτηνού. Υπολογίστε:

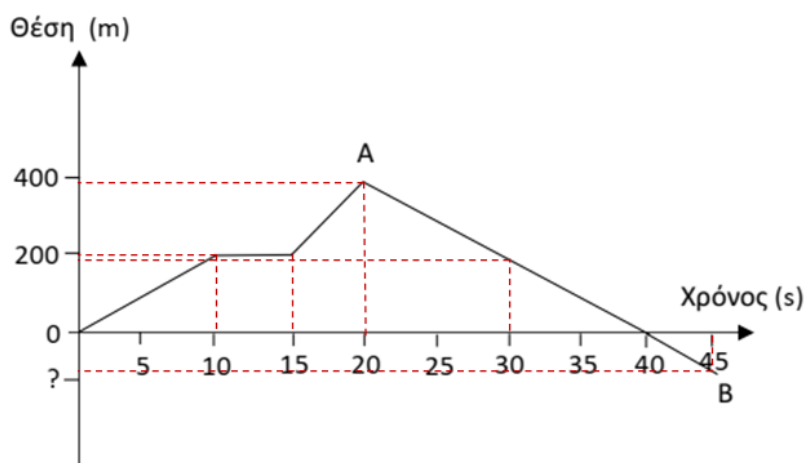
- 4.1) τη μέση ταχύτητα του παπαγάλου από τη χρονική στιγμή της εκκίνησης μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 20\text{s}$ (σημείο A του διαγράμματος),
- 4.2) τη μέση ταχύτητα του παπαγάλου από τη χρονική στιγμή της εκκίνησης, μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 30\text{s}$ μετά την εκκίνηση του,
- 4.3) τη θέση του πτηνού τη χρονική στιγμή $t = 45\text{s}$ (σημείο B του διαγράμματος).
- 4.4) Σχεδιάστε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της τιμής της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

(Μονάδες 6+7+6+6)

Σχόλιο : Το διάγραμμα δεν έχει σχεδιαστεί με ακρίβεια (π.χ. τη χρονική στιγμή 20 s η θέση δεν είναι ακριβώς 400 m ή τη χρονική στιγμή 30 s η θέση δεν είναι ακριβώς 200 m).

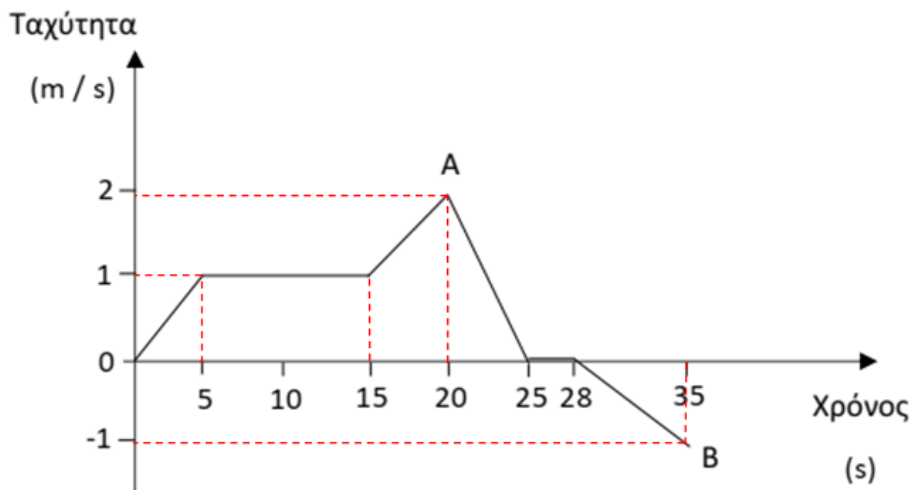
Επομένως **δεν μπορούν να γίνουν ακριβείς υπολογισμοί με βάση το διάγραμμα.**

Η άσκηση καλύπτει την ύλη μόνο των παραγράφων 1.1.5 & 1.1.6 του Κεφαλαίου 1.1 και δεν είναι κατάλληλη για 4ο θέμα εξετάσεων.



61. (12355)

Ο Αλέξανδρος μετά από πολύ καιρό επιστρέφει στο κολυμβητήριο για προπόνηση. Αρχίζει να κάνει διαδρομές στην μήκους 25 μέτρων πισίνα της ομάδας του. Παράλληλα, ο προπονητής του καταγράφει τη διαδρομή του μέσα από το «έξυπνο» ρολόι που φοράει ο Αλέξανδρος. Μετά από ένα χρονικό διάστημα, μια εφαρμογή σχεδιάζει το πιο κάτω διάγραμμα που



περιγράφει την τιμή της ταχύτητας του κολυμβητή σε συνάρτηση με το χρόνο για το δεδομένο χρονικό διάστημα. Με βάση το διάγραμμα αυτό ο προπονητής προσπαθεί να βγάλει συμπεράσματα για τη φυσική κατάσταση του κολυμβητή.

Αν η μάζα του Αλέξανδρου είναι $m = 70 \text{ kg}$, να υπολογίσετε :

4.1) Το διάστημα που έχει διανύσει ο κολυμβητής από τη χρονική στιγμή της εκκίνησης ($t = 0$), έως τη χρονική στιγμή ($t = 20 \text{ s}$) μετά την εκκίνηση του (σημείο Α).

4.2) Σχεδιάστε το αντίστοιχο διάγραμμα της τιμής της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή της εκκίνησης ($t = 0$), έως τη χρονική στιγμή ($t = 35 \text{ s}$).

4.3) Τη μέση ταχύτητα του κολυμβητή καθώς και τη μετατόπισή του από τη χρονική στιγμή της εκκίνησης ($t = 0$), έως τη χρονική στιγμή ($t = 35 \text{ s}$).

4.4) Αν, για λόγους απλότητας, η αντίσταση του νερού στο σώμα του κολυμβητή θεωρηθεί διαρκώς σταθερή σε μέτρο και ίση με 28 N , να υπολογίσετε το έργο που παράγει ο κολυμβητής σε όλη τη διαδρομή από τη χρονική στιγμή της εκκίνησης ($t = 0$), έως τη χρονική στιγμή ($t = 35 \text{ s}$).

(Μονάδες 6+6+6+7)

Απάντηση

4.1)

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης του κολυμβητή σε κάθε χρονική διάρκεια είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

$$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s} : \Delta x_1 = E_1 = \frac{1 \cdot 5}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 2,5 \text{ m}.$$

$$5 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s} : \Delta x_2 = E_2 = 1 \cdot 10 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 10 \text{ m}.$$

15 s → 20 s :

$$\Delta x_3 = E_3 = \frac{(2+1) \cdot 5}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_3 = 7,5 \text{ m}.$$

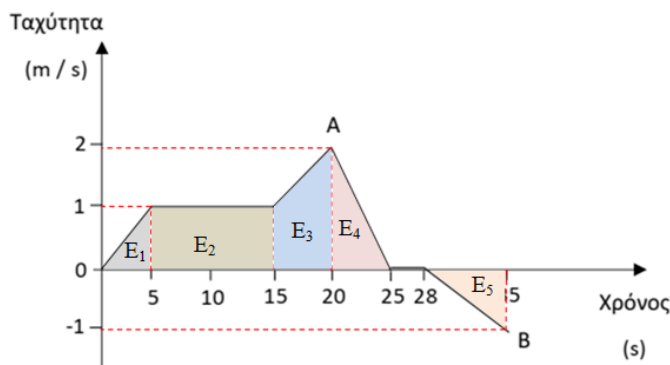
Το διάστημα που διάνυσε ο κολυμβητής στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$, είναι :

$$s_{1,2,3} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 2,5 \text{ m} + 10 \text{ m} + 7,5 \text{ m} \Rightarrow s_{1,2,3} = 20 \text{ m}.$$

4.2)

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης σε κάθε χρονική διάρκεια.

$$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s} : \alpha_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{1 \text{ m/s}}{5 \text{ s}^2} = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



5 s → 15 s :

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(1-1)}{(15-5)} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

15 s → 20 s :

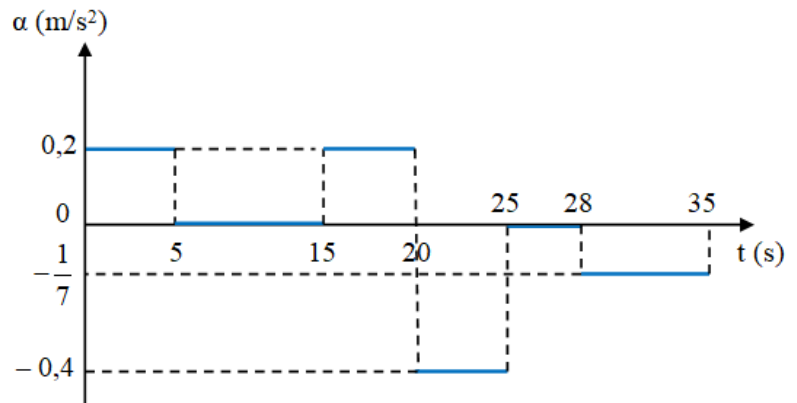
$$\alpha_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{(2-1)}{(20-15)} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

20 s → 25 s :

$$\alpha_4 = \frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3} = \frac{(0-2)}{(25-20)} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\underline{25 \text{ s} \rightarrow 28 \text{ s}} : \alpha_5 = \frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\underline{28 \text{ s} \rightarrow 35 \text{ s}} : \alpha_6 = \frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5} = \frac{(-1-0)}{(35-28)} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -\frac{1}{7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



4.3)

$$\underline{20 \text{ s} \rightarrow 25 \text{ s}} : \Delta x_4 = E_4 = \frac{2 \cdot 5}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_4 = 5 \text{ m}.$$

$$\underline{25 \text{ s} \rightarrow 28 \text{ s}} : \Delta x_5 = 0.$$

$$\underline{28 \text{ s} \rightarrow 35 \text{ s}} : \Delta x_6 = E_5 = \frac{(-1) \cdot 7}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_6 = -3,5 \text{ m}.$$

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια 0 s → 35 s, είναι :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5 + \Delta x_6 = 2,5 \text{ m} + 10 \text{ m} + 7,5 \text{ m} + 5 \text{ m} + 0 \text{ m} - 3,5 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 21,5 \text{ m}.$$

Το διάστημα που διάνυσε στη χρονική διάρκεια 20 s → 35 s, είναι :

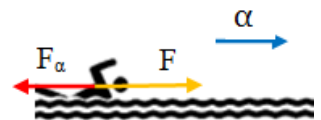
$$s_{4,5,6} = |\Delta x_4| + |\Delta x_5| + |\Delta x_6| = 5 \text{ m} + 0 \text{ m} + 3,5 \text{ m} \Rightarrow s_{4,5,6} = 8,5 \text{ m}.$$

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε στη χρονική διάρκεια 0 s → 35 s, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = s_{1,2,3} + s_{4,5,6} = 20 \text{ m} + 8,5 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 28,5 \text{ m}.$$

Η μέση ταχύτητα του κολυμβητή στη χρονική διάρκεια 0 s → 35 s, έχει μέτρο :

$$v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{28,5 \text{ m}}{35 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} \approx 0,814 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.4)

Αφού η αντίσταση του νερού $\vec{F}_{\alpha}$ είναι συνεχώς αντίρροπη από την ταχύτητα, το έργο της υπολογίζεται από τη σχέση : $W_{F_{\alpha}} = -F_{\alpha} \cdot s_{\text{ολ}} = -(28 \text{ N})(28,5 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_{\alpha}} = -798 \text{ J}.$

Από το ΘΜΚΕ υπολογίζω το έργο που παράγει ο κολυμβητής :

$$W_{\text{ολ}} = \Delta K \Leftrightarrow W_F + W_{F_{\alpha}} = \frac{1}{2} m(v_6^2 - v_o^2) \Leftrightarrow W_F = \frac{1}{2} m(v_6^2 - v_o^2) - W_{F_{\alpha}} \Rightarrow W_F = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 1 \text{ J} - (-798 \text{ J}) \Rightarrow W_F = 833 \text{ J}.$$

Σχόλια :

1) το διάγραμμα $v - t$ δεν έχει σχεδιαστεί με ακρίβεια. π.χ. τη χρονική στιγμή $t_3 = 20 \text{ s}$ η τιμή της ταχύτητας είναι (περίπου) $1,95 \text{ m/s}$ και όχι 2 m/s .

2) Η άσκηση είναι πολύπλοκη (έχει 6 χρονικά διαστήματα με διαφορετικά είδη κινήσεων), απαιτεί πολλούς υπολογισμούς και δεν ενδείκνυται για θέμα εξετάσεων.

62. (12989) Σώμα μάζας $m = 1 \text{ Kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο, ακλόνητο και τραχύ δάπεδο, πολύ μεγάλης έκτασης, με το οποίο παρουσιάζει **συντελεστή οριακής (μέγιστης στατικής) τριβής** $\mu_{op} = 0,5$ και συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ol} = 0,4$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο σώμα σταθερή, οριζόντια δύναμη F μέτρου $F = 10 \text{ N}$.

Δ1. Να εξετάσετε αν το σώμα αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Μονάδες 5

Η δύναμη F ασκείται μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ και στη συνέχεια καταργείται.

Δ2. Να υπολογίσετε:

Δ2.1. τη συνολική μετατόπιση του σώματος.

Μονάδες 15

Δ2.2. τη συνολική θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον.

Μονάδες 5

Η επιτάχυνση της βαρύτητας να θεωρηθεί σταθερή, με μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

Δ1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 10 \text{ N}.$$

Από το νόμο της οριακής τριβής :

$$T_{op} = \mu_{op}N = 0,5 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_{op} = 5 \text{ N}.$$

Αφού $F > T_{op}$, άρα το σώμα θα ξεκινήσει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Δ2)

Δ2.1)

Από τη στιγμή που ξεκινά το σώμα, ασκείται σ' αυτό τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N = 0,4 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T = 4 \text{ N}$.

0 s $\rightarrow$ 10 s : Το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση μέτρου α_1 .

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F - T}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(10 - 4) \text{ N}}{1 \text{ kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $0 - t_1$, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s})^2 \Rightarrow \Delta x_1 = 300 \text{ m}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή που ξεκινά το σώμα μέχρι να σταματήσει :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_F + W_T = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow F(\Delta x_1) - T(\Delta x_{ol}) = 0 \Leftrightarrow F(\Delta x_1) = T(\Delta x_{ol}) \Leftrightarrow$$

$$\Delta x_{ol} = \frac{F(\Delta x_1)}{T} \Rightarrow \Delta x_{ol} = \frac{(10 \text{ N})(300 \text{ m})}{4 \text{ N}} \Rightarrow \Delta x_{ol} = 750 \text{ m}.$$

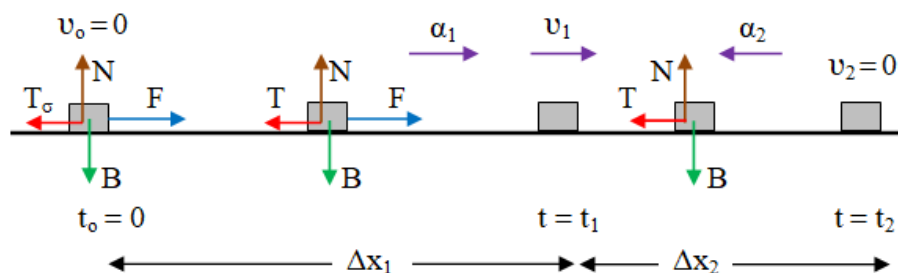
Δ2.2)

Το έργο της τριβής ολίσθησης από τη στιγμή που ξεκινά το σώμα μέχρι να σταματήσει, είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_{ol}) = -(4 \text{ N})(750 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -3000 \text{ J}.$$

Η θερμική ενέργεια («θερμότητα») που μεταφέρεται στο περιβάλλον είναι :

$$Q_T = |W_T| \Rightarrow Q_T = 3000 \text{ J}.$$



Σχόλια :

1) Η έννοια του συντελεστή οριακής στατικής τριβής και ο νόμος της οριακής στατικής τριβής δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, επομένως το ερώτημα Δ₁ είναι εκτός ύλης.

2) Η διατύπωση «η θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον» δεν είναι ακριβής.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «η θερμική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον μέσω του έργου της τριβής».

63. (12990) Σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ εκτοξεύεται από τη βάση ακλόνητου, πλάγιου δαπέδου, πολύ μεγάλης έκτασης, με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = 10 \text{ m/s}$ και κινείται κατά μήκος του. Η γωνία που σχηματίζει το πλάγιο δάπεδο με τον ορίζοντα είναι $\varphi = 30^\circ$. Το σώμα παρουσιάζει με το δάπεδο συντελεστή οριακής (μέγιστης στατικής) τριβής $\mu_{op} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ και συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ol} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Δ1. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος μέχρι τη στιγμιαία ακινητοποίησή του.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ακινητοποίηση του σώματος είναι παροδική.

Μονάδες 6

Δ3. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που, κατερχόμενο, διέρχεται από τη βάση του επιπέδου.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε τη θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον, λόγω τριβών, από τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης του σώματος, μέχρι τη χρονική στιγμή που, κατερχόμενο διέρχεται από τη βάση του επιπέδου.

Μονάδες 7

Η επιτάχυνση της βαρύτητας να θεωρηθεί σταθερή, με μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Δίνονται: $\eta\mu(30^\circ) = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Απάντηση

Δ1)

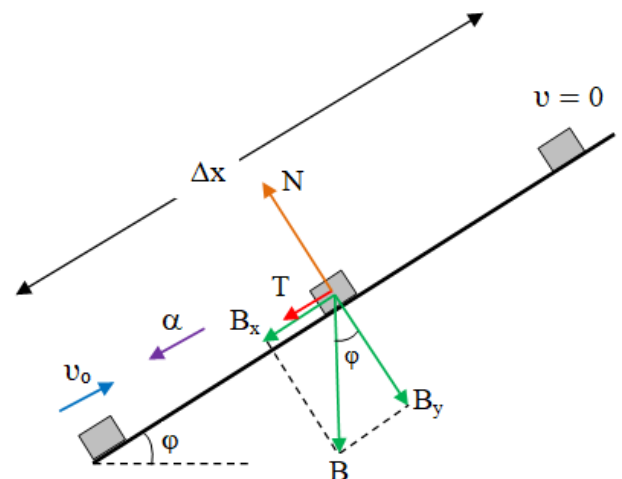
Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$N = (1\text{Kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow N = 5\sqrt{3} \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N = \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot 5\sqrt{3} \text{ N} \Rightarrow T = 3 \text{ N}.$$



Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη στιγμή της εκτόξευσης μέχρι τη στιγμή που η ταχύτητα μηδενίζεται στιγμιαία :

$$W_{B_x} + W_T = \Delta K \Leftrightarrow -mg\eta\mu\varphi(\Delta x) - T(\Delta x) = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow \Delta x = \frac{mv^2}{2(mg\eta\mu\varphi + T)} \Rightarrow$$

$$\Delta x = \frac{1 \cdot 100}{2(10 \cdot 0,5 + 3)} \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 6,25 \text{ m}.$$

Δ2)

Στο ψηλότερο σημείο : $v = 0$.

Η $\vec{B}_x$ τείνει να κινήσει το σώμα προς τα κάτω, οπότε η στατική τριβή έχει φορά προς τα πάνω.

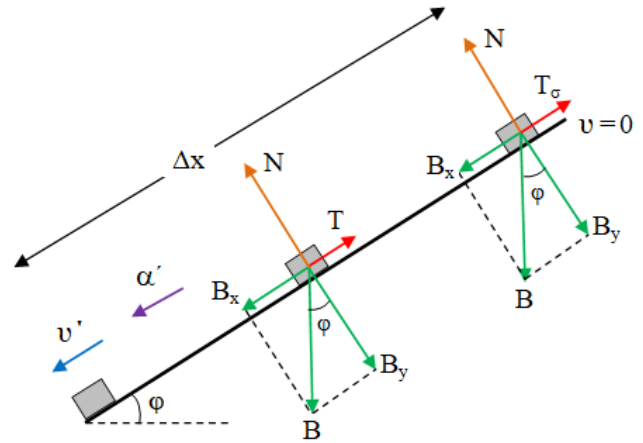
Για να κινηθεί το σώμα πρέπει η $\vec{B}_x$ να έχει μεγαλύτερο μέτρο από την οριακή στατική τριβή $\vec{T}_{op}$.

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$T_{op} = \mu_{op}N = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5\sqrt{3} \text{ N} = 3,75 \text{ N}.$$

$$B_x = mg\eta\mu\phi = 5 \text{ N}.$$

Αφού $B_x > T_{op}$, άρα το σώμα θα κινηθεί προς τα κάτω.



Δ3)

Κατά τη διάρκεια της καθόδου η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ έχει φορά προς τα πάνω.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη στιγμή που ξεκινά το σώμα μέχρι να φτάσει στη βάση του επιπέδου :

$$\Delta K = W_{Bx} + W_T \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg\eta\mu\phi(\Delta x) - T(\Delta x) \Leftrightarrow v^2 = \frac{2(mg\eta\mu\phi - T)(\Delta x)}{m} \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{2 \cdot (5 - 3) \cdot 6,25 \text{ m}^2}{1 \text{ s}^2} \Rightarrow v^2 = 25 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ4)

Το έργο της τριβής ολίσθησης για όλη τη διαδρομή είναι :

$$W_{T(ολ)} = -2T(\Delta x) = -2(3 \text{ N})(6,25 \text{ m}) \Rightarrow W_{T(ολ)} = -37,5 \text{ J}.$$

Η θερμική ενέργεια («θερμότητα») που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον μέσω του έργου της τριβής, είναι :

$$Q_T = |W_{T(ολ)}| = 37,5 \text{ J}.$$

Εναλλακτική απάντηση

Η θερμική ενέργεια («θερμότητα») που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον μέσω του έργου της τριβής είναι ίση με την ελάττωση της κινητικής ενέργειας του σώματος :

$$Q_T = K_{αρχ} - K_{τελ} = \frac{1}{2}m(v_o^2 - v^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (100 - 25) \text{ J} \Rightarrow Q_T = 37,5 \text{ J}.$$

Σχόλια :

- 1) Η έννοια του συντελεστή οριακής στατικής τριβής και ο νόμος της οριακής στατικής τριβής δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, επομένως το ερώτημα Δ₂ είναι εκτός ύλης.
- 2) Η διατύπωση «η θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον» δεν είναι ακριβής.
Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «η θερμική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον μέσω του έργου της τριβής».

64. (12992)

Ο διάδρομος του σχήματος είναι ακλόνητος και πολύ μεγάλου μήκους.

Το καμπυλόγραμμο τμήμα του AB είναι λείο, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα του είναι τραχύ. Η υψομετρική διαφορά των σημείων A και B είναι $h = 5 \text{ m}$.

Σώμα ελευθερώνεται από το σημείο A και κινείται μένοντας διαρκώς σε επαφή με τον διάδρομο.

Το σώμα με το οριζόντιο τμήμα του διαδρόμου παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ολ} = 0,5$.

Δ1. Να υπολογίσετε:

Δ1.1. το μέτρο της ταχύτητας v_B του σώματος όταν διέρχεται από το σημείο B.

Μονάδες 6

Δ1.2. το μέτρο της μέγιστης μετατόπισης Δx του σώματος στο οριζόντιο τμήμα του διαδρόμου.

Μονάδες 6

Δ1.3. το χρονικό διάστημα της κίνησης του σώματος στο οριζόντιο τμήμα του διαδρόμου.

Μονάδες 6

Δ2. Να συγκρίνετε τη μεταβολή της ταχύτητας του σώματος κατά την κίνησή του στο καμπυλόγραμμο τμήμα του διαδρόμου με την αντίστοιχη στο ευθύγραμμο.

Μονάδες 7

Η επιτάχυνση της βαρύτητας να θεωρηθεί σταθερή, με μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

Δ1)

Δ1.1)

Στη διάρκεια της κίνησης στο καμπυλόγραμμο τμήμα AB, παράγει έργο μόνο το βάρος $\vec{W}$ (η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο γιατί είναι συνεχώς κάθετη στις στοιχειώδεις μετατοπίσεις).

➤ Επομένως η Μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο τμήμα του διαδρόμου και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ :

$$K_A + U_A = K_B + U_B \Leftrightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 \Leftrightarrow v_B^2 = 2gh \Leftrightarrow v_B = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

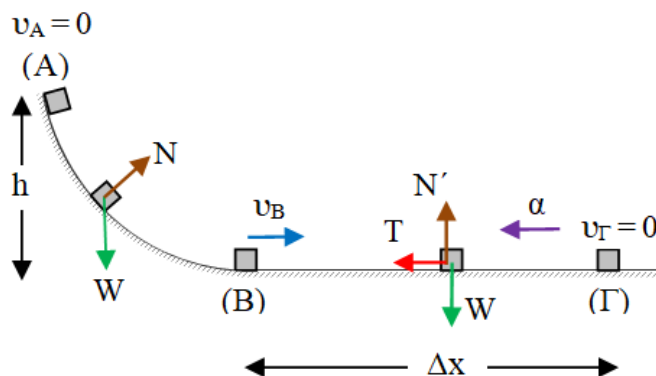
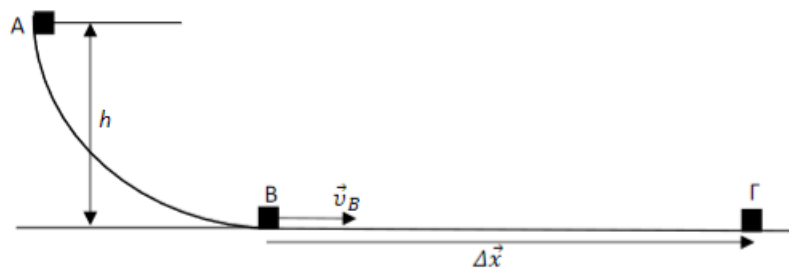
$$v_B = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_B = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της v_B

➤ Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σώματος στο καμπυλόγραμμο τμήμα (A → B) :

$$K_B - K_A = W_W \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = mgh \Leftrightarrow v_B^2 = 2gh \Leftrightarrow v_B = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_B = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Δ1.2)

Στο οριζόντιο τμήμα ΒΓ

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' = W \Rightarrow N' = mg.$ (1)

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N' \xrightarrow{(1)} T = \mu mg.$ (2)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $B \rightarrow \Gamma$:

$$W_T = K_\Gamma - K_B \Leftrightarrow -T(\Delta x) = 0 - \frac{1}{2}mv_B^2 \xrightarrow{(2)} \mu mg(\Delta x) = \frac{1}{2}mv_B^2 \Leftrightarrow \Delta x = \frac{v_B^2}{2\mu g} \Rightarrow$$

$$\Delta x = \frac{100}{2 \cdot 0,5 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 10 \text{ m}.$$

Δ1.3)

Στο οριζόντιο τμήμα ΒΓ

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική φορά της ταχύτητας) :

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow -T = ma \xrightarrow{(2)} -\mu mg = ma \Leftrightarrow a = -\mu g \Rightarrow a = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζω τη χρονική διάρκεια της κίνησης :

$$v_\Gamma = v_B + a(\Delta t_2) \xrightarrow{v_\Gamma = 0} 0 = v_B + a(\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v_B}{a} \Rightarrow \Delta t_2 = 2 \text{ s}.$$

Δ2)

Η μεταβολή της ταχύτητας στο καμπυλόγραμμο τμήμα ΑΒ, είναι :

$$\Delta \vec{v}_1 = \vec{v}_B - \vec{v}_A \xrightarrow{v_A = 0} \Delta \vec{v}_1 = \vec{v}_B. \quad (3)$$

Η μεταβολή της ταχύτητας στο οριζόντιο τμήμα ΒΓ, είναι :

$$\Delta \vec{v}_2 = \vec{v}_\Gamma - \vec{v}_B \xrightarrow{v_\Gamma = 0} \Delta \vec{v}_2 = -\vec{v}_B. \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow \Delta \vec{v}_1 = -\Delta \vec{v}_2.$$

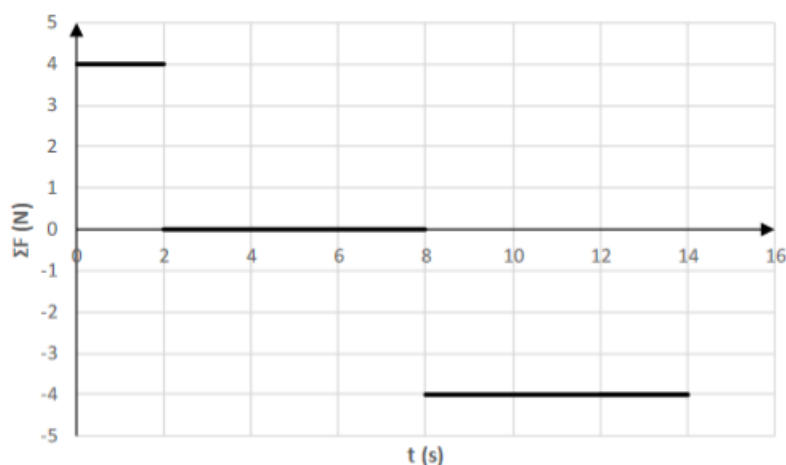
Αλγεβρικά : $\Delta v_1 = -\Delta v_2.$

[Για τα μέτρα των μεταβολών της ταχύτητας ισχύει : $|\Delta v_1| = |\Delta v_2|$].

Σχόλιο :

Η εκφώνηση δεν διευκρινίζει στο ερώτημα Δ2 αν ζητείται η διανυσματική μεταβολή της ταχύτητας, η αλγεβρική μεταβολή της ταχύτητας ή το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας.

65. (12993) Σημειακό αντικείμενο μάζας $m = 1 \text{ Kg}$ είναι ακίνητο σε οριζόντιο, ακλόνητο, μεγάλου μήκους διάδρομο, στη θέση $x_0 = 0$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το σημειακό αντικείμενο δέχεται την επίδραση οριζόντιας συνισταμένης δύναμης, που μεταβάλλεται με το χρόνο όπως στο διάγραμμα που ακολουθεί:



Δ1. Να υπολογίσετε:

Δ1.1. την ταχύτητα v_1 και τη θέση x_1 του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Μονάδες 4

Δ1.2. την ταχύτητα v_2 και τη θέση x_2 του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$.

Μονάδες 4

Δ1.3. την ταχύτητα v_3 και τη θέση x_3 του σώματος τη χρονική στιγμή $t_3 = 14 \text{ s}$.

Μονάδες 4

Δ1.4. την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 14 \text{ s}$.

Μονάδες 4

Δ1.5. το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 14 \text{ s}$.

Δ2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις:

Δ2.1. ταχύτητας - χρόνου ($v - t$) και

Μονάδες 4

Δ2.2. θέσης - χρόνου ($x - t$)

Μονάδες 5

από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 14 \text{ s}$.

Απάντηση

Δ1)

Δ1.1)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$:

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma F_1}{m} = \frac{4 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ είναι: $v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$ είναι:

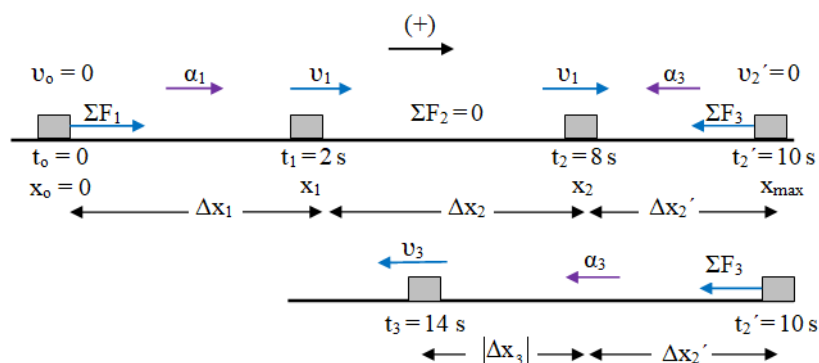
$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 8 \text{ m}.$$

Η τιμή της θέσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ είναι: $x_1 = x_0 + \Delta x_1 \Rightarrow x_1 = \Delta x_1 = 8 \text{ m}$.

Δ1.2)

Κατά τη χρονική διάρκεια $2 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$, ισχύει: $\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$.

Επομένως, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.



Η ταχύτητα είναι σταθερή, άρα τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$ έχει τιμή : $v_2 = v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $2 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$ είναι :

$$\Delta x_2 = v_1(\Delta t_2) = \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(6 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_2 = 48 \text{ m}.$$

Η τιμή της θέσης τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$ είναι : $x_2 = x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow x_2 = 56 \text{ m}$.

Δ1.3)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $8 \text{ s} \rightarrow 14 \text{ s}$:

$$\alpha_3 = \frac{\Sigma F_3}{m} = \frac{-4 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_3 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου v_1 .

Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_3 = 14 \text{ s}$, είναι :

$$v_3 = v_1 + \alpha_3(\Delta t_3) = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6 \text{ s}) \Rightarrow v_3 = -16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $8 \text{ s} \rightarrow 14 \text{ s}$ είναι :

$$\Delta x_3 = v_1(\Delta t_3) + \frac{1}{2}\alpha_3(\Delta t_3)^2 = \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(6 \text{ s}) + \frac{1}{2}\left(-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(36 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_3 = -24 \text{ m}.$$

Η τιμή της θέσης τη χρονική στιγμή $t_3 = 14 \text{ s}$ είναι : $x_3 = x_2 + \Delta x_3 \Rightarrow x_3 = 32 \text{ m}$.

Δ1.4)

Υπολογίζω τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 14 \text{ s}$:

$$\Delta K = K_3 - K_0 = \frac{1}{2}m(v_3^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (256 - 0) \text{ J} \Rightarrow \Delta K = 128 \text{ J}.$$

Δ1.5)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 14 \text{ s}$:

$$\Sigma W = \Delta K \Rightarrow \Sigma W = 128 \text{ J}.$$

Δ2)

Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται τη χρονική στιγμή t_2' . Ισχύει :

$$v_2' = v_1 + \alpha_3(\Delta t_2') \xrightarrow{v_2'=0} \Delta t_2' = -\frac{v_1}{\alpha_3} \Rightarrow \Delta t_2' = 2 \text{ s}.$$

Η χρονική στιγμή μηδενισμού της ταχύτητας, είναι : $t_2' = t_2 + \Delta t_2' = 8 \text{ s} + 2 \text{ s} \Rightarrow t_2' = 10 \text{ s}$.

Στη χρονική διάρκεια $8 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$, η τιμή της μετατόπισης είναι :

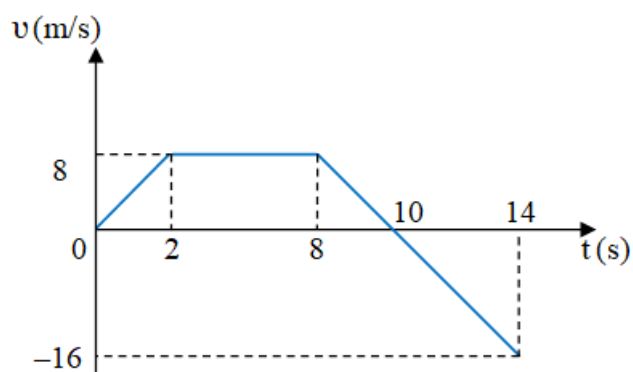
$$\Delta x_2' = v_1(\Delta t_2') + \frac{1}{2}\alpha_3(\Delta t_2')^2 = \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2 \text{ s}) + \frac{1}{2}\left(-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_2' = 8 \text{ m}.$$

Μετά τη χρονική στιγμή $t_2' = 10 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς την αρνητική φορά ($v < 0$).

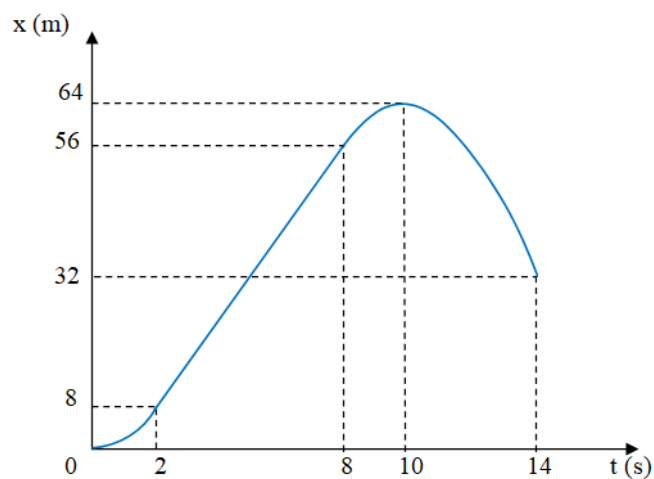
Άρα, τη χρονική στιγμή $t_2' = 10 \text{ s}$ το σώμα βρίσκεται στη μέγιστη απόσταση από την αρχική θέση :

$$x_{\text{max}} = x_2 + \Delta x_2' = 56 \text{ m} + 8 \text{ m} = 64 \text{ m}.$$

Τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου και θέσης – χρόνου φαίνονται στα επόμενα σχήματα.



διάγραμμα $v - t$



διάγραμμα $x - t$

Σχόλια :

- 1) Η άσκηση έχει υπερβολικά πολλά (7) ερωτήματα και δεν είναι δυνατό να απαντηθεί στη χρονική διάρκεια της δίσωσης εξέτασης.
- 2) Στο ερώτημα Δ.2.2 ζητείται το διάγραμμα $x - t$ σε συνδυασμό επιταχυνόμενης – ομαλής – επιβραδυνόμενης – επιταχυνόμενης κίνησης προς την αρνητική φορά, πράγμα ιδιαίτερα δύσκολο.

66. (13480) Ένας κύβος μάζας $m = 2 \text{ kg}$ είναι αρχικά ακίνητος πάνω σε οριζόντιο, ακλόνητο δάπεδο, με το οποίο εμφανίζει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$.

Τη στιγμή $t_0 = 0$ ασκούμε στον κύβο σταθερή δύναμη $\vec{F}$, μέτρου $F = 20 \text{ N}$, σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση όπως στο σχήμα.

Για τη γωνία φ δίνονται : $\eta\mu\varphi = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$.

Η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

4.1. Αν δίνεται ότι ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής κύβου-δαπέδου, είναι ίσος με τον αντίστοιχο συντελεστή τριβής ολίσθησης, να δείξετε ότι ο κύβος αρχίζει να κινείται τη στιγμή $t_0 = 0$ και ότι δεν χάνει την επαφή του με το οριζόντιο δάπεδο.

Μονάδες 6

Να υπολογίσετε:

4.2. την ενέργεια που μεταφέρθηκε από τον άνθρωπο στον κύβο, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$, από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή που αυτή καταργήθηκε.

Μονάδες 6

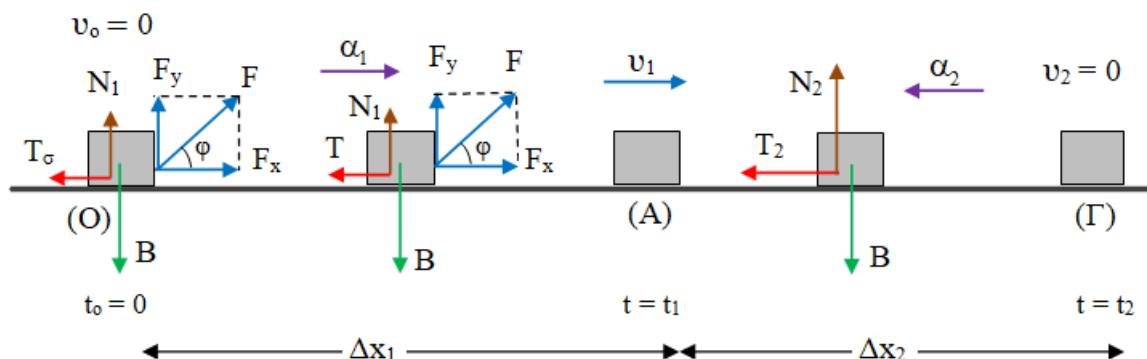
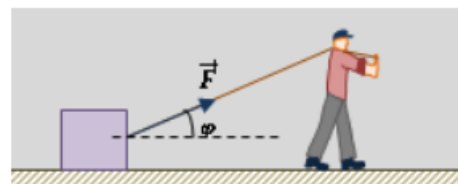
4.3. το ποσοστό της ενέργειας που μεταφέρθηκε στον κύβο, το οποίο μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια εξαιτίας των τριβών, από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή που καταργήθηκε η δύναμη.

Μονάδες 6

4.4. τη συνολική μετατόπιση του κύβου πάνω στο δάπεδο, από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι αυτός να σταματήσει.

Μονάδες 7

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι δυνάμεις που οφείλονται στον ατμοσφαιρικό αέρα αγνοούνται.



Απάντηση

4.1)

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ και υπολογίζω τα μέτρα τους.

$$F_x = F \sigma\upsilon\nu\varphi = 20 \cdot 0,8 = 16 \text{ N}.$$

$$F_y = F \eta\mu\varphi = 20 \cdot 0,6 = 12 \text{ N}.$$

Το βάρος του κύβου έχει μέτρο : $B = mg = 20 \text{ N}$.

Αφού $F_y < B$, ο κύβος δεν χάνει την επαφή με το δάπεδο.

Στον άξονα y ο κύβος ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N + F_y - B = 0 \Leftrightarrow N = mg - F_y \Rightarrow N = 20 \text{ N} - 12 \text{ N} \Rightarrow N = 8 \text{ N}.$$

Αρχικά ο κύβος είναι ακίνητος στη θέση O .

Υπολογίζω το μέτρο της οριακής στατικής τριβής : $T_{op} = \mu_{op} N = 0,5 \cdot 8 \text{ N} \Rightarrow T_{op} = 4 \text{ N}$.

Αφού $F_x > T_{op}$, ο κύβος θα αρχίσει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

4.2)

Υπολογίζω το μέτρο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N = 0,5 \cdot 8 = 4 \text{ N}$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$:

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F_x - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F_x - T}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(16 - 4) \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης του κύβου μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 12 \text{ m}.$$

Η ενέργεια που μεταφέρθηκε από τον άνθρωπο στον κύβο στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$, είναι ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}$: $W_F = F_x(\Delta x_1) = (16 \text{ N})(12 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 192 \text{ J}$.

4.3)

Το έργο της τριβής ολίσθησης στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$ είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_1) = -(4 \text{ N})(12 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -48 \text{ J}.$$

Η θερμική ενέργεια εξαιτίας των τριβών είναι : $Q_T = |W_T| = 48 \text{ J}$.

Το ποσοστό της προσφερόμενης ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια μέχρι τη χρονική

$$\text{στιγμή } t_1 = 2 \text{ s είναι : } \Pi(\%) = \frac{Q_T}{W_F} \cdot 100\% = \frac{48 \text{ J}}{192 \text{ J}} \cdot 100\% = 25\%.$$

4.4)

Για $t \geq t_1$

Από την ισορροπία στον άξονα y υπολογίζω τη νέα τιμή του μέτρου της κάθετης δύναμης $\vec{N}'$:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' - B = 0 \Rightarrow N' = B = 20 \text{ N}.$$

Υπολογίζω τη νέα τιμή του μέτρου της τριβής ολίσθησης : $T' = \mu N' = 0,5 \cdot 20 \text{ N} \Rightarrow T' = 10 \text{ N}$.

➤ Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη χρονική στιγμή που ξεκινά ο κύβος μέχρι να σταματήσει :

$$W_F + W_T + W_{T'} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow W_F + W_T - T'(\Delta x_2) = 0 \Leftrightarrow \Delta x_2 = \frac{W_F + W_T}{T'} \Rightarrow$$

$$\Delta x_2 = \frac{(192 - 48) \text{ J}}{10 \text{ N}} \Rightarrow \Delta x_2 = 14,4 \text{ m}.$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του Δx_2

➤ Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, η ταχύτητα έχει μέτρο : $v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι να σταματήσει :

$$W_{T'} = K_2 - K_1 \Leftrightarrow -T'(\Delta x_2) = 0 - \frac{1}{2} m v_1^2 \Leftrightarrow \Delta x_2 = \frac{m v_1^2}{2 T'} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{2 \cdot 144 \text{ J}}{2 \cdot 10 \text{ N}} \Rightarrow \Delta x_2 = 14,4 \text{ m}.$$

Άρα : $\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 12 \text{ m} + 14,4 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 26,4 \text{ m}$.

Σχόλιο : Η έννοια του συντελεστή οριακής στατικής τριβής δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο.

67. (13481) Ένα κιβώτιο μάζας $m = 50 \text{ kg}$, είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, δύο παιδιά ο Πάνος και ο Μάριος, αρχίζουν να σπρώχνουν μαζί το κιβώτιο. Τα δύο παιδιά ασκούν στο κιβώτιο σταθερές, οριζόντιες και ομόρροπες δυνάμεις που συμβολίζονται ως $\vec{F}_\Pi$ και $\vec{F}_M$ αντίστοιχα. Η δύναμη που ασκεί ο Πάνος έχει μέτρο $F_\Pi = 200 \text{ N}$ και η δύναμη που ασκεί ο Μάριος έχει μέτρο $F_M = 50 \text{ N}$.



Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου είναι σταθερός $\mu = 0,4$. Τη χρονική στιγμή t_1 , κατά την οποία το κιβώτιο έχει μετατοπιστεί κατά 2 m από την αρχική του θέση πάνω στο δάπεδο, ο Μάριος σταματά να σπρώχνει, ενώ ο Πάνος συνεχίζει.

4.1. Να κάνετε ένα απλό σκίτσο για να δείξετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, εφαρμόζοντάς τες στο κέντρο του. Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής ολίσθησης που δέχεται το κιβώτιο από το δάπεδο.

Μονάδες 6 (2+4)

4.2. Να προσδιορίσετε την επιτάχυνση του κιβωτίου όταν το σπρώχνουν και τα δύο παιδιά μαζί και να βρείτε ποια είναι η στιγμή t_1 κατά την οποία ο Μάριος σταματά να σπρώχνει το κιβώτιο.

Μονάδες 7 (3+4)

4.3. Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα του μέτρου της ταχύτητας του κιβωτίου σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$, θεωρώντας ότι ο Πάνος εξακολουθεί να ασκεί τη σταθερή δύναμη $\vec{F}_\Pi$ ως τότε.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε την ενέργεια που προσέφερε ο Μάριος στο κιβώτιο.

Μονάδες 6

Αντιστάσεις αέρα αγνοούνται και το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

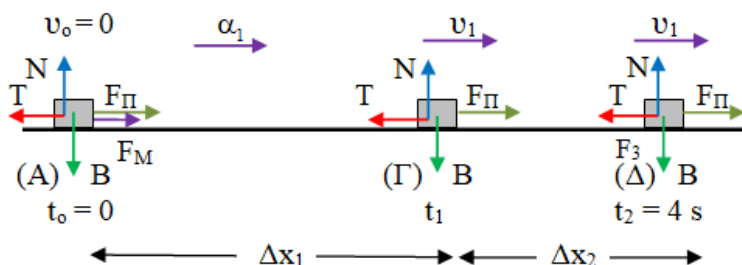
4.1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 500 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 0,4 \cdot 500 \text{ N} \Rightarrow T = 200 \text{ N}.$$



4.2)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $0 - t_1$:

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F_\Pi + F_M - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F_\Pi + F_M - T}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(200 + 50 - 200) \text{ N}}{50 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Από την εξίσωση της μετατόπισης Δx_1 υπολογίζω τη χρονική διάρκεια t_1 της κίνησης :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2(\Delta x_1)}{\alpha_1} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(\Delta x_1)}{\alpha_1}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{1}} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}.$$

Επομένως, ο Μάριος σταμάτησε να σπρώχνει το κιβώτιο τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

4.3)

0 s → 2 s :

Το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση :

$$v = \alpha_1 t \Rightarrow v = t. \text{ (S.I.)}$$

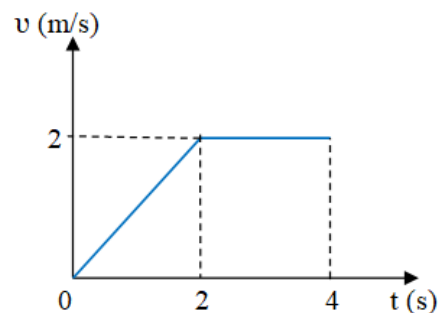
Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ το κιβώτιο έχει ταχύτητα μέτρου

$$v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2 s → 4 s :

$$\Sigma F_x = F_{\Pi} - T = 200 \text{ N} - 200 \text{ N} \Rightarrow \Sigma F_x = 0.$$

Αφού η συνισταμένη είναι μηδενική, η ταχύτητα του κιβωτίου παραμένει σταθερή : $v = v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

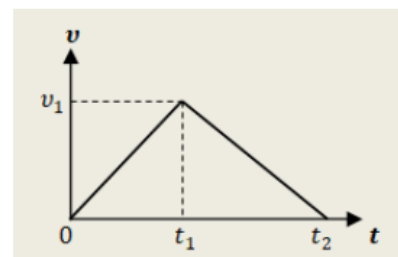


4.4)

Η ενέργεια που πρόσφερε ο Μάριος στο κιβώτιο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, είναι ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}_M$:

$$W_{FM} = F_M(\Delta x_1) = (50 \text{ N})(2 \text{ m}) \Rightarrow W_{FM} = 100 \text{ J}.$$

68. (13563) Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε ακλόνητο οριζόντιο δάπεδο. Μεταξύ σώματος και δαπέδου δημιουργείται τριβή, με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και αμέσως αυτό αρχίζει να κινείται, ολισθαίνοντας πάνω στο δάπεδο.



Τη χρονική στιγμή t_1 , η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται και το σώμα, αφού επιβραδύνεται λόγω τριβής, σταματάει τη στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$, έχοντας ως τότε διανύσει συνολικό διάστημα $S = 18 \text{ m}$.

Στο διάγραμμα αποδίδεται το μέτρο της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, από την έναρξη της κίνησής του μέχρι να σταματήσει.

Να υπολογίσετε:

4.1. Το μέτρο v_1 της ταχύτητας του σώματος, τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία καταργήθηκε η δύναμη $\vec{F}$.

Μονάδες 6

4.2. Τη χρονική στιγμή t_1 .

Μονάδες 7

4.3. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

4.4. Την ενέργεια που προσφέρθηκε στο κιβώτιο.

Μονάδες 6

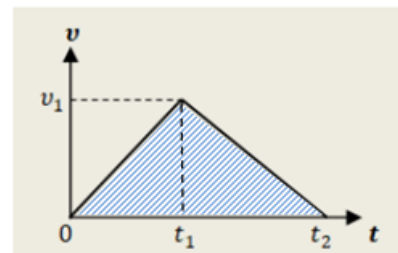
Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι μπορείτε να αγνοήσετε την αντίσταση του ατμοσφαιρικού αέρα.

Απάντηση

4.1)

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σώμα είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τριγώνου στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου, άρα :

$$s = E_{\text{τριγ}} \Leftrightarrow s = \frac{v_1 t_2}{2} \Leftrightarrow v_1 = \frac{2s}{t_2} \Rightarrow v_1 = \frac{2 \cdot 18 \text{ m}}{6 \text{ s}} \Rightarrow v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

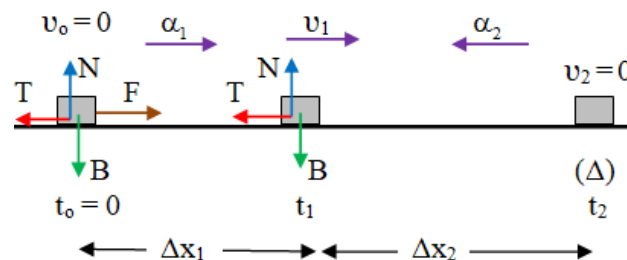
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 20 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 0,2 \cdot 20 \text{ N} \Rightarrow T = 4 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$:

$$\Sigma F_x = m a_2 \Leftrightarrow -T = m a_2 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{T}{m} \Rightarrow a_2 = -\frac{4 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow a_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



➤ Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης στη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$:

$$a_2 = \frac{0 - v_1}{t_2 - t_1} \Leftrightarrow t_2 - t_1 = -\frac{v_1}{a_2} \Leftrightarrow t_1 = t_2 + \frac{v_1}{a_2} \Rightarrow t_1 = \left(6 - \frac{6}{2}\right) \text{ s} \Rightarrow t_1 = 3 \text{ s}.$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της χρονικής στιγμής t_1

➤ Κατά τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ($v > 0, a < 0$).

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζω τη χρονική διάρκεια Δt_2 μέχρι να ακινητοποιηθεί :

$$v_2 = v_1 + \alpha_2 (\Delta t_2) \xrightarrow{v_2=0} 0 = v_1 + \alpha_2 (\Delta t_2) \Leftrightarrow \alpha_2 (\Delta t_2) = -v_1 \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v_1}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 3 \text{ s}.$$

$$\text{Ισχύει: } \Delta t_2 = t_2 - t_1 \Rightarrow t_1 = t_2 - \Delta t_2 = 6 \text{ s} - 3 \text{ s} \Rightarrow t_1 = 3 \text{ s}.$$

4.3)

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης στη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_1 = 3 \text{ s}$:

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m \alpha_1 \Leftrightarrow F - T = m \alpha_1 \Leftrightarrow F = T + m \alpha_1 \Rightarrow F = 4 \text{ N} + (2 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F = 8 \text{ N}.$$

4.4)

0 s $\rightarrow$ 3 s : Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Υπολογίζω το διάστημα s_1 που διάνυσε το κινητό :

$$s_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (9 \text{ s}^2) \Rightarrow s_1 = 9 \text{ m}.$$

Στη χρονική διάρκεια 0 s $\rightarrow$ 3 s προσφέρεται ενέργεια στο κιβώτιο μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$.

Το έργο της δύναμης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_F = F \cdot s_1 = (8 \text{ N})(9 \text{ m}) = 72 \text{ J}.$$

Εναλλακτική απάντηση για τα ερωτήματα 4.3, 4.4

4.3)

3 s $\rightarrow$ 6 s :

Στη χρονική διάρκεια $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ το σώμα διανύει διάστημα :

$$s_2 = v_1 (\Delta t_2) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t_2)^2 \Rightarrow s_2 = \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (3 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (9 \text{ s}^2) \Rightarrow s_2 = 9 \text{ m}.$$

0 s $\rightarrow$ 3 s : Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

$$s_1 = s - s_2 = 18 \text{ m} - 9 \text{ m} \Rightarrow s_1 = 9 \text{ m}.$$

$$\text{Ισχύει: } s_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2s_1}{t_1^2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2 \cdot 9 \text{ m}}{9 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m \alpha_1 \Leftrightarrow F - T = m \alpha_1 \Leftrightarrow F = T + m \alpha_1 \Rightarrow F = 4 \text{ N} + (2 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F = 8 \text{ N}.$$

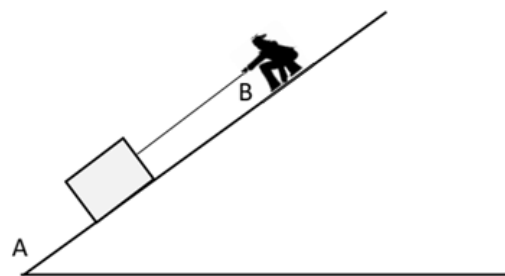
4.4)

Στη χρονική διάρκεια 0 s $\rightarrow$ 3 s προσφέρεται ενέργεια στο κιβώτιο μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$.

Το έργο της δύναμης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_F = F \cdot s_1 = (8 \text{ N})(9 \text{ m}) = 72 \text{ J}.$$

69. (13579) Η αγαπημένη γυμναστική του Μιχάλη είναι να τραβάει και να μετακινεί κιβώτια σε κεκλιμένο επίπεδο. Ο Μιχάλης στέκεται ακίνητος στο κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος και μετακινεί ένα αρχικά ακίνητο κιβώτιο μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος στο οποίο κατά την μετακίνηση ασκεί δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου και ίδιας διεύθυνσης με αυτήν του επιπέδου.



Το κεκλιμένο επίπεδο είναι γωνίας φ (δίνεται ότι $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$) και η απόσταση που διανύει το κιβώτιο από τη βάση του επιπέδου (A) μέχρι το σημείο (B) είναι 10 m.

Δίνεται ότι το κιβώτιο έχει μάζα 10 kg, η χρονική διάρκεια της μετακίνησης του από το σημείο (A) μέχρι το σημείο (B) είναι 10 s και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Αν το κεκλιμένο επίπεδο θεωρηθεί λείο:

4.1) Σχεδιάστε και υπολογίστε τα μέτρα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο κιβώτιο σε ένα τυχαίο σημείο της διαδρομής (ανάμεσα στα A, B)

4.2) Υπολογίστε το έργο του βάρους για τη διαδρομή A-B.

4.3) Τι ταχύτητα θα έχει το κιβώτιο στη θέση B;

Στην πραγματικότητα όμως το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο, οπότε στο κιβώτιο κατά την κίνησή του ασκείται και η τριβή ολίσθησης.

4.4) Αν η δύναμη της τριβής ολίσθησης είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, για ποια τιμή του συντελεστή τριβής μεταξύ δαπέδου και κιβωτίου ο Μιχάλης χρειάζεται 50% περισσότερη ενέργεια (από την ενέργεια που χρειάστηκε για να μετακινήσει το ίδιο κιβώτιο σε λείο επίπεδο) για να μετατοπίσει το κιβώτιο στον ίδιο χρόνο από το σημείο A στο B;

(Μονάδες 7+5+6+7)

Απάντηση

4.1)

Ο Μιχάλης ασκεί στο νήμα δύναμη $\vec{F}$ και δέχεται από το νήμα δύναμη $\vec{T}_1$.

Από το νόμο δράσης – αντίδρασης : $T_1 = F$. (1)

Στο κιβώτιο ασκούνται τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την επιφάνεια και η τάση του νήματος $\vec{T}_2$.

Αφού η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, άρα : $T_2 = T_1 \xrightarrow{(1)}$

$T_2 = F$. (2)

Το μέτρο του βάρους είναι : $B = mg = 100 \text{ N}$.

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες και υπολογίζω τα μέτρα τους :

$B_x = B\eta\mu\varphi = 60 \text{ N}$,

$B_y = B\sigma\upsilon\nu\varphi = 80 \text{ N}$.

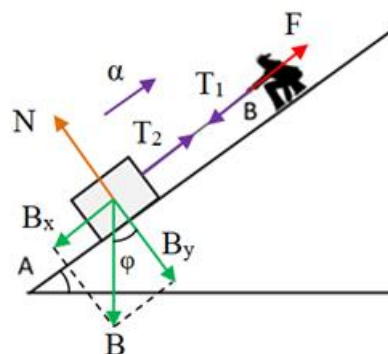
Στον άξονα y το κιβώτιο ισορροπεί, άρα : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B_y = 80 \text{ N}$.

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$). Ισχύει :

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2(\Delta x)}{t^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{100 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow T_2 - B_x = m\alpha \Leftrightarrow T_2 = B_x + m\alpha \Rightarrow T_2 = (60 + 2) \text{ N} \Rightarrow T_2 = 62 \text{ N}.$$



4.2)

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του κιβωτίου από το Α στο Β, παράγει έργο η συνιστώσα του βάρους $\vec{B}_x$. Το έργο του βάρους για μετατόπιση μέτρου $\Delta x = 10 \text{ m}$, είναι :

$$W_B = B_x(\Delta x)\cos 180^\circ = (60 \text{ N})(10 \text{ m})(-1) \Rightarrow W_B = -600 \text{ J}.$$

4.3)

Η ταχύτητα του κιβωτίου τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$, έχει μέτρο :

$$v = at = \left(0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10 \text{ s}) \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4)

Η ενέργεια που δαπανά ο Μιχάλης για τη μετακίνηση του κιβωτίου είναι ίση με το έργο της δύναμης που ασκεί στο κιβώτιο μέσω του νήματος.

στο λείο επίπεδο : Το έργο της δύναμης $\vec{T}_2$ για μετατόπιση μέτρου Δx , είναι : $W_{T_2} = T_2(\Delta x)$. (3)

στο μη λείο επίπεδο :

Αν F' είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο Μιχάλης στο νήμα, τότε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στο κιβώτιο είναι : $T_2' = F'$.

Το έργο της δύναμης $\vec{T}_2'$ για μετατόπιση μέτρου Δx , είναι : $W_{T_2'} = T_2'(\Delta x)$. (4)

Ισχύει :

$$W_{T_2'} = 150\% \cdot W_{T_2} \xrightarrow{(3), (4)} T_2'(\Delta x) = 150\% \cdot T_2(\Delta x) \Leftrightarrow T_2' = 150\% \cdot T_2 \Rightarrow T_2' = 1,5 \cdot 62 \text{ N} = 93 \text{ N}.$$

Αφού το κιβώτιο διανύει την ίδια απόσταση στον ίδιο χρόνο, άρα έχει την ίδια επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x, υπολογίζω το μέτρο της τριβής ολίσθησης :

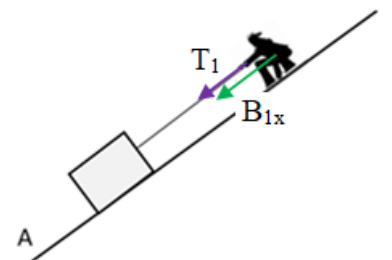
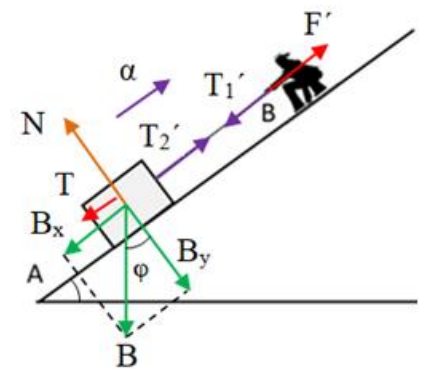
$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow T_2' - B_x - T = m\alpha \Leftrightarrow T = T_2' - B_x - m\alpha \Rightarrow T = (93 - 60 - 2) \text{ N} \Rightarrow T = 31 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{31 \text{ N}}{80 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,3875.$$

Σχόλιο :

Αν το επίπεδο ήταν λείο, τότε ο Μιχάλης θα δεχόταν στον άξονα x δύο δυνάμεις με φορά προς τα κάτω, με αποτέλεσμα να ολισθαίνει. Για να μπορεί να έλκει το κιβώτιο προς τα πάνω θα έπρεπε να στηρίζεται σε κάποιο σταθερό υποστήριγμα, ώστε να δέχεται δύναμη με φορά προς τα πάνω.



70. (13581) Σώμα Α μάζας $m_A = 0,5 \text{ Kg}$ βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = 10 \text{ m/s}$, από ύψος $h_0 = 5 \text{ m}$. Την ίδια χρονική στιγμή, από ύψος H ίσο με το μέγιστο της τροχιάς του Α, βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω σώμα Β, μάζας $m_B = 2 \text{ Kg}$, με αρχική ταχύτητα μέτρου επίσης v_0 , σε μια παράλληλη τροχιά με αυτή του Α.

Θεωρήστε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Το επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια είναι το επίπεδο του εδάφους.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

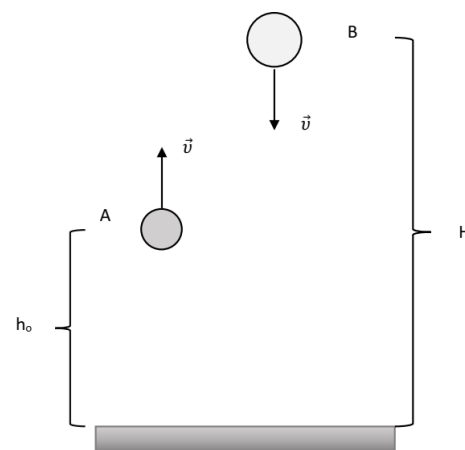
Να υπολογίσετε:

4.1) Το ύψος H (από το έδαφος) από το οποίο βάλλεται το σώμα Β.

4.2) Τη χρονική στιγμή όπου οι αποστάσεις των δύο σωμάτων από το έδαφος θα είναι ίσες.

4.3) Το ύψος από την επιφάνεια του εδάφους στο οποίο θα βρίσκεται το κάθε σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0,25 \text{ s}$.

4.4) Τη μηχανική ενέργεια κάθε σώματος.



(Μονάδες 6+7+6+6)

Απάντηση

4.1)

Κάθε σώμα κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Για το σώμα Α εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για τη θέση εκτόξευσης Ο και την ανώτατη θέση Δ :

$$K_A + U_A = K_O + U_O \Leftrightarrow 0 + m_A g H = \frac{1}{2} m_A v_0^2 + m_A g h_0 \Leftrightarrow H = \frac{v_0^2}{2g} + h_0 \Rightarrow$$

$$H = \left(\frac{10^2}{2 \cdot 10} + 5 \right) \text{ m} \Rightarrow H = 10 \text{ m}.$$

4.2)

Σώμα Α : Στη διάρκεια της ανόδου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου g . Μετά από χρόνο t , το μέτρο της μετατόπισής του από το σημείο βολής είναι :

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

Σώμα Β : Εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου g . Μετά από χρόνο t θα διανύσει διάστημα :

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

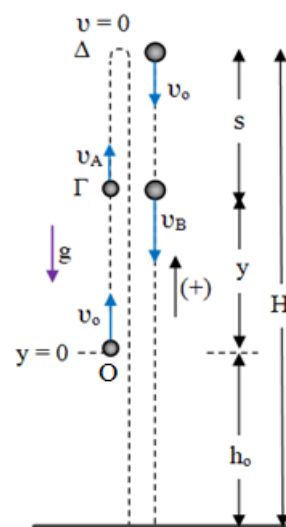
Τη στιγμή που συναντώνται ισχύει : $y + s = H - h_0 \xrightarrow{(1),(2)}$

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = H - h_0 \Leftrightarrow 2v_0 t = H - h_0 \Leftrightarrow t = \frac{H - h_0}{2v_0} \Rightarrow$$

$$t = \frac{5}{20} \text{ s} \Rightarrow t = 0,25 \text{ s}.$$

4.3)

$$(1) \Rightarrow y = \left(10 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{16} \right) \text{ m} \Rightarrow y = \frac{35}{16} \text{ m}.$$



Η απόσταση κάθε σώματος από το έδαφος είναι :

$$h = h_0 + y = 5\text{ m} + \frac{35}{16}\text{ m} \Rightarrow h = \frac{115}{16}\text{ m} \quad \text{ή} \quad h \simeq 7,19\text{ m}.$$

4.4)

Η μηχανική ενέργεια κάθε σώματος είναι σταθερή.

Υπολογίζω τη μηχανική ενέργεια κάθε σώματος στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του.

Σώμα Α : $E_{\text{μηχ}(A)} = U_A + K_A = m_A g H = 0,5 \cdot 10 \cdot 10\text{ J} \Rightarrow E_{\text{μηχ}(A)} = 50\text{ J}.$

Σώμα Β : $E_{\text{μηχ}(B)} = U_B + K_B = m_B g H + \frac{1}{2} m_B v_o^2 = 2 \cdot 10 \cdot 10\text{ J} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100\text{ J} \Rightarrow E_{\text{μηχ}(B)} = 300\text{ J}.$

71. (13582) Σώμα μάζας $m_A = 3 \text{ Kg}$ ολισθαίνει σε κατακόρυφο τοίχο με τον οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής $\mu = \frac{1}{3}$. Στο σώμα ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}$ που το διάνυσμα της σχηματίζει γωνία ϕ με τον κατακόρυφο άξονα κίνησης. Θεωρήστε την αντίσταση του αέρα αμελητέα. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι : $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\eta\mu\phi = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\phi = 0,8$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \phi) = -0,8$.

Να υπολογίσετε:

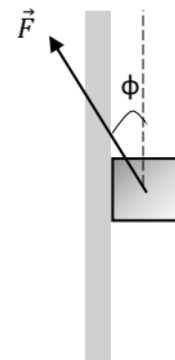
4.1) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ώστε το σώμα να κινείται προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα.

4.2) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ώστε το σώμα να κινείται προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση μέτρου 2 m/s^2 .

4.3) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ και τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος για μετατόπιση 5 m , αν το σώμα κινείται όπως περιγράφει το ερώτημα 4.2.

Αν το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ μηδενιζόταν,

4.4) υπολογίστε τη μεταβολή της κινητικής και της μηχανικής ενέργειας του σώματος για μετατόπιση 10 m .



(Μονάδες 6+6+7+6)

Απάντηση

4.1)

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, στο σώμα ασκούνται : το βάρος $\vec{B}$, η δύναμη $\vec{N}$ κάθετη στη επιφάνεια (οριζόντια) και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (κατακόρυφη).

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε κάθετες συνιστώσες. Ισχύουν οι σχέσεις :

$$F_x = F \sigma\upsilon\nu\phi \quad (1)$$

$$F_y = F \eta\mu\phi \quad (2)$$

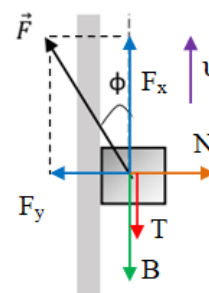
Όταν το σώμα κινείται προς τα πάνω, η τριβή ολίσθησης έχει φορά προς τα κάτω.

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει : } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = F_y \xrightarrow{(2)} N = F \eta\mu\phi. \quad (3)$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T = \mu N \xrightarrow{(3)} T = \mu F \eta\mu\phi. \quad (4)$$

$$\text{Στον άξονα } x \text{ ισχύει : } \Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_x - B - T = 0 \xrightarrow{(1),(4)} F \sigma\upsilon\nu\phi - \mu F \eta\mu\phi = B \Leftrightarrow$$

$$F(\sigma\upsilon\nu\phi - \mu\eta\mu\phi) = mg \Leftrightarrow F = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\phi - \mu\eta\mu\phi} \Rightarrow F = \frac{30 \text{ N}}{0,8 - \frac{1}{3} \cdot 0,6} \Rightarrow F = 50 \text{ N}.$$



4.2)

Όταν το σώμα κινείται προς τα κάτω, η τριβή ολίσθησης έχει φορά προς τα πάνω.

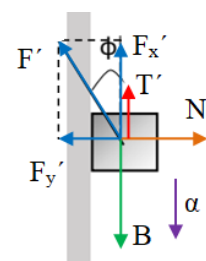
Έστω ότι η δύναμη έχει μέτρο F' και η τριβή έχει μέτρο T' .

Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow B - F'_x - T' = m\alpha \xrightarrow{(1),(4)} mg - F' \sigma\upsilon\nu\phi - \mu F' \eta\mu\phi = m\alpha \Leftrightarrow$$

$$F'(\sigma\upsilon\nu\phi + \mu\eta\mu\phi) = mg - m\alpha \Leftrightarrow F' = \frac{m(g - \alpha)}{\sigma\upsilon\nu\phi + \mu\eta\mu\phi} \Rightarrow F' = \frac{3(10 - 2)}{0,8 + \frac{1}{3} \cdot 0,6} \text{ N} \Rightarrow$$

$$F' = 24 \text{ N}.$$



4.3)

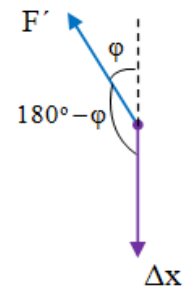
Όταν το σώμα κατέβει κατά Δx , το έργο της δύναμης $\vec{F}'$ είναι :

$$W_{F'} = -F_X'(\Delta x) = -F' \sin \phi (\Delta x) = -(24 \text{ N}) \cdot 0,8 \cdot (5 \text{ m}) \Rightarrow W_{F'} = -96 \text{ J}.$$

$$[\text{Εναλλακτικά : } W_{F'} = F'(\Delta x) \sin(180^\circ - \phi) = (24 \text{ N})(5 \text{ m})(-0,8) \Rightarrow W_{F'} = -96 \text{ J}].$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται με εφαρμογή του ΘΜΚΕ :

$$\Delta K = W_{\text{ολ}} = \Sigma F_X (\Delta x) = m a (\Delta x) \Rightarrow \Delta K = 3 \cdot 2 \cdot 5 \text{ J} \Rightarrow \Delta K = 30 \text{ J}.$$



4.4)

Όταν μηδενιστεί το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$, τότε μηδενίζεται και το μέτρο της κάθετης δύναμης : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N'' = 0$.

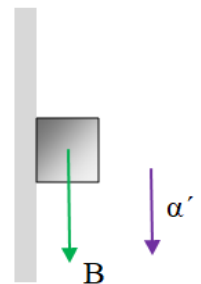
Επομένως μηδενίζεται και το μέτρο της τριβής ολίσθησης : $T' = \mu N'' = 0$.

Άρα το σώμα πέφτει με την επίδραση μόνο του βάρους, δηλαδή εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται με εφαρμογή του ΘΜΚΕ :

$$\Delta K = W_B = mg(\Delta x) = (30 \text{ N})(10 \text{ m}) \Rightarrow \Delta K = 300 \text{ J}.$$

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή (αφού το βάρος είναι συντηρητική δύναμη), άρα η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας είναι : $\Delta E_{\text{μηχ}} = 0$.



72. (13583) Δύο κύβοι από διαφορετικά υλικά και με μάζες $m_A = 2 \text{ Kg}$ και $m_B = 8 \text{ Kg}$ ολισθαίνουν προς την ίδια κατεύθυνση, κινούμενοι παράλληλα, πάνω στο ίδιο (απείρου μήκους) επίπεδο.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ (θέση $x_0 = 0$) βρίσκονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

Ο Α έχει ταχύτητα $v_{A0} = 30 \text{ m/s}$ και ο Β έχει

$v_{B0} = 10 \text{ m/s}$. Ο Α κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a_A = 5 \text{ m/s}^2$, που έχει φορά αντίθετη από την αρχική ταχύτητά του, ενώ ο σώμα Β κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$, ο συντελεστής τριβής μεταξύ δαπέδου και σωμάτων είναι $\mu = 0,4$ και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

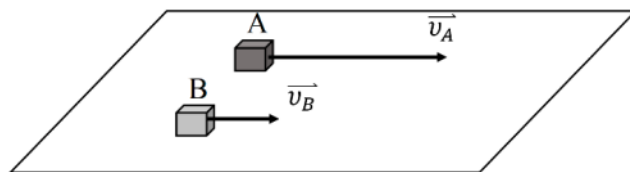
4.1) Το μέτρο της συνολικής δύναμης που ασκείται σε κάθε σώμα.

4.2) Μετά από πόσο χρονικό διάστημα θα ξαναβρεθούν τα σώματα πάλι το ένα δίπλα στο άλλο (θέση x_1);

4.3) Ποιες δύο χρονικές στιγμές t_1, t_2 τα σώματα θα έχουν την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα;

4.4) Το έργο της τριβής για το κάθε σώμα κατά το χρονικό διάστημα από t_0 έως t_2 .

(Μονάδες 5+6+7+7)



Απάντηση

4.1)

Σώμα Α

Η επιτάχυνση $\vec{a}_A$ έχει φορά προς τα αριστερά, άρα και η συνισταμένη δύναμη $\vec{\Sigma F}_A$ έχει φορά προς τα αριστερά.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική φορά της επιτάχυνσης) :

$$\Sigma F_{A,x} = m_A a_A = (2 \text{ Kg}) \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Sigma F_{A,x} = 10 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει : $\Sigma F_{A,y} = 0$.

Για το μέτρο της συνισταμένης δύναμης, ισχύει : $\Sigma F_A = \Sigma F_{A,x} = 10 \text{ N}$.

Σώμα Β

Αφού $\vec{v}_B = \text{σταθερή}$, άρα : $\Sigma F_B = 0$. (1ος νόμος του Newton)

4.2)

Το σώμα Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η θέση του σε κάθε χρονική στιγμή προσδιορίζεται από την εξίσωση :

$$x_A = v_{A,0} t - \frac{1}{2} a_A t^2 \Rightarrow x_A = 30t - 2,5t^2. \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

Το σώμα Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Η θέση του σε κάθε χρονική στιγμή προσδιορίζεται από την εξίσωση :

$$x_B = v_B t \Rightarrow x_B = 10t. \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

Για τη χρονική στιγμή που θα βρεθούν το ένα δίπλα στο άλλο, ισχύει :

$$x_A = x_B \xrightarrow{(1),(2)} 30t - 2,5t^2 = 10t \Leftrightarrow 20t - 2,5t^2 = 0 \Leftrightarrow 2,5t(8-t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0, \text{ απορρίπτεται} \\ t=8\text{s}, \text{ δεκτή} \end{cases}$$

4.3)

Η ταχύτητα του Α υπολογίζεται από τη σχέση : $v_A = v_{A,0} - a_A t \Rightarrow v_A = 30 - 5t. \text{ (S.I.)} \quad (3)$

Η ταχύτητα του B είναι σταθερή : $v_B = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (4)

Για τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 κατά τις οποίες οι ταχύτητες έχουν ίσα μέτρα, ισχύει :

$$|v_A| = |v_B| \Rightarrow \begin{cases} v_A = v_B \xrightarrow{(3),(4)} 30 - 5t_1 = 10 \Leftrightarrow 5t_1 = 20 \Leftrightarrow t_1 = 4 \text{ s.} \\ \text{ή} \\ v_A = -v_B \xrightarrow{(3),(4)} 30 - 5t_2 = -10 \Leftrightarrow 5t_2 = 40 \Leftrightarrow t_2 = 8 \text{ s.} \end{cases}$$

4.4)

Σώμα A

$$\Sigma F_{A,y} = 0 \Leftrightarrow N_A = W_A = m_A g \Rightarrow N_A = 20 \text{ N.}$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_A = \mu N_A = 0,4 \cdot 20 \text{ N} \Rightarrow T_A = 8 \text{ N.}$$

Το σώμα κινείται προς τα δεξιά, άρα η τριβή ολίσθησης έχει φορά προς τα αριστερά.

Αφού $\Sigma F_{A,x} > T_A$, στο σώμα A ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}_A$ με φορά προς τα αριστερά.

$$\text{Στον άξονα x ισχύει : } \Sigma F_{A,x} = F_A + T_A \Leftrightarrow F_A = \Sigma F_{A,x} - T_A \Rightarrow F_A = 10 \text{ N} - 8 \text{ N} \Rightarrow F_A = 2 \text{ N.}$$

Η ταχύτητα του A μηδενίζεται τη χρονική στιγμή t_A .

Ισχύει :

$$v_A = 30 - 5t \xrightarrow{v_A = 0} 5t_A = 30 \Leftrightarrow t_A = 6 \text{ s.}$$

Στη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_A = 6 \text{ s}$ το σώμα A μετακινείται προς τα δεξιά κατά

$$\Delta x_A = 30t_A - 2,5t_A^2 = (30 \cdot 6 - 2,5 \cdot 6^2) \text{ m} \Rightarrow \Delta x_A = 90 \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή $t_A = 6 \text{ s}$, το σώμα σταματά και η δύναμη $\vec{F}_A$ τείνει να το κινήσει προς τα αριστερά, με αποτέλεσμα να εμφανιστεί στατική τριβή $\vec{T}_s$ με φορά προς τα δεξιά.

Για να κινηθεί το σώμα, πρέπει να ισχύει : $F_A > T_{op(A)}$.

Όμως : $F_A = 2 \text{ N}$, $T_{op(A)} \geq T_A \Rightarrow T_{op(A)} \geq 8 \text{ N}$.

Αφού $F_A < T_{op(A)}$, το σώμα A θα παραμείνει ακίνητο και δεν θα κινηθεί προς τα αριστερά.

Το έργο της τριβής ολίσθησης στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$ είναι :

$$W_{T_A} = -T_A (\Delta x_A) = -(8 \text{ N})(90 \text{ m}) \Rightarrow W_{T_A} = -720 \text{ J.}$$

Σώμα B

$$\Sigma F_{B,y} = 0 \Leftrightarrow N_B = W_B = m_B g \Rightarrow N_B = 80 \text{ N.}$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

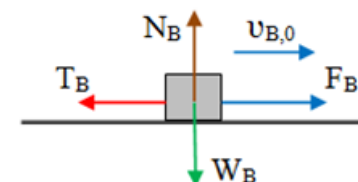
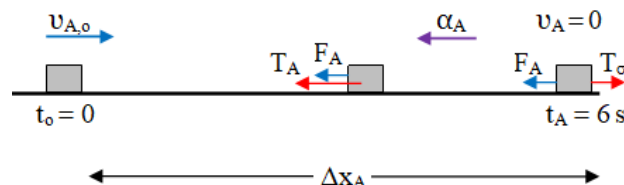
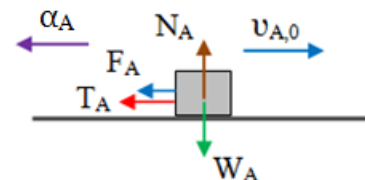
$$T_B = \mu N_B = 0,4 \cdot 80 \text{ N} \Rightarrow T_B = 32 \text{ N.}$$

Στη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_2 = 8 \text{ s}$, το μέτρο της μετατόπισης του B είναι :

$$\Delta x_B = 10 \cdot 8 \text{ m} = 80 \text{ m.}$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$ είναι :

$$W_{T_B} = -T_B (\Delta x_B) = -(32 \text{ N})(80 \text{ m}) \Rightarrow W_{T_B} = -2560 \text{ J.}$$



Σχόλια για το ερώτημα 4.4

Στο χρονικό διάστημα που το σώμα Α κινείται προς τα δεξιά, ασκείται σε αυτό οριζόντια δύναμη $\vec{F}_A$ με φορά προς τα αριστερά και μέτρο $F_A = \Sigma F_{A,x} - T_A = (10 - 8) \text{ N} = 2 \text{ N}$.

Αν υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή $t_A = 6 \text{ s}$ που σταματά το σώμα, συνεχίζει να δέχεται οριζόντια δύναμη με φορά προς τα αριστερά, θα εμφανιστεί στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$ με φορά προς τα δεξιά.

Αν δεχθούμε ότι η οριακή στατική τριβή έχει ίδια τιμή με την τριβή ολίσθησης [$T_{op(A)} = T_A = 8 \text{ N}$], τότε για να κινηθεί το σώμα προς τα αριστερά με επιτάχυνση μέτρου $\alpha_A = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ πρέπει το μέτρο της

οριζόντιας δύναμης να αποκτήσει «ακαριαία» την τιμή $F_A' = 18 \text{ N}$, ώστε να ισχύει :

$$\Sigma F_A = F_A' - T_A = (18 - 8) \text{ N} = 10 \text{ N}.$$

Δηλαδή, για να δεχθούμε ότι το σώμα θα επιταχυνθεί προς τα αριστερά, πρέπει να κάνουμε αυθαίρετες υποθέσεις που δεν βασίζονται σε δεδομένα της εκφώνησης.

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι στο σώμα Α ασκείται οριζόντια δύναμη, αν η δύναμη αυτή είναι συνεχώς σταθερή ή αν το μέτρο της αυξάνεται «ακαριαία» τη στιγμή που σταματά, ώστε το σώμα να κινηθεί προς τα αριστερά με επιτάχυνση μέτρου $\alpha_A = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Επίσης η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η οριακή στατική τριβή έχει ίδια τιμή με την τριβή ολίσθησης.

- Η εκφώνηση έπρεπε να ζητά το έργο της τριβής ολίσθησης μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ ή μέχρι τη χρονική στιγμή $t_A = 6 \text{ s}$ που σταματά το σώμα Α.

73. (13584) Δύο κύβοι από διαφορετικά υλικά και με μάζες $m_A = 2 \text{ Kg}$ και $m_B = 4 \text{ Kg}$ ολισθαίνουν προς την ίδια κατεύθυνση, κινούμενοι παράλληλα, πάνω σε ένα απείρου μήκους επίπεδο.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ (θέση $x_0 = 0$) βρίσκονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

Ο κύβος A έχει ταχύτητα $v_{A0} = 20 \text{ m/s}$ και ο B έχει

ταχύτητα $v_{B0} = 10 \text{ m/s}$. Και στους δύο ασκούνται κατάλληλες σταθερές δυνάμεις F_1 και F_2 προς τη φορά της κίνησης τους, με αποτέλεσμα και οι δύο να κινούνται με σταθερή ταχύτητα.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$, ο συντελεστής τριβής μεταξύ δαπέδου και κύβων είναι $\mu_A = 0,4$ και $\mu_B = 0,1$ αντίστοιχα, η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

4.1) Τις δυνάμεις F_1 και F_2 που ασκούνται στους δύο κύβους.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ παύουν να ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2 .

4.2) Διερευνήστε αν οι δύο κύβοι σε κάποια επόμενη χρονική στιγμή θα έχουν ίσες ταχύτητες.

Αν ναι, σε ποια; Αν όχι, αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4.3) Ποιο το έργο της τριβής ολίσθησης για κάθε κύβο μέχρι τη χρονική στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες;

Μελετήστε τώρα την περίπτωση όπου τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ οι κύβοι δέχονται δυνάμεις $F_1 = 8 \text{ N}$ και $F_2 = 4 \text{ N}$ που έχουν κατεύθυνση αντίθετη από την αρχική ταχύτητα των κύβων.

Οι δυνάμεις αυτές παραμένουν σταθερές για όλο το διάστημα της κίνησης των κύβων.

4.4) Υπάρχουν χρονικές στιγμές κατά τις οποίες οι κύβοι θα ξαναβρεθούν ο ένας δίπλα στον άλλο;

Αν ναι ποιες είναι αυτές, αν όχι γιατί;

(Μονάδες 5+7+6+7)

Απάντηση

4.1)

Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton σε κάθε άξονα και το νόμο της τριβής ολίσθησης, για κάθε κύβο.

Κύβος A

$$\Sigma F_{A,y} = 0 \Leftrightarrow N_A = W_A = m_A g \Rightarrow N_A = 20 \text{ N}.$$

$$T_A = \mu N_A = 0,4 \cdot 20 \text{ N} \Rightarrow T_A = 8 \text{ N}.$$

$$\Sigma F_{A,x} = 0 \Leftrightarrow F_1 = T_A \Rightarrow F_1 = 8 \text{ N}.$$

Κύβος B

$$\Sigma F_{B,y} = 0 \Leftrightarrow N_B = W_B = m_B g \Rightarrow N_B = 40 \text{ N}.$$

$$T_B = \mu N_B = 0,1 \cdot 40 \text{ N} \Rightarrow T_B = 4 \text{ N}.$$

$$\Sigma F_{B,x} = 0 \Leftrightarrow F_2 = T_B \Rightarrow F_2 = 4 \text{ N}.$$

4.2)

Εξαιτίας της τριβής ο κύβος A αποκτά επιβράδυνση μέτρου

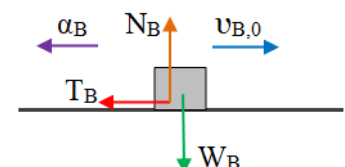
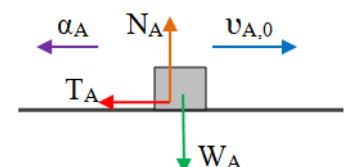
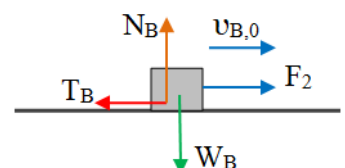
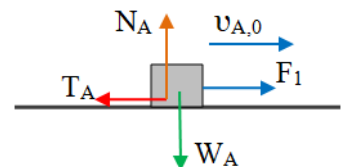
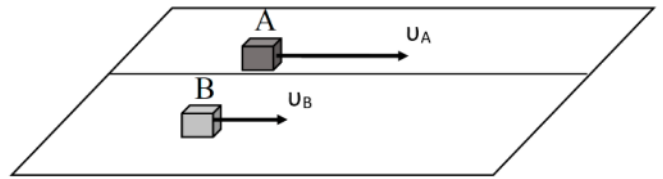
$$\alpha_A = \frac{T_A}{m_A} = \frac{8 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_A = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t ($t \leq 5 \text{ s}$) υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v_A = v_{A,0} - \alpha_A t \Rightarrow v_A = 20 - 4t. \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Εξαιτίας της τριβής ο κύβος B αποκτά επιβράδυνση μέτρου

$$\alpha_B = \frac{T_B}{m_B} = \frac{4 \text{ N}}{4 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_B = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t ($t \leq 10$ s) υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v_B = v_{B,0} - \alpha_B t \Rightarrow v_B = 10 - t. \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

Αρχικά η ταχύτητα του A έχει μεγαλύτερο μέτρο από του B. Επειδή όμως το μέτρο της ταχύτητας του A μειώνεται πιο γρήγορα από του B, σε κάποια στιγμή t_1 οι δύο ταχύτητες να γίνουν ίσες.

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t_1 \text{ ισχύει : } v_A = v_B \xrightarrow{(1),(2)} 20 - 4t_1 = 10 - t_1 \Leftrightarrow 3t_1 = 10 \Leftrightarrow t_1 = \frac{10}{3} \text{ s.}$$

Επομένως, οι ταχύτητες των δύο κύβων θα γίνουν ίσες τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{10}{3}$ s.

4.3)

Το μέτρο της μετατόπισης του A μέχρι τη στιγμή t_1 , είναι :

$$\Delta x_A = v_{A,0} t_1 - \frac{1}{2} \alpha_A t_1^2 = \left[20 \cdot \frac{10}{3} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{10}{3} \right)^2 \right] \text{ m} = \left[\frac{200}{3} - \frac{200}{9} \right] \text{ m} \Rightarrow \Delta x_A = \frac{400}{9} \text{ m.}$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι :

$$W_{T_A} = -T_A (\Delta x_A) = -(8 \text{ N}) \left(\frac{400}{9} \text{ m} \right) \Rightarrow W_{T_A} = -\frac{3200}{9} \text{ J.}$$

Το μέτρο της μετατόπισης του B μέχρι τη στιγμή t_1 , είναι :

$$\Delta x_B = v_{B,0} t_1 - \frac{1}{2} \alpha_B t_1^2 = \left[10 \cdot \frac{10}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{10}{3} \right)^2 \right] \text{ m} = \left[\frac{100}{3} - \frac{50}{9} \right] \text{ m} \Rightarrow \Delta x_B = \frac{250}{9} \text{ m.}$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι :

$$W_{T_B} = -T_B (\Delta x_B) = -(4 \text{ N}) \left(\frac{250}{9} \text{ m} \right) \Rightarrow W_{T_B} = -\frac{1000}{9} \text{ J.}$$

4.4)

Ο κύβος A αποκτά επιβράδυνση μέτρου

$$\alpha_A' = \frac{F_1 + T_A}{m_A} = \frac{16 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_A' = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η ταχύτητα του κύβου A θα μηδενιστεί τη χρονική στιγμή

$$t_A' = \frac{v_{A,0}}{\alpha_A'} = \frac{20}{8} \text{ s} \Rightarrow t_A' = 2,5 \text{ s.}$$

Το μέτρο της μετατόπισης του κύβου A μέχρι να σταματήσει, είναι :

$$\Delta x_A' = v_{A,0} t_A' - \frac{1}{2} \alpha_A' t_A'^2 \Rightarrow \Delta x_A' = 20 \cdot 2,5 - 4 \cdot 2,5^2 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_A' = 25 \text{ m.}$$

Αφού ακινητοποιηθεί ο κύβος, αντιστρέφεται η φορά της τριβής.

Επειδή $F_1 = T_A \leq T_{A(\text{op})}$, ο κύβος A θα παραμείνει ακίνητος.

Ο κύβος B αποκτά επιβράδυνση μέτρου

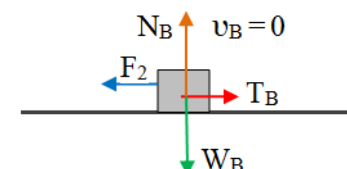
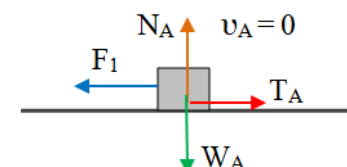
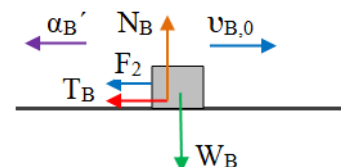
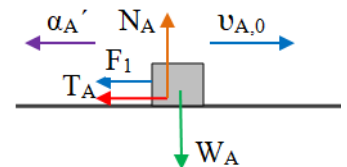
$$\alpha_B' = \frac{F_2 + T_B}{m_B} = \frac{8 \text{ N}}{4 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_B' = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η ταχύτητα του κύβου B θα μηδενιστεί τη χρονική στιγμή

$$t_B' = \frac{v_{B,0}}{\alpha_B'} = \frac{10}{2} \text{ s} \Rightarrow t_B' = 5 \text{ s.}$$

Το μέτρο της μετατόπισης του κύβου B μέχρι να σταματήσει, είναι :

$$\Delta x_B' = v_{B,0} t_B' - \frac{1}{2} \alpha_B' t_B'^2 \Rightarrow \Delta x_B' = 10 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_B' = 25 \text{ m.}$$



Αφού ακινητοποιηθεί ο κύβος, αντιστρέφεται η φορά της τριβής.

Επειδή $F_2 = T_B \leq T_{B(ορ)}$, ο κύβος B θα παραμείνει ακίνητος.

Επομένως, από τη χρονική στιγμή $t_B = 5 \text{ s}$ και μετά οι κύβοι θα είναι ακίνητοι, ο ένας δίπλα στον άλλο και σε απόσταση 25 m από τη θέση $x_0 = 0$.

Επισημάνση

Στο ερώτημα 4.4, εξισώνοντας τις μετατοπίσεις $\Delta x_A, \Delta x_B$ προκύπτει $t = \frac{10}{3} \text{ s}$, η οποία δεν είναι αποδεκτή λύση γιατί ο κύβος A έχει σταματήσει πριν τη χρονική στιγμή $t = \frac{10}{3} \text{ s}$.

Σχόλια :

Στο ερώτημα 4.4, η εκφώνηση

- 1) δεν διευκρινίζει αν οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ συνεχίζουν να ασκούνται και αφού σταματήσουν να κινούνται οι κύβοι.
- 2) δεν αναφέρει ότι το μέτρο της οριακής στατικής τριβής είναι τουλάχιστον ίσο με το μέτρο της τριβής ολίσθησης ($T_{ορ} \geq T$) για κάθε κύβο, ώστε να μπορεί να απαντήσει ο/η εξεταζόμενος/η με βεβαιότητα ότι αφού σταματήσουν οι κύβοι δεν θα κινηθούν προς τα αριστερά.

Το ερώτημα 4.4 είναι ιδιαίτερα περίπλοκο και δεν ενδείκνυται για θέμα εξετάσεων της Α΄ Λυκείου.

74. (13587) Σώμα μάζας $m = 10 \text{ kg}$ εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_0 = 10 \text{ m/s}$ από θέση O οριζοντίου δαπέδου. Το σώμα ολισθαίνει, ενώ δέχεται οριζόντια δύναμη $F = 50 \text{ N}$ με κατεύθυνση ίδια με την αρχική του ταχύτητα. Τη χρονική στιγμή $t_A = 10 \text{ s}$ το σώμα βρίσκεται στη θέση A και έχει πλέον αποκτήσει ταχύτητα μέτρου 30 m/s .

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

4.1) Ασκείται στο σώμα τριβή κατά τη διάρκεια της κίνησής του; Αν ναι, να υπολογίσετε το μέτρο της, αν όχι να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4.2) Σε ποια θέση, έστω B , βρίσκεται το σώμα όταν κινείται με ταχύτητα διπλάσια σε μέτρο από την αρχική;

4.3) Αν, μετά τη χρονική στιγμή $t_A = 10 \text{ s}$, το σώμα συνεχίζει την ολίσθησή του σε διαφορετικό δάπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,6$, σε ποια θέση θα ακινητοποιηθεί;

4.4) Σχεδιάστε το διάγραμμα του μέτρου της ταχύτητας του σώματος ως προς το χρόνο για όλο το διάστημα της κίνησής του.

(Μονάδες 6+6+7+6)

Απάντηση

4.1

$$t_0 = 0 \rightarrow t_A = 10 \text{ s}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος είναι :

$$\alpha_1 = \frac{v_A - v_0}{t_A - t_0} = \frac{(30 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(10 - 0) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 = (10 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Sigma F_x = 20 \text{ N}.$$

Αφού $\Sigma F_x < F$, άρα υπάρχει τριβή.

$$\text{Ισχύει : } \Sigma F_x = F - T \Leftrightarrow T = F - \Sigma F_x \Rightarrow T = 50 \text{ N} - 20 \text{ N} \Rightarrow T = 30 \text{ N}.$$

4.2

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση O μέχρι τη θέση B (όπου $v_B = 2v_0$) :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow (\Sigma F_x)(\Delta x_B) = \frac{1}{2} m(v_B^2 - v_0^2) \Leftrightarrow \Delta x_B = \frac{m(v_B^2 - v_0^2)}{2(\Sigma F_x)} \Rightarrow \Delta x_B = \frac{10 \cdot (400 - 100)}{2 \cdot 20} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Delta x_B = 75 \text{ m}.$$

Άρα, το μέτρο της ταχύτητας θα διπλασιαστεί σε απόσταση 75 m από το O .

4.3)

$$t_0 = 0 \rightarrow t_A = 10 \text{ s}$$

Υπολογίζω το μέτρο της μετατόπισης :

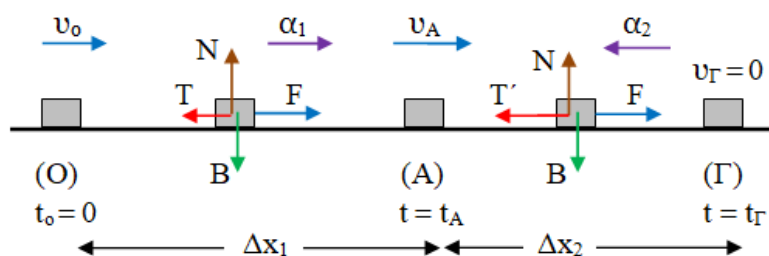
$$\Delta x_1 = v_0 t_A + \frac{1}{2} \alpha_1 t_A^2 = \left(10 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100 \right) \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 200 \text{ m}.$$

$$t_A = 10 \text{ s} \rightarrow t_r (v_r = 0)$$

Το σώμα κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με διαφορετικό συντελεστή τριβής.

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει : } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg \Rightarrow N = 100 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T' = \mu N = 0,6 \cdot 100 \text{ N} \Rightarrow T' = 60 \text{ N}.$$



Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (με θετική φορά της ταχύτητας) :

$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow F - T' = m\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{F - T'}{m} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{(50 - 60) \text{ N}}{10 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζω τη χρονική διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης :

$$v = v_A + \alpha_2(\Delta t_2) \xrightarrow{v_\Gamma = 0} \alpha_2(\Delta t_2) = -v_A \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v_A}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 30 \text{ s}.$$

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος σε αυτή τη χρονική διάρκεια είναι :

$$\Delta x_2 = v_A(\Delta t_2) + \frac{1}{2}\alpha_2(\Delta t_2)^2 = \left(30 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 900\right) \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 450 \text{ m}.$$

Το μέτρο της συνολικής μετατόπισης, είναι : $\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 200 \text{ m} + 450 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 650 \text{ m}.$

Άρα, το σώμα θα ακινητοποιηθεί στη θέση Γ, σε απόσταση 650 m από το Ο.

4.4)

Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται τη χρονική στιγμή

$$t_\Gamma = t_A + \Delta t_2 = 10 \text{ s} + 30 \text{ s} \Rightarrow t_\Gamma = 40 \text{ s}.$$

$$t_0 = 0 \rightarrow t_A = 10 \text{ s}$$

Η τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = v_0 + \alpha_1 t \Rightarrow v = 10 + 2t. \quad (\text{S.I.})$$

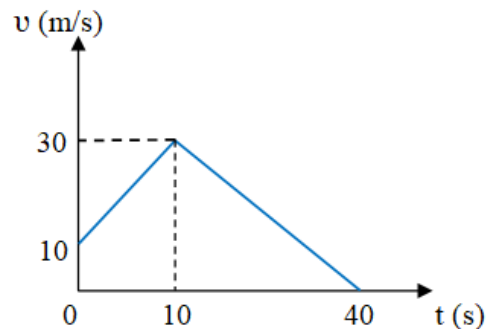
$$\text{Για } t = 10 \text{ s} \Rightarrow v_A = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$t_A = 10 \text{ s} \rightarrow t_\Gamma = 40 \text{ s}$$

Η τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = v_A + \alpha_2(t - t_A) \Rightarrow v = 30 - (t - 10) \quad \text{ή} \quad v = 40 - t. \quad (\text{S.I.})$$

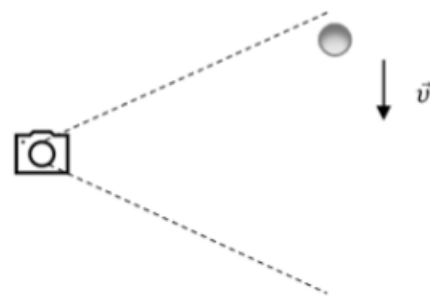
$$\text{Για } t = 40 \text{ s} \Rightarrow v = 0.$$



Σχόλιο :

Στα ερωτήματα 4.2, 4.4 **δεν μπορούν να υπολογιστούν** οι θέσεις x_B , x_Γ αφού δεν δίνεται η αρχική θέση x_0 .

75. (13588) Πειραματική διάταξη περιλαμβάνει μια σφαίρα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ που αφήνεται να πέσει από ύψος h (από το έδαφος), απέναντι από ακίνητη ψηφιακή φωτογραφική μηχανή που είναι προρυθμισμένη να παίρνει λήψεις ανά συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα $\Delta t = 0,1 \text{ s}$.



Στη συνέχεια μελετώντας τις φωτογραφίες μπορεί κανείς να υπολογίσει τα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με το φαινόμενο που εξελίχθηκε μπροστά από τη φωτ. μηχανή. Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1) Αν συγκρίνουμε την 1η φωτογραφία ($t = 0$, η στιγμή που αφήνεται η σφαίρα) και την 6η φωτογραφία μετράμε ότι η σφαίρα έχει μετατοπιστεί 1 m . Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε αν η σφαίρα κάνει ελεύθερη πτώση ή όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4.2) Αν θεωρήσουμε ότι όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι σταθερού μέτρου, να υπολογίσετε πόσο επιπλέον θα έχει μετατοπιστεί η σφαίρα στην 7η φωτογραφία.

4.3) Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα.

4.4) Αν η σφαίρα φτάνει στο έδαφος ακριβώς τη στιγμή που η φωτ. μηχανή βγάζει την 11η φωτογραφία, να υπολογίσετε την αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια της σφαίρας ως προς το έδαφος και την τελική κινητική της ενέργεια ακριβώς πριν ακουμπήσει στο έδαφος.

(Μονάδες 6+6+5+8)

Απάντηση

4.1)

Η χρονική διάρκεια κίνησης της σφαίρας από την 1η στην 6η θέση είναι :

$$\Delta t_5 = 5(\Delta t) = 5 \cdot 0,1 \text{ s} \Rightarrow \Delta t_5 = 0,5 \text{ s}.$$

Έστω ότι η σφαίρα έχει σταθερή επιτάχυνση μέτρου α .

Για το μέτρο της μετατόπισης από την 1η μέχρι την 6η θέση, ισχύει :

$$\Delta y_5 = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t_5)^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2(\Delta y_5)}{(\Delta t_5)^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{0,25 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Αφού $\alpha \neq g$, η σφαίρα δεν εκτελεί ελεύθερη πτώση.

4.2)

Τη χρονική στιγμή $t_5 = 0,5 \text{ s}$ η σφαίρα έχει ταχύτητα μέτρου

$$v_5 = \alpha t_5 = \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (0,5 \text{ s}) \Rightarrow v_5 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η μετατόπιση της σφαίρας από την 6η στην 7η θέση έχει μέτρο :

$$\Delta y = v_5 (\Delta t) + \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (0,1 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (0,01 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta y = 0,44 \text{ m}.$$

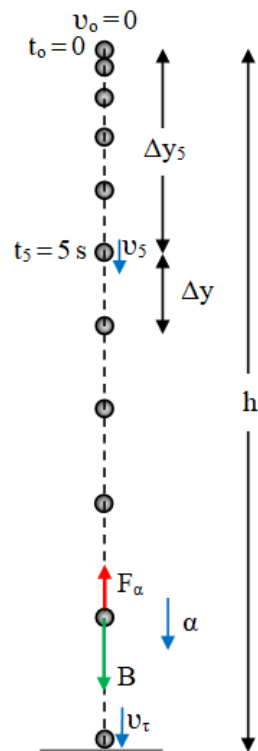
4.3)

Το βάρος της σφαίρας έχει μέτρο : $B = mg = 10 \text{ N}$.

Αφού η σφαίρα έχει επιτάχυνση μέτρου $\alpha < g$, άρα ασκείται σε αυτή και άλλη δύναμη αντίρροπη του βάρους. Η δύναμη αυτή είναι η αντίσταση του αέρα $\vec{F}_a$ (Η άνωση θεωρείται ασήμαντη και δεν λαμβάνεται υπ' όψη).

Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F_y = m\alpha \Leftrightarrow B - F_a = m\alpha \Leftrightarrow F_a = B - m\alpha \Rightarrow F_a = 10 \text{ N} - 8 \text{ N} \Rightarrow F_a = 2 \text{ N}.$$



4.4)

Η σφαίρα φτάνει στο έδαφος μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t_{10} = 10(\Delta t) = 1 \text{ s}$, έχοντας διανύσει απόσταση

$$h = \frac{1}{2} a (\Delta t_{10})^2 = \frac{1}{2} \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (1 \text{ s}^2) \Rightarrow h = 4 \text{ m}.$$

Η αρχική δυναμική ενέργεια της σφαίρας ως προς το έδαφος είναι :

$$U_{\text{αρχ}} = mgh = (1 \text{ kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ m}) \Rightarrow U_{\text{αρχ}} = 40 \text{ J}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση της σφαίρας από τη στιγμή που αφήνεται μέχρι να φτάσει στο έδαφος :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} = (B - F_a) \cdot h \Rightarrow K_{\text{τελ}} = (8 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 32 \text{ J}.$$

Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση **δεν αναφέρει ότι η επιτάχυνση της σφαίρας είναι σταθερή** στη διάρκεια της κίνησης.
Η αναφορά ότι «οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα έχουν σταθερό μέτρο» έπρεπε να γίνει πριν από το ερώτημα 4.1 και όχι στο ερώτημα 4.2.
- 2) Στο ερώτημα 4.2 έπρεπε να ζητά **τη μετατόπιση από την 6η στην 7η φωτογραφία.**

76. (13589) Τρεις σφαίρες πέφτουν κατακόρυφα προς το έδαφος. Η σφαίρα Α έχει μάζα $m_A = 1 \text{ kg}$ και βάλλεται με αρχική ταχύτητα $v_A = 10 \text{ m/s}$ από ύψος $h_A = 7,8 \text{ m}$.

Η Β έχει μάζα $m_B = 3 \text{ kg}$ και αφήνεται να πέσει από ύψος $h_B = 5 \text{ m}$, ενώ η Γ έχει $m_\Gamma = 1 \text{ kg}$ και αφήνεται από ύψος $h_\Gamma = h_B$ (όπως στο σχήμα). Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Δίνεται : $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1) Και οι τρεις σφαίρες ξεκινούν την κίνησή τους ταυτόχρονα, τη χρονική στιγμή $t = 0$.

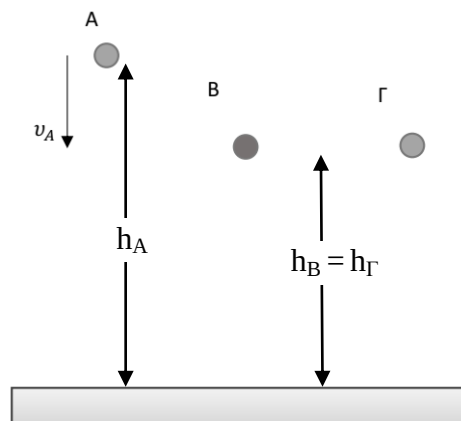
Ποια από τις τρεις σφαίρες θα φτάσει πρώτη στο έδαφος και σε πόσο χρόνο;

4.2) Θα βρεθούν οι τρεις σφαίρες στο ίδιο ύψος από το έδαφος την ίδια χρονική στιγμή; Ανά δύο ή και οι τρεις; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4.3) Να αιτιολογήσετε ποια από τις τρεις σφαίρες θα έχει τη μεγαλύτερη κινητική ενέργεια ακριβώς πριν ακουμπήσει στο έδαφος και να υπολογίσετε την τιμή της.

4.4) Χρησιμοποιώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, αυτό του εδάφους, να συγκρίνετε τις μηχανικές ενέργειες των τριών σφαιρών.

(Μονάδες 6+7+7+5)



Απάντηση

4.1)

Σφαίρα Α

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου v_A και επιτάχυνση μέτρου g .

Έστω t_A η χρονική διάρκεια μέχρι να φτάσει στο έδαφος. Ισχύει :

$$h_A = v_A t_A + \frac{1}{2} g t_A^2 \Rightarrow 7,8 = 10 t_A + 5 t_A^2 \Leftrightarrow 5 t_A^2 + 10 t_A - 7,8 = 0.$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-7,8) = 100 + 156 = 256.$$

$$t_A = \frac{-10 \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 5} = \frac{-10 \pm 16}{10} = \begin{cases} \frac{-10+16}{10} = \frac{6}{10} \text{ s} = 0,6 \text{ s} \\ \frac{-10-16}{10} = -\frac{26}{10} \text{ s} = -2,6 \text{ s}, \text{ απορρίπτεται.} \end{cases}$$

Άρα η σφαίρα Α θα φτάσει στο έδαφος μετά από χρόνο $t_A = 0,6 \text{ s}$.

Σφαίρα Β

Ελεύθερη πτώση από ύψος h_B . Αν t_B η χρονική διάρκεια μέχρι να φτάσει στο έδαφος, τότε :

$$h_B = \frac{1}{2} g t_B^2 \Leftrightarrow t_B^2 = \frac{2h_B}{g} \Leftrightarrow t_B = \sqrt{\frac{2h_B}{g}} \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} \text{ s} \Rightarrow t_B = 1 \text{ s}.$$

Σφαίρα Γ

Ελεύθερη πτώση από ύψος $h_\Gamma = h_B$, άρα θα φτάσει στο έδαφος μετά από χρόνο $t_\Gamma = t_B = 1 \text{ s}$.

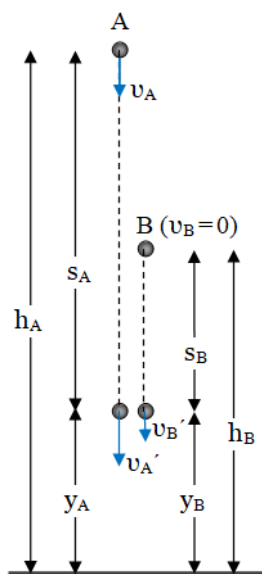
Επομένως, η σφαίρα Α θα φτάσει 1η στο έδαφος ενώ οι σφαίρες Β, Γ θα φτάσουν ταυτόχρονα.

4.2)

Η σφαίρα Α σε χρόνο t ($t \leq 0,6 \text{ s}$) θα διανύσει απόσταση: $s_A = v_A t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow s_A = 10t + 5t^2$. (S.I.) (1)

Τη χρονική στιγμή t η απόστασή της από το έδαφος είναι :

$$y_A = h_A - s_A \xrightarrow{(1)} y_A = 7,8 - 10t - 5t^2. \text{ (S.I.)} \quad (2)$$



Οι σφαίρες Β, Γ στον ίδιο χρόνο t θα διανύσουν απόσταση :

$$s_B = s_\Gamma = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow s_B = s_\Gamma = 5t^2. \quad (\text{S.I.}) \quad (3)$$

$$\text{Η απόστασή τους από το έδαφος είναι : } y_B = y_\Gamma = h_B - s_B \xrightarrow{(3)} y_B = y_\Gamma = 5 - 5t^2. \quad (\text{S.I.}) \quad (4)$$

$$\text{Έστω ότι ισχύει : } y_A = y_B \xrightarrow{(2),(4)} 7,8 - 10t - 5t^2 = 5 - 5t^2 \Leftrightarrow 10t = 2,8 \Leftrightarrow t = 0,28 \text{ s.}$$

Αφού $t < t_A < t_B = t_\Gamma$, άρα οι σφαίρες δεν έχουν φτάσει στο έδαφος και η λύση $t = 0,28 \text{ s}$ είναι δεκτή.

Επομένως οι τρεις σφαίρες θα βρεθούν στο ίδιο ύψος τη χρονική στιγμή $t = 0,28 \text{ s}$.

4.3)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για κάθε σφαίρα, μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Σφαίρα Α

$$K_A' - K_A = W_A \Leftrightarrow K_A' = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + m_A g h_A \Rightarrow K_A' = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 \cdot 7,8 \right) \text{ J} \Rightarrow K_A' = 128 \text{ J.}$$

Σφαίρα Β

$$K_B' - K_B = W_B \Leftrightarrow K_B' = 0 + m_B g h_B \Rightarrow K_B' = 3 \cdot 10 \cdot 5 \text{ J} \Rightarrow K_B' = 150 \text{ J.}$$

Σφαίρα Γ

$$K_\Gamma' - K_\Gamma = W_\Gamma \Leftrightarrow K_\Gamma' = 0 + m_\Gamma g h_\Gamma \Rightarrow K_\Gamma' = 1 \cdot 10 \cdot 5 \text{ J} \Rightarrow K_\Gamma' = 50 \text{ J.}$$

Επομένως, για τις κινητικές ενέργειες των σφαιρών τη στιγμή που φτάνουν στο έδαφος ισχύει :

$$K_B' > K_A' > K_\Gamma'.$$

4.4)

Η δυναμική ενέργεια κάθε σφαίρας στο έδαφος είναι μηδενική : $U_A' = U_B' = U_\Gamma' = 0$. Επομένως :

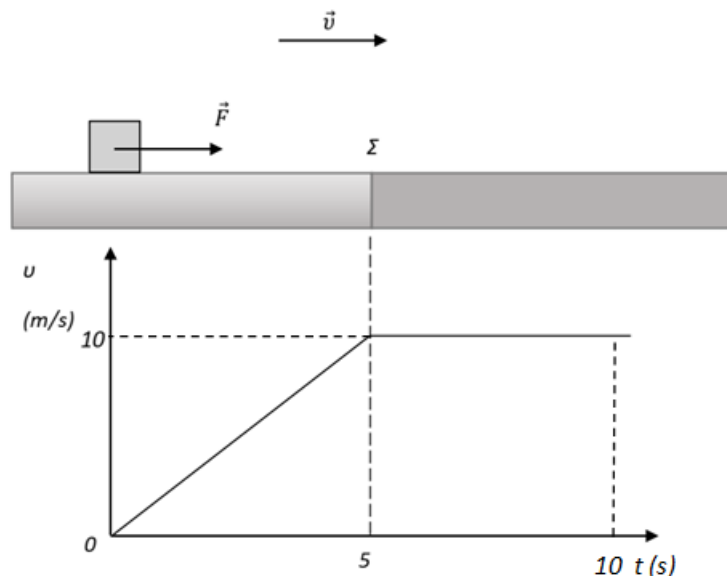
$$E_{\text{μηχ}}(A) = K_A' = 128 \text{ J.} \quad (5)$$

$$E_{\text{μηχ}}(B) = K_B' = 150 \text{ J.} \quad (6)$$

$$E_{\text{μηχ}}(\Gamma) = K_\Gamma' = 50 \text{ J.} \quad (7)$$

$$(5), (6), (7) \Rightarrow E_{\text{μηχ}}(B) > E_{\text{μηχ}}(A) > E_{\text{μηχ}}(\Gamma).$$

77. (13590) Συμπαγής και ομογενής κύβος, μάζας $m = 2 \text{ kg}$, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Το επίπεδο χωρίζεται σε δύο περιοχές (επιφάνειες) διαφορετικής υφής, οι οποίες είναι τοποθετημένες όπως στο σχήμα (σημείο Σ = σημείο αλλαγής επιφάνειας). Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκείται στον κύβο σταθερή δύναμη $F = 6 \text{ N}$, παράλληλη προς το επίπεδο. Η τιμή της ταχύτητας του κύβου ως προς το χρόνο παριστάνεται στο διάγραμμα (Το διάγραμμα ισχύει για όσο χρονικό διάστημα ασκείται η δύναμη F). Δίνεται : $g = 10 \text{ m/s}^2$.



4.1) Με βάση το διάγραμμα της τιμής

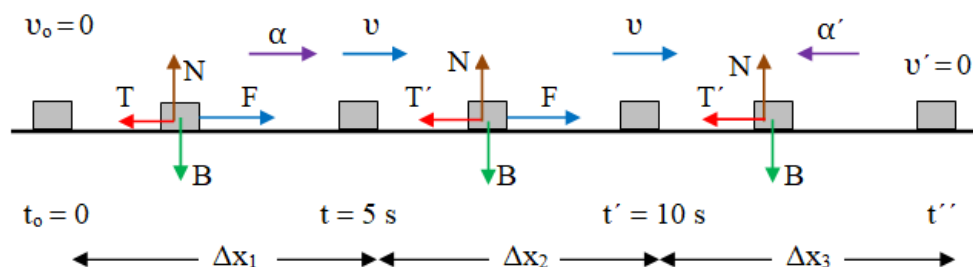
της ταχύτητας του κύβου ως προς το χρόνο, να διερευνήσετε αν υπάρχει τριβή από το δάπεδο προς τον κύβο για τις διαφορετικές επιφάνειες του επιπέδου. Σε καταφατική περίπτωση, να υπολογίσετε τον αντίστοιχο συντελεστή τριβής (θεωρήστε ότι **στατική τριβή και τριβή ολίσθησης είναι ίσες**).

Το διάγραμμα δείχνει τη χρονική στιγμή που ο κύβος αλλάζει επιφάνεια (διακεκομμένη γραμμή $t = 5 \text{ s}$).

4.2) Ποια η μετατόπιση του κύβου για το χρονικό διάστημα των πρώτων 10 s;

4.3) Αν τη χρονική στιγμή $t' = 10 \text{ s}$ παύει να ασκείται η δύναμη F , ποια χρονική στιγμή θα ακινητοποιηθεί ο κύβος;

4.4) Υπολογίστε το έργο κάθε δύναμης που ασκείται στον κύβο για όλο το χρονικό διάστημα της κίνησής του. **(Μονάδες 6+6+6+7)**



Απάντηση

4.1)

0 s → 5 s

Ο κύβος έχει σταθερή επιτάχυνση, μέτρου : $\alpha = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, υπολογίζω το μέτρο της συνισταμένης δύναμης :

$$\Sigma F_x = m\alpha = (2 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Sigma F_x = 4 \text{ N}.$$

Αφού $\Sigma F_x < F$, άρα υπάρχει τριβή ολίσθησης $\vec{T}$. Ισχύει :

$$\Sigma F_x = F - T \Leftrightarrow T = F - \Sigma F_x \Rightarrow T = 6 \text{ N} - 4 \text{ N} \Rightarrow T = 2 \text{ N}.$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 20 \text{ N}$.

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης υπολογίζω την τιμή του συντελεστή τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{2 \text{ N}}{20 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,1.$$

5 s → 10 s

Ο κύβος έχει σταθερή ταχύτητα, επομένως : $\Sigma F_x' = 0 \Leftrightarrow F - T' = 0 \Rightarrow T' = F = 6 \text{ N}$.

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T' = \mu' N \Leftrightarrow \mu' = \frac{T'}{N} \Rightarrow \mu' = \frac{6 \text{ N}}{20 \text{ N}} \Rightarrow \mu' = 0,3$.

4.2)

0 s → 5 s : ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (25 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 25 \text{ m}.$$

5 s → 10 s : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $t' - t = 5 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_2 = v(t' - t) = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (5 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_2 = 50 \text{ m}.$$

Η μετατόπιση του κύβου στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$, έχει μέτρο :

$$\Delta x_{1,2} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 25 \text{ m} + 50 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{1,2} = 75 \text{ m}.$$

4.3)

Για $t > 10 \text{ s}$

Ο κύβος επιβραδύνεται εξαιτίας της τριβής ολίσθησης $\vec{T}'$ με τη 2η επιφάνεια.

Το μέτρο της επιβράδυνσης του κύβου είναι : $\alpha' = \frac{T'}{m} = \frac{6 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha' = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι να σταματήσει τη χρονική στιγμή t'' .

$$\text{Ισχύει : } v' = v - \alpha'(\Delta t'') \xrightarrow{v'=0} 0 = 10 - 3(\Delta t'') \Rightarrow \Delta t'' = \frac{10}{3} \text{ s}.$$

$$\text{Ο κύβος θα σταματήσει τη χρονική στιγμή } t'' = 10 \text{ s} + \frac{10}{3} \text{ s} \Rightarrow t'' = \frac{40}{3} \text{ s}.$$

4.4)

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι :

$$W_F = F(\Delta x_{1,2}) = (6 \text{ N})(75 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 450 \text{ J}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης με την 1η επιφάνεια είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_1) = -(2 \text{ N})(25 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -50 \text{ J}.$$

Το μέτρο της μετατόπισης του κύβου στη χρονική διάρκεια $\Delta t''$, είναι :

$$\Delta x_3 = v(\Delta t'') - \frac{1}{2} \alpha (\Delta t'')^2 = \left[10 \cdot \frac{10}{3} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{100}{9} \right) \right] \text{ m} \Rightarrow \Delta x_3 = \frac{50}{3} \text{ m}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης με την 2η επιφάνεια είναι :

$$W_{T'} = -T'(\Delta x_2 + \Delta x_3) = -(6 \text{ N}) \left(50 + \frac{50}{3} \right) \text{ m} \Rightarrow W_{T'} = -400 \text{ J}.$$

Το έργο του βάρους $\vec{B}$ και το έργο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ είναι μηδενικό γιατί οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση του κύβου.

Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι οι διαστάσεις του κύβου είναι ασήμαντες ώστε το πέρασμα από τη μία επιφάνεια στην άλλη να γίνει σχεδόν ακαριαία.
- 2) Στο ερώτημα 4.1, η σωστή διατύπωση είναι : «θεωρήστε ότι η **οριακή** στατική τριβή είναι ίση με την τριβή ολίσθησης».

78. (13591) Συμπαγής και ομογενής κύβος, μάζας $m = 2 \text{ kg}$, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Το επίπεδο χωρίζεται σε δύο περιοχές (επιφάνειες) διαφορετικής υφής οι οποίες είναι τοποθετημένες όπως στο σχήμα (σημείο Σ = σημείο αλλαγής υφής).

Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκείται πάνω στον κύβο σταθερή δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη προς το επίπεδο. Η μεταβολή του μέτρου της επιτάχυνσης του κύβου ως προς το χρόνο παριστάνεται στο διάγραμμα (Το διάγραμμα ισχύει για όσο χρονικό διάστημα ασκείται η δύναμη F). Δίνεται : $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1) Με βάση το διάγραμμα διερευνήστε αν υπάρχει τριβή από το δάπεδο προς τον κύβο για την περιοχή που ξεκινάει μετά το σημείο Σ . Σε καταφατική περίπτωση, υπολογίστε τον αντίστοιχο συντελεστή τριβής (θεωρήστε ότι **στατική τριβή και τριβή ολίσθησης είναι ίσες**).

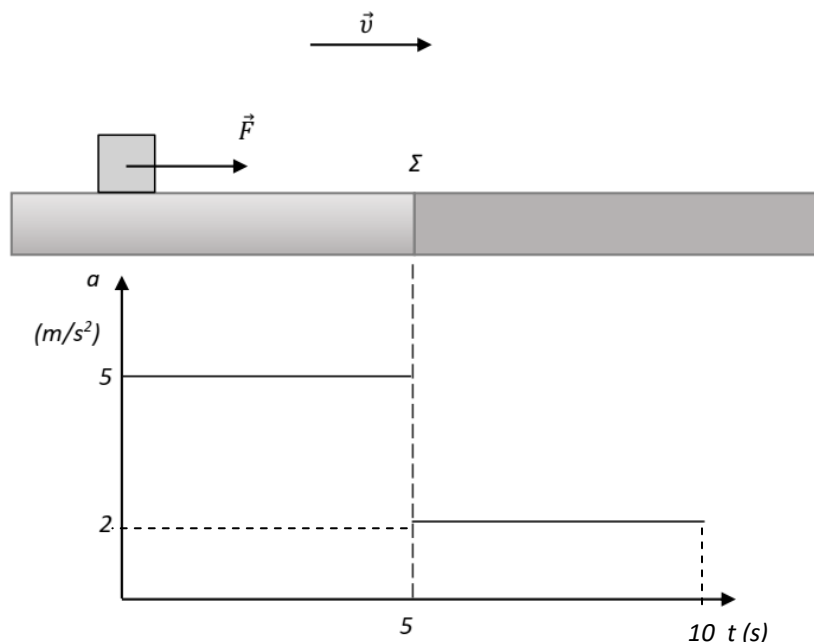
Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του κύβου και της επιφάνειας που τελειώνει στο σημείο Σ είναι $\mu = 0,2$. Το διάγραμμα δείχνει τη χρονική στιγμή που ο κύβος αλλάζει επιφάνεια (διακεκομμένη γραμμή $t = 5 \text{ s}$).

4.2) Να υπολογίσετε την τιμή της ταχύτητας του κύβου τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο Σ καθώς και μετά από 5 s κίνησης στην δεύτερη επιφάνεια.

4.3) Πόση απόσταση διανύει ο κύβος για το χρονικό διάστημα από 0 s μέχρι 10 s ;

4.4) Αν τη χρονική στιγμή $t' = 10 \text{ s}$ παύει να ασκείται η δύναμη F , ποια χρονική στιγμή θα ακινητοποιηθεί ο κύβος και πόσο θα έχει μετατοπιστεί από την αρχική του θέση;

(Μονάδες 6+6+6+7)



Απάντηση

4.1)

$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$

Ο κύβος έχει σταθερή επιτάχυνση, μέτρου :

$$\alpha_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Στον άξονα y ο κύβος ισορροπεί, άρα ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 20 \text{ N}$.

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N \Rightarrow T = 0,2 \cdot 20 \text{ N} \Rightarrow T = 4 \text{ N}$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (με θετική φορά της ταχύτητας) :

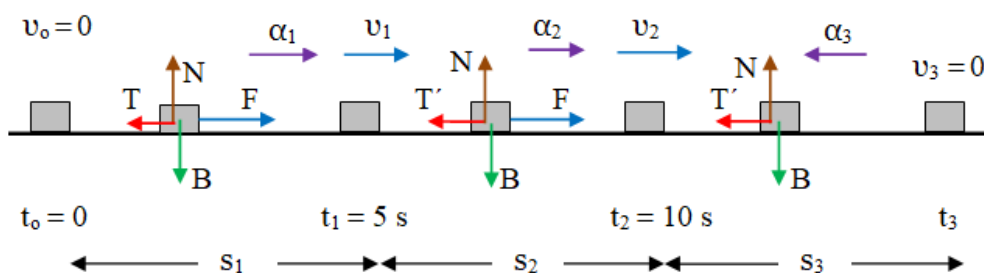
$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow F - T = ma \Leftrightarrow F = T + ma \Rightarrow F = 4 \text{ N} + 10 \text{ N} \Rightarrow F = 14 \text{ N}.$$

$5 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$

Ο κύβος έχει σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής : $\Sigma F'_x = m\alpha_2 = (2 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Sigma F'_x = 4 \text{ N}$.

Αφού $\Sigma F'_x < F$, άρα υπάρχει τριβή ολίσθησης $\vec{T}'$.



$$\text{Ισχύει: } \Sigma F_x' = F - T' \Leftrightarrow T' = F - \Sigma F_x' \Rightarrow T' = 14 \text{ N} - 4 \text{ N} \Rightarrow T' = 10 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης: } T' = \mu' N \Leftrightarrow \mu' = \frac{T'}{N} \Rightarrow \mu' = \frac{10 \text{ N}}{20 \text{ N}} \Rightarrow \mu' = 0,5.$$

4.2)

0 s → 5 s: Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t_1 = 5 \text{ s, ο κύβος έχει ταχύτητα μέτρου: } v_1 = a_1 t_1 = \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

5 s → 10 s: Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0' = v_1$).

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 10 \text{ s}$, ο κύβος έχει ταχύτητα μέτρου:

$$v_2 = v_1 + a_1(t_2 - t_1) = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s}) \Rightarrow v_2 = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3)

Υπολογίζω το διάστημα που διανύει ο κύβος σε κάθε χρονική διάρκεια.

$$\underline{0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}}: s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(25 \text{ s}^2) \Rightarrow s_1 = 62,5 \text{ m}.$$

$$\underline{5 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}}: s_2 = v_1(\Delta t_2) + \frac{1}{2} a_2(\Delta t_2)^2 = \left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(5 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(25 \text{ s}^2) \Rightarrow s_2 = 150 \text{ m}.$$

Το διάστημα που διάνυσε στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$, είναι:

$$s_{1,2} = s_1 + s_2 = 62,5 \text{ m} + 150 \text{ m} \Rightarrow s_{1,2} = 212,5 \text{ m}.$$

4.4)

Για $t > 10 \text{ s}$

Ο κύβος επιβραδύνεται εξαιτίας της τριβής ολίσθησης $\vec{T}'$ με τη 2η επιφάνεια.

$$\text{Το μέτρο της επιβράδυνσης του κύβου είναι: } a_3 = \frac{T'}{m} = \frac{10 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow a_3 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, μέχρι να σταματήσει τη χρονική στιγμή t_3 .

$$\text{Ισχύει: } v_3 = v_2 - a_3(\Delta t_3) \xrightarrow{v_3=0} 0 = 35 - 5(\Delta t_3) \Rightarrow \Delta t_3 = 7 \text{ s}.$$

$$\text{Ο κύβος θα σταματήσει τη χρονική στιγμή: } t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 10 \text{ s} + 7 \text{ s} \Rightarrow t_3 = 17 \text{ s}.$$

Το διάστημα που διάνυσε ο κύβος στη χρονική διάρκεια Δt_3 , είναι:

$$s_3 = v_2(\Delta t_3) - \frac{1}{2} a_3(\Delta t_3)^2 = \left(35 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 49\right) \text{ m} \Rightarrow s_3 = 122,5 \text{ m}.$$

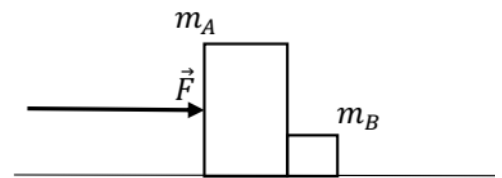
Το συνολικό διάστημα που διάνυσε ο κύβος μέχρι να σταματήσει, είναι:

$$s_{\text{ολ}} = s_{1,2} + s_3 = 212,5 \text{ m} + 122,5 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 335 \text{ m}.$$

Σχόλια:

- 1) Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι οι διαστάσεις του κύβου είναι ασήμαντες ώστε το πέρασμα του κύβου από τη μία επιφάνεια στην άλλη να γίνει σχεδόν ακαριαία.
- 2) Στο ερώτημα 4.1, η σωστή διατύπωση είναι: «θεωρήστε ότι η **οριακή** στατική τριβή είναι ίση με την τριβή ολίσθησης».

79. (13632) Δύο ομογενή σώματα Α και Β, με μάζες $m_A = 4 \text{ kg}$ και $m_B = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα, που είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό, είναι σε επαφή μεταξύ τους και ακίνητα πάνω σε ακλόνητο, τραχύ, οριζόντιο και ομογενές δάπεδο, όπως στην εικόνα.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο σώμα Α σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, που έχει μέτρο $F = 20 \text{ N}$.

Ο **συντελεστής οριακής (μέγιστης στατικής) τριβής** μεταξύ των σωμάτων και του δαπέδου είναι $\mu_{op} = 0,25$, ενώ ο αντίστοιχος συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu_{ol} = 0,2$.

Η γήινη βαρυτική επιτάχυνση έχει μέτρο: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1. Να δείξετε ότι το σύστημα των σωμάτων Α και Β αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε την σταθερή επιτάχυνση με την οποία κινείται το σύστημα των σωμάτων Α και Β και το μέτρο της σταθερής δύναμης που ασκεί το σώμα Α στο σώμα Β κατά τη διάρκεια αυτής της κίνησης.

Μονάδες 10

4.3. Πόση είναι η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$;

Μονάδες 4

4.4. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Απάντηση

4.1)

Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα y και το νόμο της οριακής στατικής τριβής για κάθε σώμα.

Σώμα Α

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_A = m_A g \Rightarrow N_A = 40 \text{ N}.$$

$$T_{op(A)} = \mu_{op} N_A = 0,25 \cdot 40 \text{ N} \Rightarrow T_{op(A)} = 10 \text{ N}.$$

Σώμα Β

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_B = m_B g \Rightarrow N_B = 10 \text{ N}.$$

$$T_{op(B)} = \mu_{op} N_B = 0,25 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_{op(B)} = 2,5 \text{ N}.$$

Οι δυνάμεις επαφής μεταξύ των σωμάτων είναι αντίθετες: $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ (δράση – αντίδραση).

Για να κινηθούν τα σώματα πρέπει η δύναμη $\vec{F}$ να έχει μεγαλύτερο μέτρο από τη συνολική οριακή τριβή.

Παρατηρώ ότι: $F = 20 \text{ N}$, $T_{op(A)} + T_{op(B)} = 12,5 \text{ N}$.

Αφού $F > T_{op(A)} + T_{op(B)}$, τα σώματα θα ξεκινήσουν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

4.2)

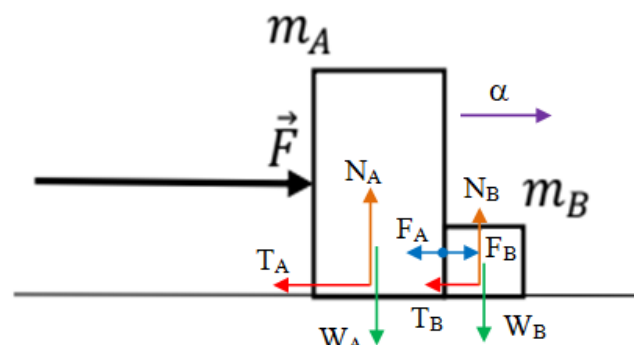
Τα δύο σώματα κινούνται προς τα δεξιά με την ίδια επιτάχυνση μέτρου α .

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης και τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x , για κάθε σώμα.

Σώμα Α

$$T_A = \mu N_A = 0,2 \cdot 40 \text{ N} \Rightarrow T_A = 8 \text{ N}.$$

$$\Sigma F_x = m_A \alpha \Leftrightarrow F - T_A - F_A = m_A \alpha. \quad (1)$$



Σώμα Β

$$T_B = \mu N_B = 0,2 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_B = 2 \text{ N}.$$

$$\Sigma F_x = m_B \alpha \Leftrightarrow F_B - T_B = m_B \alpha. \quad (2)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$F - T_A - F_A + F_B - T_B = m_A \alpha + m_B \alpha \Leftrightarrow F - T_A - T_B = (m_A + m_B) \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F - T_A - T_B}{m_A + m_B} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$(2) \Rightarrow F_B = T_B + m_B \alpha \Rightarrow F_B = 2 \text{ N} + 2 \text{ N} \Rightarrow F_B = 4 \text{ N}.$$

4.3)

Τα σώματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ έχουν ταχύτητα μέτρου :

$$v_1 = \alpha t_1 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ είναι :

$$P_1 = F \cdot v_1 = (20 \text{ N}) \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow P_1 = 400 \text{ W}.$$

4.4)

Το μέτρο της μετατόπισης των σωμάτων μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (100 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 100 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ σε αυτή τη χρονική διάρκεια είναι :

$$W_F = F(\Delta x_1) = (20 \text{ N})(100 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 2000 \text{ J}.$$

Σχόλιο :

Η έννοια του συντελεστή οριακής στατικής τριβής και ο νόμος της οριακής στατικής τριβής δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, συνεπώς το ερώτημα 4.1 είναι εκτός ύλης.

80. (13633) Δύο ομογενή σώματα Α και Β, με μάζες $m_A = 4 \text{ kg}$ και $m_B = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα, που είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό, συνδέονται με τεντωμένο ιδανικό νήμα και είναι ακίνητα πάνω σε ακλόνητο, τραχύ, οριζόντιο και ομογενές δάπεδο, όπως στην εικόνα.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο σώμα Β σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, που έχει μέτρο $F = 20 \text{ N}$. Ο συντελεστής οριακής (μέγιστης στατικής) τριβής μεταξύ των σωμάτων και του δαπέδου είναι $\mu_{op} = 0,25$, ενώ ο αντίστοιχος συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu_{ol} = 0,2$. Η γήινη βαρυτική επιτάχυνση έχει μέτρο: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να δείξετε ότι το σύστημα των σωμάτων Α και Β αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε την σταθερή επιτάχυνση με την οποία κινείται το σύστημα των σωμάτων Α και Β και το μέτρο της τάσης του νήματος κατά τη διάρκεια αυτής της κίνησης.

Μονάδες 10

4.3. Πόση είναι η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 4

4.4. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Απάντηση

4.1)

Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα y και το νόμο της οριακής στατικής τριβής για κάθε σώμα.

Σώμα Α

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_A = m_A g \Rightarrow N_A = 40 \text{ N}.$$

$$T_{op(A)} = \mu_{op} N_A = 0,25 \cdot 40 \text{ N} \Rightarrow T_{op(A)} = 10 \text{ N}.$$

Σώμα Β

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_B = m_B g \Rightarrow N_B = 10 \text{ N}.$$

$$T_{op(B)} = \mu_{op} N_B = 0,25 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_{op(B)} = 2,5 \text{ N}.$$

Αφού η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, οι δυνάμεις που ασκεί το νήμα στα σώματα Α, Β έχουν ίσα μέτρα ($T_v = T_v'$) και αντίθετες κατευθύνσεις, άρα είναι αντίθετες: $\vec{T}_v = -\vec{T}_v'$.

Για να κινηθούν τα σώματα πρέπει η δύναμη $\vec{F}$ να έχει μεγαλύτερο μέτρο από τη συνολική οριακή τριβή.

$$\text{Παρατηρώ ότι: } F = 20 \text{ N}, \quad T_{op(A)} + T_{op(B)} = 12,5 \text{ N}.$$

Αφού $F > T_{op(A)} + T_{op(B)}$, τα σώματα θα ξεκινήσουν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

4.2)

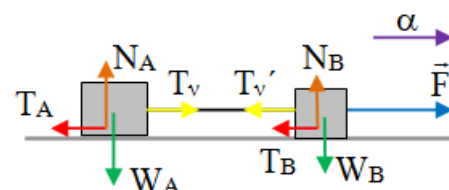
Τα δύο σώματα κινούνται προς τα δεξιά με την ίδια επιτάχυνση μέτρου α .

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης και τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x , για κάθε σώμα.

Σώμα Α

$$T_A = \mu N_A = 0,2 \cdot 40 \text{ N} \Rightarrow T_A = 8 \text{ N}.$$

$$\Sigma F_x = m_A \alpha \Leftrightarrow T_v - T_A = m_A \alpha. \quad (1)$$



Σώμα Β

$$T_B = \mu N_B = 0,2 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_B = 2 \text{ N}.$$

$$\Sigma F_x = m_B \alpha \Leftrightarrow F - T_B - T_v' = m_B \alpha. \quad (2)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$T_v - T_A + F - T_B - T_v' = m_A \alpha + m_B \alpha \Leftrightarrow F - T_A - T_B = (m_A + m_B) \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F - T_A - T_B}{m_A + m_B} \Rightarrow$$
$$\alpha = \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$(1) \Rightarrow T_v = T_A + m_A \alpha \Rightarrow T_v = 8 \text{ N} + 8 \text{ N} \Rightarrow T_v = 16 \text{ N}.$$

4.3)

Τα σώματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ έχουν ταχύτητα μέτρου :

$$v_1 = \alpha t_1 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ είναι :

$$P_1 = F \cdot v_1 = (20 \text{ N}) \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow P_1 = 400 \text{ W}.$$

4.4)

Το μέτρο της μετατόπισης κάθε σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s})^2 \Rightarrow \Delta x_1 = 100 \text{ m}.$$

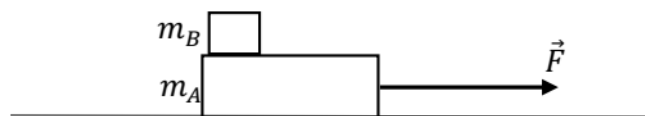
Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$W_F = F(\Delta x_1) = (20 \text{ N})(100 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 2000 \text{ J}.$$

Σχόλιο :

Η έννοια του συντελεστή οριακής στατικής τριβής και ο νόμος της οριακής στατικής τριβής δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, συνεπώς το ερώτημα 4.1 είναι εκτός ύλης.

81. (13634) Δύο σώματα A και B, με μάζες $m_A = 4 \text{ kg}$ και $m_B = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα είναι ακίνητα, με το σώμα B να βρίσκεται πάνω στο σώμα A. Το σώμα A βρίσκεται πάνω σε λείο, ακλόνητο, οριζόντιο δάπεδο, όπως στην εικόνα.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται

στο σώμα A σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, που έχει μέτρο $F = 20 \text{ N}$ και το σύστημα των σωμάτων A και B αρχίζει να κινείται, με το σώμα B να μην ολισθαίνει πάνω στο A εξαιτίας της μεταξύ τους τριβής. Η γήινη βαρυτική επιτάχυνση έχει μέτρο: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1. Να υπολογίσετε τη σταθερή επιτάχυνση με την οποία κινείται το σύστημα των σωμάτων A και B.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται το σώμα B.

Μονάδες 6

4.3. Πόση είναι η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή που αρχίζει η κίνηση του συστήματος των σωμάτων A και B μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Τα δύο σώματα κινούνται προς τα δεξιά με την ίδια επιτάχυνση μέτρου α .

Σώμα B

Η στατική τριβή $\vec{T}_B$ (που εμποδίζει την ολίσθηση του B πάνω στο A) έχει φορά προς τα δεξιά, ώστε να επιταχύνει το σώμα προς τα δεξιά.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής: $\Sigma F_x = m_B \alpha \Leftrightarrow T_B = m_B \alpha$. (1)

Σώμα A

Το σώμα A δέχεται από το B δύναμη στατικής τριβής $\vec{T}_A$, με φορά προς τα αριστερά.

Ισχύει: $T_A = T_B$ (δράση – αντίδραση).

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής: $\Sigma F_x = m_A \alpha \Leftrightarrow F - T_A = m_A \alpha$. (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2):

$$F - T_A - T_B = m_A \alpha + m_B \alpha \xrightarrow{T_A = T_B} F = (m_A + m_B) \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F}{m_A + m_B} \Rightarrow \alpha = \frac{20 \text{ N}}{5 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.2)

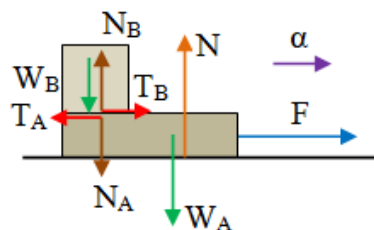
$$(1) \Rightarrow T_B = (1 \text{ Kg}) \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow T_B = 4 \text{ N}.$$

4.3)

Τα σώματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ έχουν ταχύτητα μέτρου:

$$v_1 = \alpha t_1 = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ είναι :

$$P_1 = F \cdot v_1 = (20 \text{ N}) \left(40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow P_1 = 800 \text{ W}.$$

4.4)

Το μέτρο της μετατόπισης κάθε σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (100 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 200 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$W_F = F(\Delta x_1) = (20 \text{ N})(200 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 4000 \text{ J}.$$

82. (13638) Σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ είναι ακίνητο σε τραχύ, οριζόντιο, ακλόνητο δάπεδο, στη θέση $x = 0$.

Το σώμα παρουσιάζει με το δάπεδο **συντελεστή μέγιστης στατικής (οριακής) τριβής $\mu_{op} = 0,5$** και συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ol} = 0,4$.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$, που έχει μέτρο $F = 10 - 5 \cdot x$ (S. I.), όπου x η θετική θέση του σώματος.

Η γήινη βαρυτική επιτάχυνση έχει μέτρο: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1. Να αποδείξετε ότι το σώμα αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από την εκκίνηση του σώματος μέχρι τη θέση $x = +1,2 \text{ m}$.

Μονάδες 6

4.3. Πόσο είναι το έργο της τριβής ολίσθησης $\vec{T}_{ol}$ από τη θέση $x_0 = 0$ μέχρι τη θέση $x = +1,2 \text{ m}$.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε **τη θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον** από την εκκίνηση του σώματος μέχρι τη θέση $x = +1,2 \text{ m}$.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 10 \text{ N}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και η δύναμη έχει τιμή : $F_0 = 10 \text{ N}$.

Η δύναμη $\vec{F}$ τείνει να κινήσει το σώμα προς τα δεξιά, οπότε εμφανίζεται στατική τριβή $\vec{T}_s$ με φορά προς τα αριστερά.

Από το νόμο της οριακής στατικής τριβής : $T_{op} = \mu_{op}N = 0,5 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_{op} = 5 \text{ N}$.

Αφού $F_0 > T_{op}$, άρα το σώμα θα ξεκινήσει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

4.2)

Σχεδιάζω το διάγραμμα της σχέσης : $F = 10 - 5x$. (S.I.)

Για $x = 0 \Rightarrow F = 10 \text{ N}$.

Για $x = 1,2 \text{ m} \Rightarrow F = 4 \text{ N}$.

Το έργο της δύναμης από $x = 0$ έως $x_1 = 1,2 \text{ m}$ είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραpezίου στο διάγραμμα $F - x$:

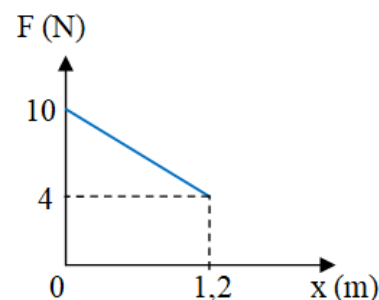
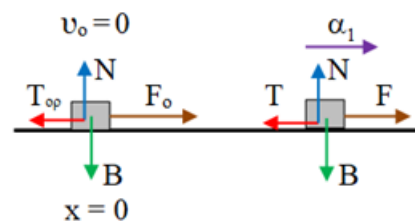
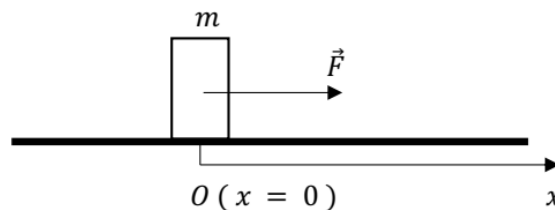
$$W_F = E_{\text{τραπ}} = \frac{(10+4) \cdot 1,2}{2} \text{ J} \Rightarrow W_F = 8,4 \text{ J}.$$

4.3)

Από τη στιγμή που ξεκινά το σώμα, ασκείται σ' αυτό τριβή ολίσθησης μέτρου : $T = \mu N = 4 \text{ N}$.

Το έργο της τριβής από $x = 0$ έως $x_1 = 1,2 \text{ m}$ είναι :

$$W_T = -T \cdot x_1 = -(4 \text{ N})(1,2 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -4,8 \text{ J}.$$



4.4)

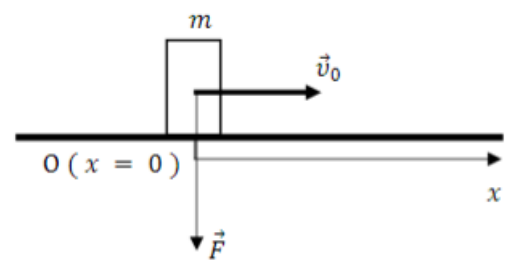
Το ποσό της θερμικής ενέργειας («θερμότητας») που μεταφέρεται στο περιβάλλον, μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης, είναι :

$$Q_T = |W_T| = 4,8 \text{ J}.$$

Σχόλια :

- 1) Η έννοια του συντελεστή οριακής στατικής τριβής και ο νόμος της οριακής στατικής τριβής δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, συνεπώς το ερώτημα 4.1 είναι εκτός ύλης.
- 2) Η διατύπωση «να υπολογίσετε τη θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον» δεν είναι σωστή.
Μια καλύτερη διατύπωση είναι : «να υπολογίσετε το ποσό της θερμικής ενέργειας που μεταφέρεται στο περιβάλλον, μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης».

83. (13640) Σημειακό αντικείμενο, μάζας $m = 1 \text{ kg}$, εκτοξεύεται, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, κατά μήκος οριζώντιου, ακλόνητου δαπέδου, από σημείο του Ο ($x = 0$), με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$, μέτρου $v_0 = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$. Την ίδια χρονική στιγμή, το σώμα δέχεται την επίδραση κατακόρυφης και με φορά προς τα κάτω δύναμης $\vec{F}$, που έχει μέτρο $F = 10 - 5 \cdot x$ (S.I.), όπου x η θέση του σώματος. Το σώμα παρουσιάζει με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ολ} = 0,4$. Η γήινη βαρυτική επιτάχυνση έχει μέτρο: $g = 10 \text{ m/s}^2$.



4.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής ολίσθησης που δέχεται το σημειακό αντικείμενο σε θέση x .

Μονάδες 9

4.2 Να αποδείξετε ότι το σημειακό αντικείμενο θα σταματήσει στη θέση $x = + 4 \text{ m}$.

Μονάδες 9

4.3 Να υπολογίσετε την θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον, λόγω της τριβής ολίσθησης, καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης του σημειακού αντικειμένου.

Μονάδες 7

Να αμελήσετε τις δυνάμεις που ασκεί ο ατμοσφαιρικός αέρας.

Απάντηση

4.1)

Από τη σχέση $F = 10 - 5x$ (S.I.) προκύπτει ότι :

$F = 0$ όταν $x_1 = 2 \text{ m}$.

Από την θέση $x_0 = 0$ μέχρι τη θέση $x_1 = 2 \text{ m}$,

η δύναμη $\vec{F}$ έχει φορά προς τα κάτω.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg + F \Rightarrow N = 10 + 10 - 5x \Rightarrow N = 20 - 5x. \text{ (S.I.)}$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης, προκύπτει η σχέση για το μέτρο της τριβής :

$$T = \mu N = 0,4 \cdot (20 - 5x) \Rightarrow T = 8 - 2x. \text{ (S.I.)}$$

4.2)

Η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν η δύναμη $\vec{F}$ συνεχίζει να ασκείται στο σώμα μετά τον μηδενισμό της (θέση $x_1 = 2 \text{ m}$) ή καταργείται από τη θέση αυτή και μετά.

Επομένως υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις :

1η περίπτωση

Η δύναμη συνεχίζει να ασκείται στο σώμα και μετά τη θέση $x_1 = 2 \text{ m}$ (με φορά προς τα πάνω).

Στην περίπτωση αυτή, η σχέση $F = 10 - 5x$ εκφράζει την αλγεβρική τιμή και όχι το μέτρο της δύναμης.

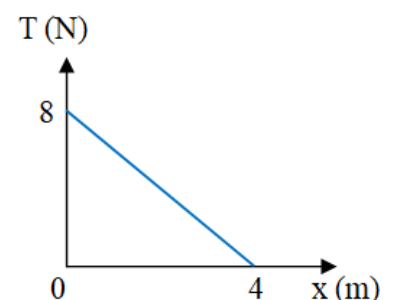
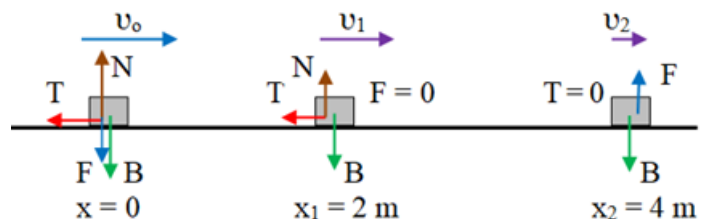
Σχεδιάζω το διάγραμμα της σχέσης : $T = 8 - 2x$ (S.I.)

Για $x = 0 \Rightarrow T = 8 \text{ N}$.

Για $x = 4 \text{ m} \Rightarrow T = 0 \text{ N}$.

Η απόλυτη τιμή του έργου της τριβής ολίσθησης είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό στο διάγραμμα $T - x$:

$$|W_T| = E_{\text{τριβ}} = \frac{8 \cdot 4}{2} \text{ J} \Rightarrow |W_T| = 16 \text{ J}.$$



Αφού η τριβή ολίσθησης έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση, το έργο της είναι αρνητικό, άρα :
 $W_T = -16 \text{ J}$.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $x_0 = 0 \rightarrow x = 4 \text{ m}$:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_T \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + W_T \Rightarrow K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 32 \text{ J} - 16 \text{ J} \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 0.$$

Επομένως **το σώμα θα σταματήσει στη θέση $x = 4 \text{ m}$.**

2η περίπτωση

Η δύναμη καταργείται μετά τη θέση $x_1 = 2 \text{ m}$.

Στην περίπτωση αυτή η σχέση $T = 8 - 2x$ ισχύει για $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$.

Για $x > 2 \text{ m}$, το μέτρο της τριβής είναι σταθερό : $T = 4 \text{ N}$.

Έστω ότι το σώμα σταματά στη θέση x_2 .

Η απόλυτη τιμή του έργου της τριβής ολίσθησης είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό στο διάγραμμα $T - x$:

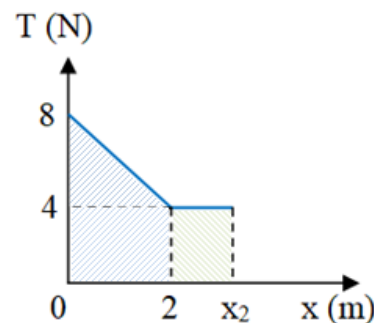
$$|W_T| = E_{\text{τραπ}} + E_{\text{ορθ}} = \frac{(8+4) \cdot 2}{2} + 4 \cdot (x_2 - 2) \Rightarrow |W_T| = 4 + 4x_2 \text{ (S.I.)}$$

Αφού η τριβή ολίσθησης έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση, το έργο της είναι αρνητικό, άρα : $W_T = -4 - 4x_2$. (S.I.)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $x_0 = 0 \rightarrow x_2$:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 32 = -4 - 4x_2 \Rightarrow 4x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 3 \text{ m}.$$

Επομένως, **αν καταργηθεί η δύναμη μετά τον μηδενισμό της, το σώμα θα σταματήσει στη θέση $x = 3 \text{ m}$.**



4.3)

Το ποσό της θερμικής ενέργειας («θερμότητας») που μεταφέρεται στο περιβάλλον, μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης, είναι ίσο με την ελάττωση της κινητικής ενέργειας του σώματος :

$$Q_T = |W_T| = K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 \Rightarrow Q_T = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (4\sqrt{2})^2 \text{ J} \Rightarrow Q_T = 16 \text{ J}.$$

Σχόλια :

1) Η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν η δύναμη συνεχίζει να ασκείται μετά τον μηδενισμό της (με φορά προς τα πάνω) ή καταργείται.

Αν ισχύει η 1η περίπτωση, τότε η σχέση $F = 10 - 5x$ εκφράζει την αλγεβρική τιμή και όχι το μέτρο της δύναμης.

Αν ισχύει η 2η περίπτωση, τότε για $x > 2 \text{ m}$ η τριβή είναι σταθερή ($T = 4 \text{ N}$).

Το σώμα θα σταματήσει στη θέση $x = 3 \text{ m}$ και όχι στη θέση $x = 4 \text{ m}$ που αναφέρει η εκφώνηση.

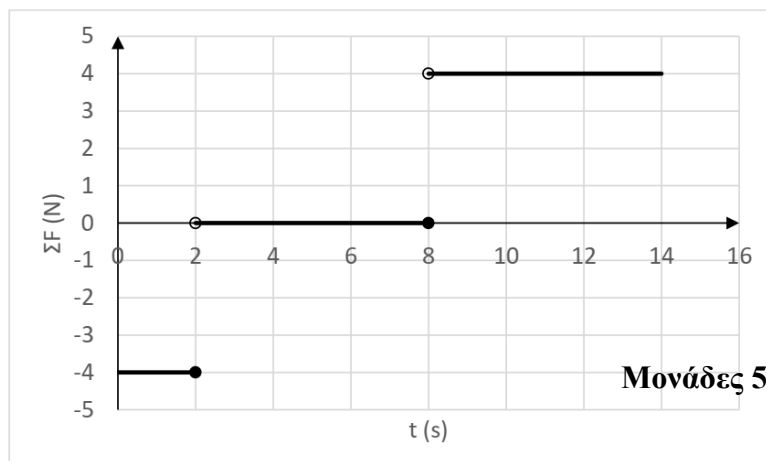
2) Στο ερώτημα 4.1 η σωστή διατύπωση είναι : «Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της τριβής ολίσθησης με τη θέση x »

3) Η διατύπωση «να υπολογίσετε τη θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον» δεν είναι σωστή.

Μια καλύτερη διατύπωση είναι : «να υπολογίσετε το ποσό της θερμικής ενέργειας που μεταφέρεται στο περιβάλλον, μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης».

Συμπέρασμα : Η εκφώνηση έχει ασαφή δεδομένα και δεν είναι κατάλληλη για θέμα εξετάσεων.

84. (13642) Σημειακό αντικείμενο μάζας $m = 1 \text{ Kg}$ είναι ακίνητο σε οριζόντιο, ακλόνητο, μεγάλο μήκους διάδρομο, στη θέση $x_0 = 0$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το σημειακό αντικείμενο δέχεται την επίδραση οριζόντιας συνισταμένης δύναμης, που μεταβάλλεται με το χρόνο όπως στο διάγραμμα που ακολουθεί:



4.1. Να υπολογίσετε:

A. την ταχύτητα v_1 και τη θέση x_1 του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Μονάδες 5

B. την ταχύτητα v_2 και τη θέση x_2 του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Γ. την ταχύτητα v_3 και τη θέση x_3 του σώματος τη χρονική στιγμή $t_3 = 14 \text{ s}$.

Μονάδες 5

4.2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις:

A. ταχύτητας - χρόνου ($v - t$) και

Μονάδες 5

B. θέσης - χρόνου ($x - t$) από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 14 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Απάντηση

4.1)

A) $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$:

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma F_1}{m} = \frac{-4 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς την αρνητική φορά ($v_0 = 0$).

Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ είναι: $v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Υπολογίζω την τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = -8 \text{ m}.$$

Η τιμή της θέσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ είναι: $x_1 = x_0 + \Delta x_1 \Rightarrow x_1 = \Delta x_1 = -8 \text{ m}.$

B) $2 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$:

Αφού $\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$.

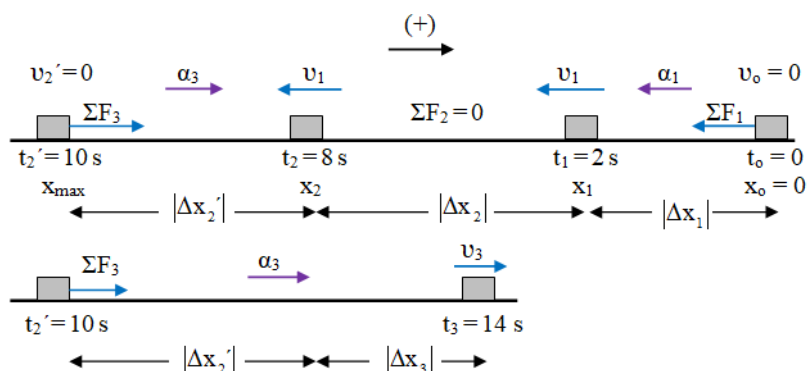
Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (προς την αρνητική φορά).

Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$ είναι: $v_2 = v_1 = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Υπολογίζω την τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $2 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$:

$$\Delta x_2 = v_1 (\Delta t_2) = \left(-8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(6 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_2 = -48 \text{ m}.$$

Η τιμή της θέσης τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$ είναι: $x_2 = x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow x_2 = -56 \text{ m}.$



Γ) $8\text{ s} \rightarrow 14\text{ s}$: Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής : $\alpha_3 = \frac{\Sigma F_3}{m} = \frac{4\text{ N}}{1\text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_3 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_1 .

Η τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_3 = 14\text{ s}$ είναι :

$$v_3 = v_1 + \alpha_3(\Delta t_3) = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6\text{ s}) \Rightarrow v_3 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Υπολογίζω την τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $8\text{ s} \rightarrow 14\text{ s}$:

$$\Delta x_3 = v_1(\Delta t_3) + \frac{1}{2} \alpha_3(\Delta t_3)^2 = \left(-8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(6\text{ s}) + \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(36\text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_3 = 24\text{ m}.$$

Η τιμή της θέσης τη χρονική στιγμή $t_3 = 14\text{ s}$ είναι : $x_3 = x_2 + \Delta x_3 \Rightarrow x_3 = -32\text{ m}$.

4.2)

Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται τη χρονική στιγμή t_2' . Ισχύει :

$$v_2' = v_1 + \alpha_3(\Delta t_2') \xrightarrow{v_2' = 0} \Delta t_2' = -\frac{v_1}{\alpha_3} \Rightarrow \Delta t_2' = 2\text{ s}.$$

Άρα : $t_2' = t_2 + \Delta t_2' = 8\text{ s} + 2\text{ s} \Rightarrow t_2' = 10\text{ s}$.

Στη χρονική διάρκεια $8\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}$, η τιμή της μετατόπισης είναι :

$$\Delta x_2' = v_1(\Delta t_2') + \frac{1}{2} \alpha_3(\Delta t_2')^2 = \left(-8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2\text{ s}) + \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4\text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_2' = -8\text{ m}.$$

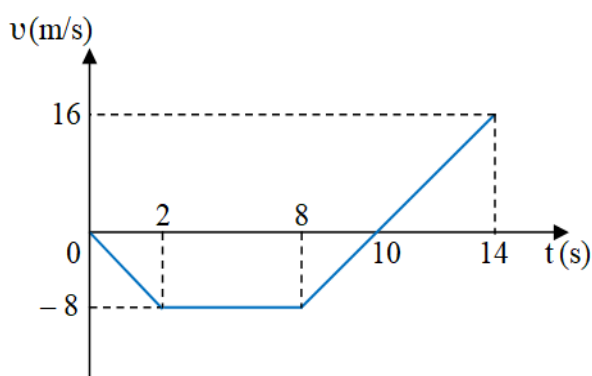
Τη χρονική στιγμή $t_2' = 10\text{ s}$ το σώμα βρίσκεται στη μέγιστη απόσταση από την αρχική θέση.

Τη χρονική στιγμή $t_2' = 10\text{ s}$, η αλγεβρική τιμή της θέσης του είναι :

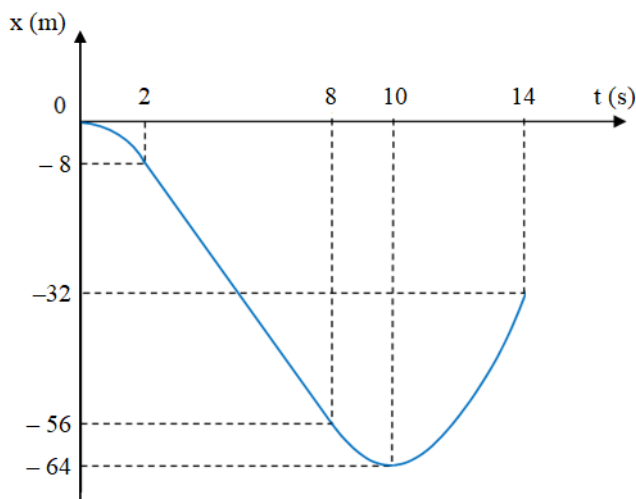
$$x_2' = x_2 + \Delta x_2' = -56\text{ m} - 8\text{ m} = -64\text{ m}.$$

Μετά τη χρονική στιγμή $t_2' = 10\text{ s}$, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τη θετική φορά.

A) διάγραμμα $v - t$



B) διάγραμμα $x - t$



Σχόλιο :

Στο ερώτημα Δ.2.2 ζητείται το διάγραμμα $x - t$ σε συνδυασμό επιταχυνόμενης – ομαλής – επιβραδυνόμενης – επιταχυνόμενης κίνησης με αλλαγή φοράς κίνησης, πράγμα ιδιαίτερα δύσκολο.

85. (13658) Στο δάπεδο του διαδρόμου του σχολείου βρίσκεται ακίνητο ένα κιβώτιο με βιβλία συνολικής μάζας $m = 20 \text{ Kg}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ ένας μαθητής αρχίζει να τραβά το κιβώτιο, ασκώντας σε αυτό σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 100 N , η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία 60° με το οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ η ταχύτητα του κιβωτίου είναι ίση με $v_1 = 2 \text{ m/s}$ και ο μαθητής σταματά να τραβά το κιβώτιο.

Στη συνέχεια το κιβώτιο κινείται για λίγο ακόμη επάνω στο δάπεδο και τέλος ακινητοποιείται.

Δίνεται ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 α. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κιβωτίου κατά το χρονικό διάστημα που ο μαθητής ασκούσε δύναμη σ' αυτό. Μονάδες 2

β. Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος να εξηγήσετε γιατί υπάρχει τριβή μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου. Μονάδες 4

4.2 Να σημειώσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο για τα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$ και $4 \text{ s} \rightarrow t_2$ (όπου t_2 η χρονική στιγμή κατά την οποία το κιβώτιο ακινητοποιείται).

Μονάδες 7

Να υπολογίσετε:

4.3 α. Τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου. Μονάδες 5

β. Την ενέργεια που προσφέρθηκε από τον μαθητή στο κιβώτιο. Μονάδες 2

4.4 Το συνολικό διάστημα που διανύθηκε από το κιβώτιο επάνω στο δάπεδο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$, μέχρις αυτό να σταματήσει. Μονάδες 5

Δίνονται: $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(60^\circ) = \frac{1}{2}$, $\sqrt{3} \approx 1,7$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1) α.

$t_0 = 0 \rightarrow t_1 = 4 \text{ s}$

Η επιτάχυνση του κιβωτίου είναι σταθερή. Το μέτρο της υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\alpha_1 = \frac{v_1 - 0}{t_1 - 0} = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

β.

Υποθέτω ότι η δύναμη $\vec{F}$ έχει φορά προς τα πάνω.

Αναλύω τη δύναμη σε κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, ώστε η $\vec{F}_x$ να είναι οριζόντια.

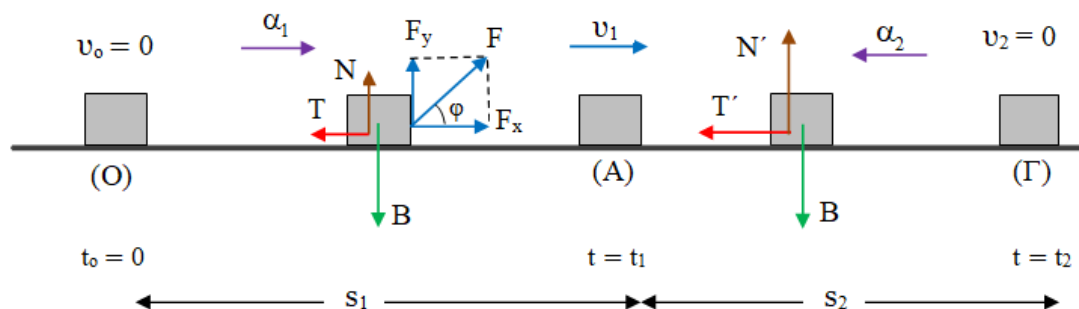
Το μέτρο της $\vec{F}_x$ είναι: $F_x = F \sigma\upsilon\nu\varphi = (100 \text{ N}) \cdot 0,5 = 50 \text{ N}$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$:

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 = (20 \text{ Kg}) \left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Sigma F_x = 10 \text{ N}.$$

Αφού $\Sigma F_x < F_x$, άρα υπάρχει τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

4.2)



4.3)

α.

Στον άξονα x ισχύει :

$$\Sigma F_x = F_x - T \Leftrightarrow T = F_x - \Sigma F_x \Rightarrow T = 50 \text{ N} - 10 \text{ N} \Rightarrow T = 40 \text{ N}.$$

Το μέτρο της $\vec{F}_y$ είναι : $F_y = F \eta \mu \phi \cong 100 \cdot 0,85 = 85 \text{ N}.$

Στον άξονα y ο κύβος ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N + F_y - B = 0 \Leftrightarrow N = mg - F_y \Rightarrow N = 200 - 85 = 115 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{40 \text{ N}}{115 \text{ N}} \Rightarrow \mu \cong 0,35.$$

β.

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$, ο κύβος διανύει διάστημα

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (16 \text{ s}^2) \Rightarrow s_1 = 4 \text{ m}.$$

Η ενέργεια που προσφέρθηκε από τον μαθητή στο κιβώτιο είναι ίση με το έργο της δύναμης που ασκεί ο μαθητής.

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$ είναι :

$$W_F = F_x \cdot s_1 = (50 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 200 \text{ J}.$$

4.4)

$t_1 = 4 \text{ s} \rightarrow t_2$:

Από τη στιγμή που καταργείται η δύναμη, μεταβάλλεται το μέτρο της κάθετης δύναμης και της τριβής ολίσθησης.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' - B = 0 \Rightarrow N' = B = 200 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T' = \mu N' \cong 0,35 \cdot 200 \text{ N} \Rightarrow T' \cong 70 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη χρονική στιγμή που ξεκινά ο κύβος μέχρι να σταματήσει :

$$W_F + W_T + W_{T'} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow W_F - T \cdot s_1 - T' \cdot s_2 = 0 \Leftrightarrow s_2 = \frac{W_F - T \cdot s_1}{T'} \Rightarrow$$

$$s_2 = \frac{(200 - 160) \text{ J}}{70 \text{ N}} \Rightarrow s_2 = \frac{4}{7} \text{ m}.$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του s_2

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ μέχρι να σταματήσει ο κύβος :

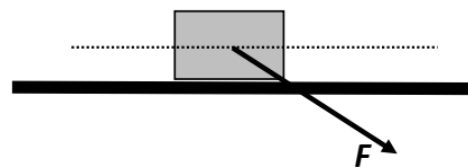
$$W_{T'} = K_{\text{τελ}} - K_1 \Leftrightarrow -T' \cdot s_2 = 0 - \frac{1}{2} m v_1^2 \Leftrightarrow s_2 = \frac{m v_1^2}{2 T'} \Rightarrow s_2 = \frac{20 \cdot 2^2}{2 \cdot 70} \text{ m} \Rightarrow s_2 = \frac{4}{7} \text{ m}.$$

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε ο κύβος μέχρι να σταματήσει, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = s_1 + s_2 = 4 \text{ m} + \frac{4}{7} \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = \frac{32}{7} \text{ m}.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η δύναμη $\vec{F}$ έχει φορά προς τα πάνω.

86. (13659) Το σώμα του σχήματος έχει μάζα $m = 2 \text{ Kg}$ και αρχικά ηρεμεί στο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση της δύναμης μέτρου $F = 20 \text{ N}$, που φαίνεται στο σχήμα, της οποίας η διεύθυνση σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0,2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.



4.1 Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που δέχεται το σώμα και να τις αναλύσετε σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, του οποίου ο ένας άξονας συμπίπτει με την διεύθυνση της κίνησης.

Μονάδες 5

4.2 Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής ολίσθησης.

Μονάδες 8

4.3 Να υπολογίσετε την ταχύτητα και τη μετατόπιση του σώματος για χρονικό διάστημα 5 s από τη στιγμή που άρχισε να ασκείται η δύναμη.

Μονάδες 8

4.4 Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου και **μετατόπισης**-χρόνου, σε βαθμολογημένους άξονες, για το χρονικό διάστημα των 5 s από τη στιγμή που άρχισε να ασκείται η δύναμη.

Μονάδες 4

Δίνονται $\eta\mu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0,7$.

Απάντηση

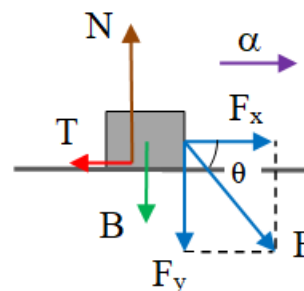
4.1)

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, στο σώμα ασκούνται: το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, ώστε η $\vec{F}_x$ να είναι παράλληλη προς την επιφάνεια και υπολογίζω τα μέτρα τους:

$$F_x = F \sigma\upsilon\nu\theta = (20 \text{ N}) \cdot 0,7 \Rightarrow F_x = 14 \text{ N}.$$

$$F_y = F \eta\mu\theta = (20 \text{ N}) \cdot 0,7 \Rightarrow F_y = 14 \text{ N}.$$



4.2)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B - F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg + F_y \Rightarrow N = 20 \text{ N} + 14 \text{ N} \Rightarrow N = 34 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης:

$$T = \mu N = 0,2 \cdot 34 \text{ N} \Rightarrow T = 6,8 \text{ N}.$$

4.3)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow F_x - T = ma \Leftrightarrow a = \frac{F_x - T}{m} \Rightarrow a = \frac{(14 - 6,8) \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow a = 3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο:

$$v_1 = at_1 = \left(3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος στη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 5\text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \left(3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (25 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 45 \text{ m}.$$

4.4)

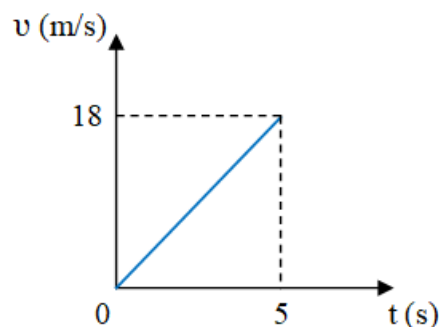
Η εξίσωση της ταχύτητας είναι : $v = at \Rightarrow v = 3,6t$ (S.I.).

Η σχέση είναι 1ου βαθμού, άρα το διάγραμμα είναι ευθεία.

Για $t = 0 \Rightarrow v = 0$.

Για $t = 5\text{ s} \Rightarrow v = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Το διάγραμμα $v - t$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Υποθέτω ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στην αρχή του άξονα x , άρα $x_0 = 0$.

Επομένως, η θέση x του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση :

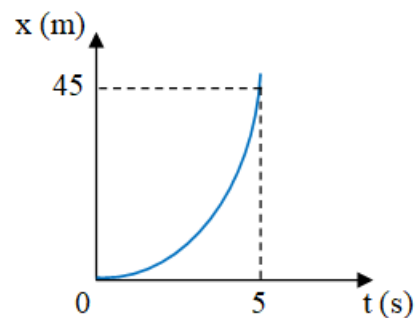
$$x = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x = 1,8 t^2. \text{ S.I.})$$

Η σχέση είναι 2ου βαθμού, άρα το διάγραμμα είναι παραβολή.

Για $t = 0 \Rightarrow x = 0$.

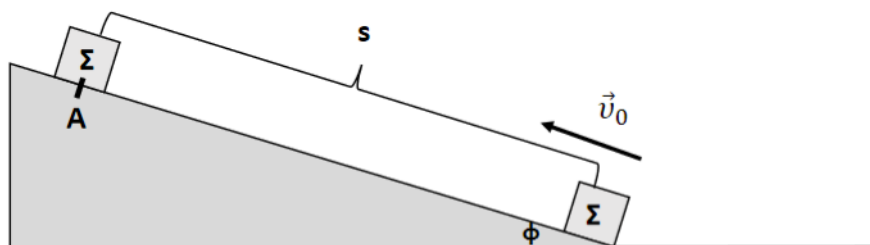
Για $t = 5\text{ s} \Rightarrow x = 45\text{ m}$.

Το διάγραμμα $x - t$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να ζητά το διάγραμμα θέσης – χρόνου ($x - t$) και όχι το διάγραμμα μετατόπισης – χρόνου ($\Delta x - t$).

87. (13660) Σώμα μάζας $m = 5 \text{ Kg}$, όπως φαίνεται στο σχήμα, εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$ από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Το σώμα, αφού διανύσει διάστημα $s = 8 \text{ m}$ επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει τριβή, επιστρέφει με ταχύτητα μέτρου v στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Το σώμα, χωρίς να αναπηδήσει, συνεχίζει την κίνησή του, με αρχική ταχύτητα μέτρου v , σε οριζόντιο επίπεδο, στο οποίο και σταματά αφού διανύσει διάστημα s_1 επάνω σε αυτό. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και των επιπέδων επάνω στα οποία κινείται, είναι ο ίδιος και για τα δύο επίπεδα. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.



4.1 Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, κατά την άνοδό του στο κεκλιμένο επίπεδο και κατά την κάθοδό του σε αυτό και να τις αναλύσετε σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, του οποίου ο ένας άξονας συμπίπτει με την διεύθυνση της κίνησης. Επίσης να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και κατά την κίνησή του στο οριζόντιο επίπεδο. **Μονάδες 7**

Να υπολογίσετε:

4.2 Το μέτρο της τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου και τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και των επιπέδων επάνω στα οποία αυτό κινείται

Μονάδες 7

4.3 Να εξηγήσετε γιατί το σώμα επιστρέφει στην βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Μονάδες 3

4.4 Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας v , με την οποία το σώμα επιστρέφει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και το διάστημα s_1 που το σώμα διανύει στο οριζόντιο επίπεδο.

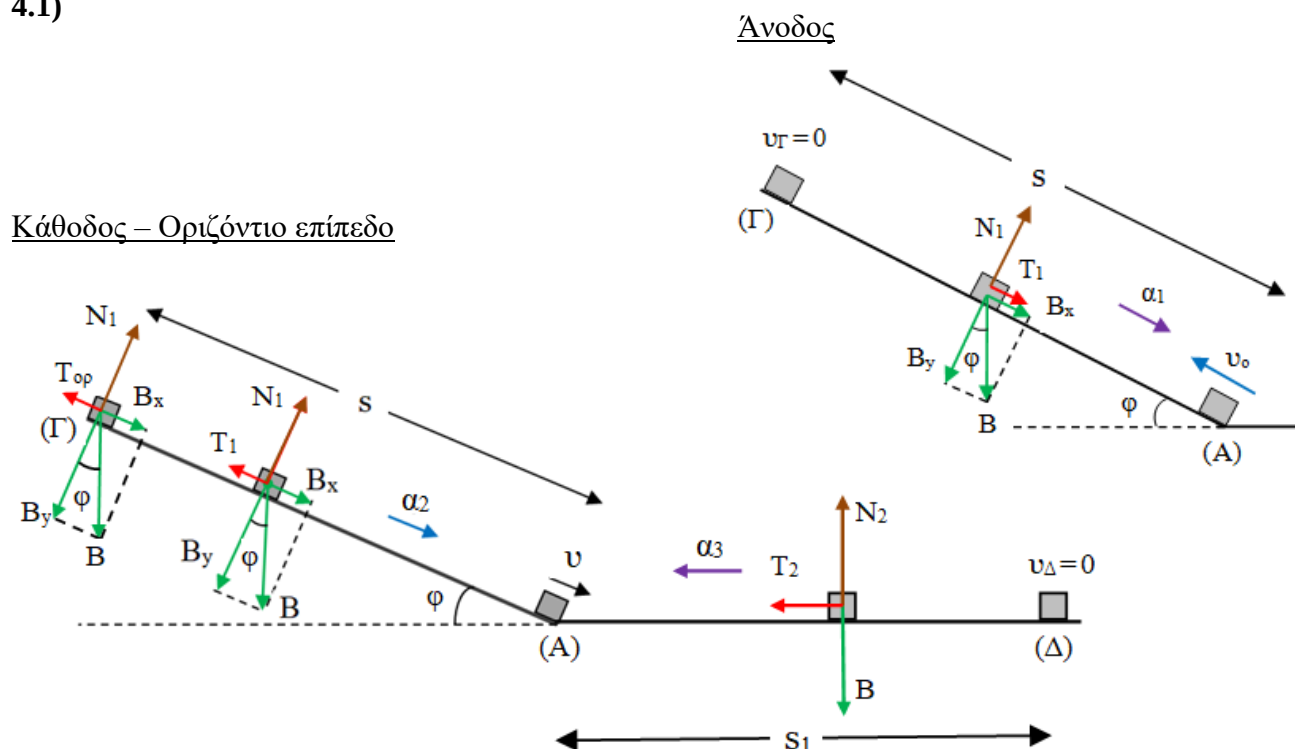
Μονάδες 8

Δίνονται: $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{50\sqrt{3}}{12} \cong 7$.

Απάντηση

4.1)

Κάθοδος – Οριζόντιο επίπεδο



4.2)

Η συνιστώσα του βάρους $\vec{B}_x$ έχει μέτρο : $B_x = mg \sin \varphi = 50 \cdot 0,5 \text{ N} = 25 \text{ N}$.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$ ($v_\Gamma = 0$) στο κεκλιμένο επίπεδο :

$$K_\Gamma - K_A = W_B + W_{T_1} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -B_x \cdot s - T_1 \cdot s \Leftrightarrow T_1 = \frac{m v_0^2}{2s} - B_x \Rightarrow$$

$$T_1 = \frac{5 \cdot 100}{2 \cdot 8} \text{ N} - 25 \text{ N} \Rightarrow T_1 = 6,25 \text{ N}.$$

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει : } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_1 = B_y \Leftrightarrow N_1 = mg \cos \varphi \Rightarrow N_1 = 50 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N} = 25\sqrt{3} \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T_1 = \mu N_1 \Leftrightarrow \mu = \frac{T_1}{N_1} \Rightarrow \mu = \frac{6,25}{25\sqrt{3}} \Rightarrow \mu = \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{ ή } \mu = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

4.3)

Στο ψηλότερο σημείο (Γ) το σώμα ηρεμεί στιγμιαία, άρα η τριβή είναι στατική.

Υποθέτω ότι η οριακή στατική τριβή έχει το ίδιο μέτρο με την τριβή ολίσθησης : $T_{op} = T_1 = 6,25 \text{ N}$.

Αφού $B_x > T_{op}$, το σώμα κινηθεί προς τα κάτω.

4.4)

Κάθοδος στο κεκλιμένο επίπεδο

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή (Γ) $\rightarrow$ (Α) :

$$K_A' - K_\Gamma = W_B' + W_{T_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 - 0 = B_x \cdot s - T_1 \cdot s \Leftrightarrow v^2 = \frac{2(B_x - T_1) \cdot s}{m} \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{2(25 - 6,25) \cdot 8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{5} \Rightarrow v^2 = 60 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow v = 2\sqrt{15} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Στο οριζόντιο επίπεδο

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει : } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 = B \Leftrightarrow N_2 = mg \Rightarrow N_2 = 50 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T_2 = \mu N_2 \Rightarrow T_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 50 \text{ N} \Rightarrow T_2 \cong 7 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή (Α) $\rightarrow$ (Δ) :

$$K_\Delta - K_A' = W_{T_2} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m v^2 = -T_2 \cdot s_1 \Leftrightarrow s_1 = \frac{m v^2}{2T_2} \Rightarrow s_1 = \frac{5 \cdot 60}{2 \cdot 7} \text{ m} \Rightarrow s_1 = \frac{150}{7} \text{ m}.$$

Σχόλιο : Για την απάντηση στο ερώτημα 4.3 χρειάζεται η τιμή της οριακής στατικής τριβής T_{op} ανάμεσα στο σώμα και στο κεκλιμένο επίπεδο.

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «Να δεχθείτε ότι το μέτρο της οριακής στατικής τριβής στο κεκλιμένο επίπεδο είναι ίσο με της τριβής ολίσθησης».

88. (13664) Στην καρότσα ενός φορτηγού, το οποίο κινείται σε οριζόντιο δρόμο, βρίσκεται ένα μεγάλο κιβώτιο μάζας $m = 200 \text{ kg}$, χωρίς να είναι δεμένο ή στερεωμένο με οποιοδήποτε τρόπο πάνω σε αυτή. Η μάζα του φορτηγού, χωρίς το κιβώτιο είναι $M = 2800 \text{ kg}$.

Το φορτηγό αρχικά κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_0 = 20 \text{ m/s}$, αλλά ο οδηγός του αναγκάστηκε να φρενάρει, με αποτέλεσμα το μέτρο της ταχύτητάς του να μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη γραφική παράσταση του διαγράμματος, ενώ κινείται πάντα ευθύγραμμα.

Στη διάρκεια του φρεναρίσματος, το κιβώτιο δεν ολίσθησε πάνω στην καρότσα, εξαιτίας της τριβής που δημιουργήθηκε μεταξύ τους. Να υπολογίσετε:

4.1 το μέτρο της μετατόπισης του φορτηγού από τη στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t = 12 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.2 το μέτρο της συνισταμένης δύναμης, η οποία επιβραδύνει το όχημα, στη διάρκεια του φρεναρίσματος.

Μονάδες 6

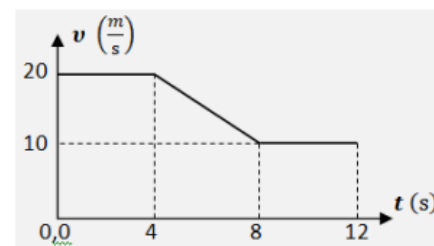
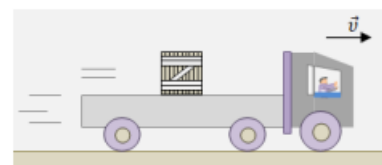
4.3 τον ελάχιστο **συντελεστή οριακής τριβής** μεταξύ του κιβωτίου και της καρότσας, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση του κιβωτίου πάνω σε αυτή, κατά το φρενάρισμα.

Μονάδες 7

4.4 το έργο της τριβής που ασκήθηκε στο κιβώτιο από την καρότσα του φορτηγού, στη διάρκεια του φρεναρίσματος.

Μονάδες 6

Δυνάμεις που οφείλονται στον ατμοσφαιρικό αέρα, μπορούν να αγνοηθούν και το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας να θεωρηθεί $g = 10 \text{ m/s}^2$.



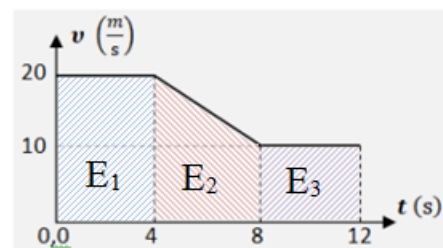
Απάντηση

4.1)

Το μέτρο της μετατόπισης του φορτηγού είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου :

$$\Delta x_{ολ} = E_1 + E_2 + E_3 = 20 \cdot 4 \text{ m} + \frac{(20+10) \cdot 4}{2} \text{ m} + 10 \cdot 4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Delta x_{ολ} = 180 \text{ m}.$$



4.2)

Το φορτηγό επιβραδύνεται κατά τη χρονική διάρκεια $4 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$.

Η αλγεβρική τιμή της επιβράδυνσης είναι :

$$\alpha = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(10 - 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(8 - 4) \text{ s}} \Rightarrow \alpha = -2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το φορτηγό με το κιβώτιο κινούνται σαν ένα σώμα μάζας $M + m$, με την ίδια επιτάχυνση α .

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για το σύστημα φορτηγό – κιβώτιο :

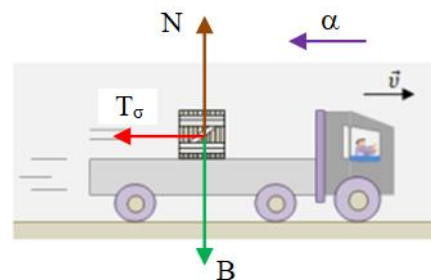
$$\Sigma F_x = (M + m)\alpha \Rightarrow \Sigma F_x = (3000 \text{ Kg}) \left(-2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Sigma F_x = -7500 \text{ N}.$$

Επομένως, η συνισταμένη δύναμη που επιβραδύνει το φορτηγό με το κιβώτιο έχει μέτρο 7500 N και φορά αντίθετη από τη φορά της ταχύτητας.

4.3)

Όταν το φορτηγό φρενάρει, το κιβώτιο (λόγω αδράνειας) τείνει να κινηθεί προς τα εμπρός, με αποτέλεσμα να αναπτυχθεί στατική τριβή μεταξύ καρότσας και κιβωτίου, η οποία εμποδίζει την ολίσθηση.

Η στατική τριβή που ασκείται στο κιβώτιο έχει φορά προς τα πίσω, ώστε να προκαλεί επιβράδυνση α .



Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow -T_\sigma = m\alpha \Rightarrow T_\sigma = -\left(200\text{Kg}\right)\left(-2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T_\sigma = 500 \text{ N} .$$

Στον άξονα y το κιβώτιο ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 2000 \text{ N} .$$

Σύμφωνα με το νόμο της οριακής στατικής τριβής : $T_{op} = \mu_{op}N$. (1)

Για να μην ολισθήσει το κιβώτιο, πρέπει να ισχύει :

$$T_\sigma \leq T_{op} \xrightarrow{(1)} T_\sigma \leq \mu_{op}N \Leftrightarrow \mu_{op} \geq \frac{T_\sigma}{N} \Rightarrow \mu_{op} \geq 0,25 \Rightarrow \mu_{op(\min)} = 0,25 .$$

4.4)

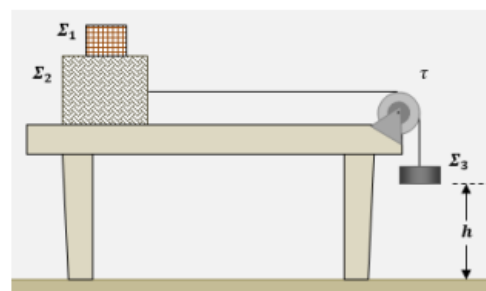
Από το διάγραμμα ταχύτητας χρόνου, το μέτρο της μετατόπισης του κιβωτίου (ως προς το έδαφος) στη διάρκεια της επιβράδυνσης είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό του τραπεζίου :

$$\Delta x_2 = E_2 = \frac{(20+10) \cdot 4}{2} \text{ m} = 60 \text{ m} .$$

Το έργο της στατικής τριβής που ασκείται στο κιβώτιο (ως προς το έδαφος) είναι :

$$W_{T_\sigma} = -T_\sigma(\Delta x_2) = -(500 \text{ N})(60 \text{ m}) \Rightarrow W_{T_\sigma} = -30000 \text{ J} .$$

89. (13666) Ένα κιβώτιο (σώμα Σ_2), σχήματος κύβου, μάζας $m_2 = 4$ kg, με βάση από ομογενές υλικό, βρίσκεται πάνω σε έναν οριζόντιο πάγκο, επίσης από ομογενές υλικό. Πάνω στο σώμα Σ_2 , είναι τοποθετημένο ένα άλλο σώμα Σ_1 , μάζας $m_1 = 8$ kg. Το σώμα Σ_2 είναι δεμένο στο ύψος του κέντρου του στο ένα άκρο αβαρούς και μη ελαστικού νήματος. Το νήμα τεντωμένο και οριζόντιο, περνάει από το αυλάκι μιας τροχαλίας, στερεωμένης στο άκρο του πάγκου και το άλλο του άκρο δένεται στο πάνω μέρος σώματος Σ_3 , μάζας $m_3 = 2$ kg, όπως στο σχήμα.



Να θεωρήσετε ότι η μέγιστη στατική τριβή μεταξύ της βάσης του κύβου και της επιφάνειας του πάγκου, είναι ίση με την τριβή ολίσθησης μεταξύ τους και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των δύο αυτών επιφανειών, δίνεται $\mu = 0,2$.

Μεταξύ του νήματος και του υλικού της τροχαλίας, δεν αναπτύσσεται τριβή, με αποτέλεσμα το τεντωμένο νήμα να μεταδίδει στα άκρα του δυνάμεις ίσου μέτρου.

Αρχικά το σύστημα ισορροπεί ελεύθερο και ακίνητο με το σώμα Σ_3 να βρίσκεται σε ύψος $h = 1$ m από οριζόντιο δάπεδο.

4.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής που δημιουργείται μεταξύ κιβωτίου και πάγκου και να εξηγήσετε γιατί το σύστημα δεν κινείται.

Μονάδες 6

4.2 Κάποια στιγμή κάποιος απομάκρυνε το σώμα Σ_1 , σηκώνοντάς το κατακόρυφα. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο σύστημα δεν μπορεί πλέον να παραμείνει ακίνητο και να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσής του.

Μονάδες 8

4.3 Να υπολογίσετε την χρονική διάρκεια κίνησης του συστήματος, από τη χρονική στιγμή που απομακρύνθηκε το σώμα Σ_1 , μέχρι τη στιγμή που το σώμα Σ_3 κτυπάει στο οριζόντιο δάπεδο.

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε τη **θερμότητα που παράχθηκε λόγω τριβών**, από τη στιγμή που το σύστημα άρχισε να κινείται, μέχρι τη στιγμή που το σώμα Σ_3 κτυπάει στο οριζόντιο δάπεδο.

Μονάδες 5

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και οι αντιστάσεις αέρα αγνοούνται.

Απάντηση

4.1)

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των σωμάτων $\Sigma_1 + \Sigma_2$ και οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_3 . (Δεν έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων Σ_1, Σ_2).

Αφού το Σ_3 ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_3 = 0 \Leftrightarrow T_1 = B_3 = m_3 g \Rightarrow T_1 = B_3 = 20 \text{ N.}$$

Το νήμα ασκεί στο Σ_2 δύναμη μέτρου: $T_2 = T_1 = 20 \text{ N}$.

Σώματα $\Sigma_1 + \Sigma_2$

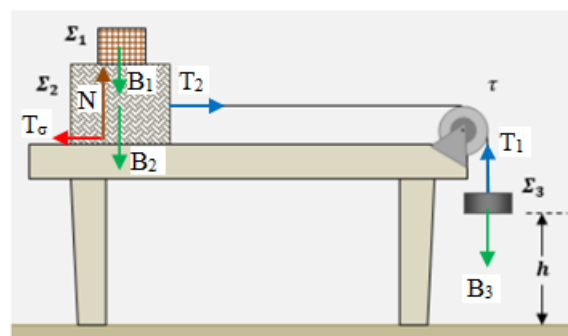
Στον άξονα x τα σώματα ισορροπούν, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow T_\sigma = T_2 \Rightarrow T_\sigma = 20 \text{ N.}$$

Από την ισορροπία στον άξονα y, προκύπτει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = (m_1 + m_2)g \Rightarrow N = 120 \text{ N}$.

Το μέτρο της οριακής στατικής τριβής είναι : $T_{op} = T = \mu N \Rightarrow T_{op} = 24 \text{ N}$.

Αφού $T_\sigma < T_{op}$, τα σώματα παραμένουν ακίνητα.



4.2)

Σ_2

Όταν απομακρυνθεί το Σ_1 , τότε μεταβάλλεται το μέτρο της κάθετης δύναμης και της τριβής που δέχεται το Σ_2 , καθώς και το μέτρο της τάσης του νήματος.

Από την ισορροπία στον άξονα y, προκύπτει :

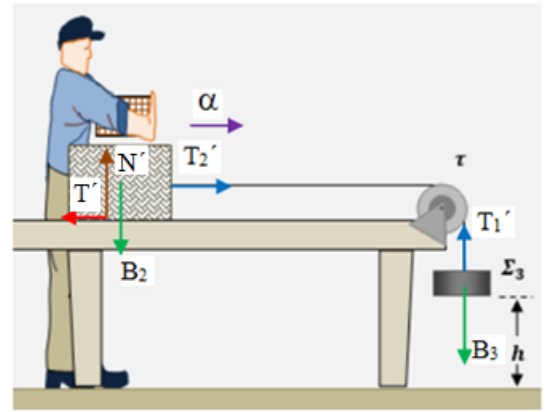
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' = m_2 g \Rightarrow N' = 40 \text{ N.}$$

Εφαρμόζω το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T' = \mu N' = 8 \text{ N.}$

Επομένως : $T_{op}' = 8 \text{ N.}$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που απομακρύνεται το Σ_1 , ισχύει :

$$\Sigma F_{x(2)} = T_2' - T_{\sigma}' \quad (1)$$



Σ_3

$$\Sigma F_{x(3)} = m_3 g - T_{\sigma}' \quad (2) \quad (\text{ο άξονας x είναι κατακόρυφος})$$

$$(1) + (2) \Rightarrow F_{ολ(x)} = T_2' - T_{\sigma}' + B_3 - T_1' \xrightarrow{T_1' = T_2'} F_{ολ(x)} = B_3 - T_{\sigma}'.$$

Ισχύει : $B_3 > T_{op}' \geq T_{\sigma}'$, άρα τα σώματα Σ_2, Σ_3 θα κινηθούν με την ίδια επιτάχυνση $\vec{a}$.

Αφού κινείται το Σ_2 , εμφανίζεται τριβή ολίσθησης $\vec{T}'$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα :

Σ_2

$$\Sigma F_{x(2)} = m_2 a \Leftrightarrow T_2' - T' = m_2 a \quad (3)$$

Σ_3

$$\Sigma F_{x(3)} = m_3 a \Leftrightarrow B_3 - T_1' = m_3 a \quad (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow T_2' - T' + B_3 - T_1' = m_2 a + m_3 a \xrightarrow{T_1' = T_2'} B_3 - T' = (m_2 + m_3) a \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{B_3 - T'}{m_2 + m_3} \Rightarrow \alpha = \frac{(20 - 8) \text{ N}}{(4 + 2) \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.3)

Μέχρι να φτάσει το Σ_3 στο δάπεδο, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$$\text{Ισχύει : } h = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{\alpha} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{2}} \text{ s} \Rightarrow t = 1 \text{ s.}$$

4.4)

Στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 1 \text{ s}$, το Σ_2 μετακινήθηκε οριζόντια κατά $s = h = 1 \text{ m}$.

Το έργο της τριβής ολίσθησης στην ίδια χρονική διάρκεια, είναι :

$$W_{T'} = -T'(\Delta x) = -(8 \text{ N})(1 \text{ m}) \Rightarrow W_{T'} = -8 \text{ J.}$$

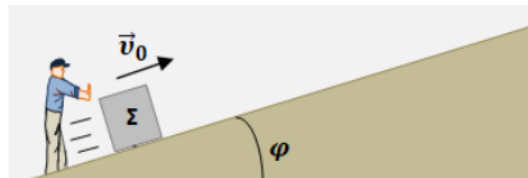
Το ποσό της θερμικής ενέργειας που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον, μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης, είναι : $Q_T = |W_{T'}| = 8 \text{ J.}$

Σχόλιο

Στο ερώτημα 4.4 η διατύπωση «Να υπολογίσετε τη θερμότητα που παράχθηκε λόγω τριβών» δεν είναι σωστή.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Να υπολογίσετε το ποσό της θερμικής ενέργειας που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον, μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης».

90. (13667) Ένα μικρό κιβώτιο σχήματος κύβου (σώμα Σ), με βάση από ομογενές υλικό, συγκρατείται αρχικά ακίνητο πάνω σε πλάγιο ομογενές δάπεδο μεγάλου μήκους, με το οποίο εμφανίζει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,25$. Η γωνία κλίσης του κεκλιμένου δαπέδου είναι φ , για την οποία δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$.



Κάποια στιγμή το κιβώτιο εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ παράλληλη με το κεκλιμένο δάπεδο, με φορά προς τα πάνω και μέτρο $v_0 = 8 \text{ m/s}$, όπως στο σχήμα.

4.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ, κατά την άνοδό του στο κεκλιμένο δάπεδο.

Μονάδες 7

4.2 Σε πόση απόσταση από την αρχική του θέση θα φτάσει το σώμα Σ, μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του.

Μονάδες 6

4.3 Αν υποθέσουμε ότι ο συντελεστής μέγιστης στατικής (οριακής) τριβής και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, είναι ίσοι, να δείξετε ότι το σώμα Σ, μετά τον στιγμιαίο μηδενισμό της ταχύτητάς του, επιστρέφει προς την βάση του κεκλιμένου.

Μονάδες 6

4.4 Αν δίνεται ότι η μάζα του σώματος Σ είναι $m = 2 \text{ kg}$, να υπολογίσετε την ενέργεια η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω τριβών, από την στιγμή της εκτόξευσης του σώματος προς τα πάνω στο κεκλιμένο, μέχρι να περάσει και πάλι από την αρχική του θέση καθώς κατεβαίνει επιστρέφοντας προς αυτήν.

Μονάδες 6

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, οι αντιστάσεις αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Απάντηση

4.1)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B_y = 0 \Leftrightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (1)$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (2)$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική φορά προς τα κάτω) :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow B_x + T = m\alpha \xrightarrow{(2)}$$

$$mg\eta\mu\varphi + \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi = m\alpha \Leftrightarrow \alpha = g(\eta\mu\varphi + \mu\sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow \alpha = 10 \cdot (0,6 + 0,25 \cdot 0,8) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

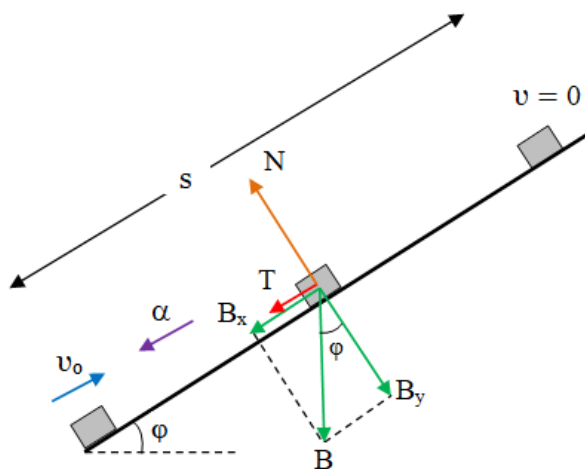
4.2) Κατά τη διάρκεια της ανόδου το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζω τη χρονική διάρκεια της ανόδου :

$$v = v_0 - \alpha t_1 \xrightarrow{v=0} \alpha t_1 = v_0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{\alpha} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}.$$

Το διάστημα που θα διανύσει μέχρι να σταματήσει, είναι :

$$s = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow s = \left(8 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow s = 4 \text{ m}.$$



Εναλλακτική απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή της εκτόξευσης μέχρι τη στιγμή που σταματά το σώμα :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow -(\Sigma F_x) \cdot s = 0 - K_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow (m\alpha) \cdot s = \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow s = \frac{v_0^2}{2\alpha} \Rightarrow s = 4\text{m}.$$

4.3)

Στο ψηλότερο σημείο το σώμα είναι ακίνητο ($v = 0$).

Η συνιστώσα του βάρους $\vec{B}_x$ τείνει να κινηθεί το σώμα προς τα κάτω.

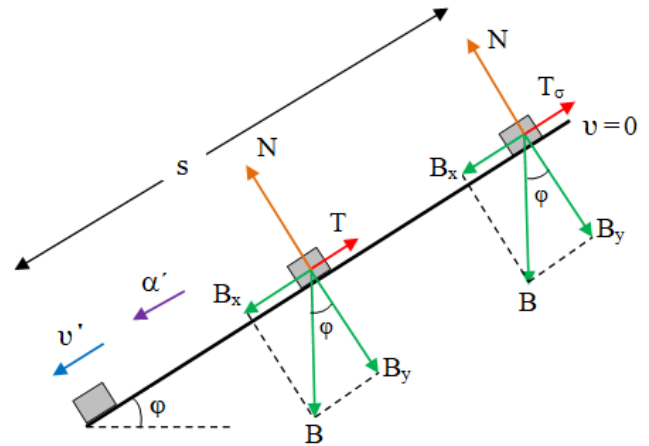
Η στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$ έχει φορά προς τα πάνω, ώστε να εμποδίσει την ολίσθηση του σώματος προς τα κάτω.

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$T_{\text{op}} = T = \mu mg \sin \varphi = 0,2mg.$$

$$B_x = mg \sin \varphi = 0,6mg.$$

Αφού $B_x > T_{\text{op}}$, το σώμα θα κινηθεί προς τα κάτω.



4.4)

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης είναι : $T = \mu mg \sin \varphi = 0,25 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0,8 \text{ N} \Rightarrow T = 4 \text{ N}.$

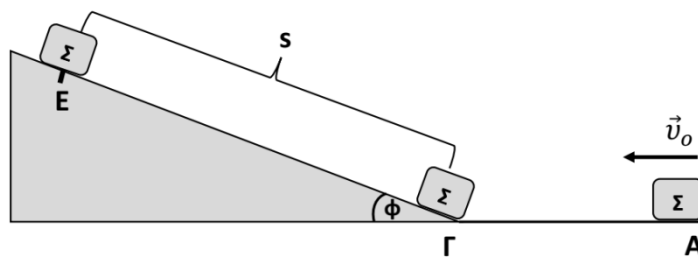
Υπολογίζω το συνολικό έργο της τριβής ολίσθησης :

$$W_T = -T \cdot s - T \cdot s = -2T \cdot s \Rightarrow W_T = -2(4 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -32 \text{ J}.$$

Το ποσό της ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια μέσω του έργου της τριβής, είναι :

$$Q_T = |W_T| = 32 \text{ J}.$$

91. (13669) Το σώμα του σχήματος, μάζας $m = 1 \text{ Kg}$, διέρχεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από τη θέση Α του λείου οριζοντίου επιπέδου ΑΓ (μήκους $ΑΓ = 20 \text{ m}$) με ταχύτητα μέτρου v_0 . Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ το σώμα έχει φτάσει στη θέση Γ και, χωρίς να αναπηδήσει, συνεχίζει την κίνησή του, ολισθαίνοντας στο κεκλιμένο επίπεδο ΓΕ (μεγάλου μήκους), γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{ολ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



4.1 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, καθώς αυτό κινείται στο επίπεδο ΑΓ και να υπολογίσετε την κινητική του ενέργεια στη θέση Γ. **Μονάδες 5**

4.2 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σε μια θέση μεταξύ Γ και Ε, καθώς αυτό ανεβαίνει και να τις αναλύσετε σε δύο κάθετους μεταξύ τους άξονες, εκ των οποίων ο ένας να είναι ο άξονας κίνησης. **Μονάδες 5**

4.3 Να υπολογίσετε το διάστημα s που θα διανύσει το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του. **Μονάδες 8**

4.4 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση Ε, αφού έχει μηδενιστεί η ταχύτητά του. Να διερευνήσετε αν θα επιστρέψει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Να δεχθείτε ότι η μέγιστη στατική τριβή είναι ίση με την τριβή ολίσθησης.

Δίνονται: $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

Α → Γ

Αφού το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο, άρα δεν ασκείται δύναμη στη διεύθυνση κίνησης, επομένως το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v_0 = \frac{(ΑΓ)}{t_1} = \frac{20 \text{ m}}{2 \text{ s}} \Rightarrow v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη στιγμή που φτάνει το σώμα στη θέση Γ, έχει κινητική ενέργεια

$$K_\Gamma = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \text{ J} \Rightarrow K_\Gamma = 50 \text{ J}.$$

4.2)

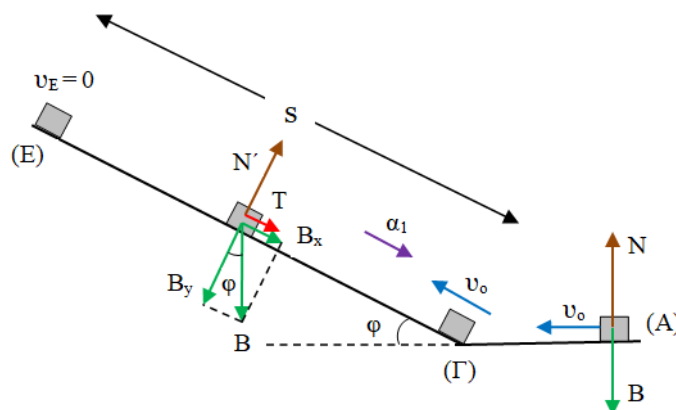
Στη διάρκεια της ανόδου στο κεκλιμένο επίπεδο, στο σώμα ασκούνται οι εξής δυνάμεις :

το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}'$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (με φορά προς τα κάτω).

Αναλύω το βάρος σε κάθετες συνιστώσες $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$ και υπολογίζω τα μέτρα τους :

$$B_x = m g \eta\mu \varphi = (10 \text{ N}) \cdot 0,5 \Rightarrow B_x = 5 \text{ N}.$$

$$B_y = m g \sigma\upsilon\nu \varphi = (10 \text{ N}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B_y = 5\sqrt{3} \text{ N}.$$



4.3)

Άνοδος στο κεκλιμένο επίπεδο ($\Gamma \rightarrow E$)

Στον άξονα y ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' = B_y \Rightarrow N' = 5\sqrt{3} \text{ N}$.

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N' = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 5\sqrt{3} \text{ N} \Rightarrow T = 5 \text{ N}$.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή (Γ) $\rightarrow$ (E) στο κεκλιμένο επίπεδο :

$$K_E - K_\Gamma = W_{B_x} + W_{T'} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -B_x \cdot s - T \cdot s \Leftrightarrow s = \frac{mv_o^2}{2(B_x + T)} \Rightarrow s = \frac{1 \cdot 100}{2(5+5)} \Rightarrow s = 5 \text{ m}.$$

4.4)

Στο ψηλότερο σημείο (E) το σώμα ηρεμεί στιγμιαία, άρα η τριβή είναι στατική.

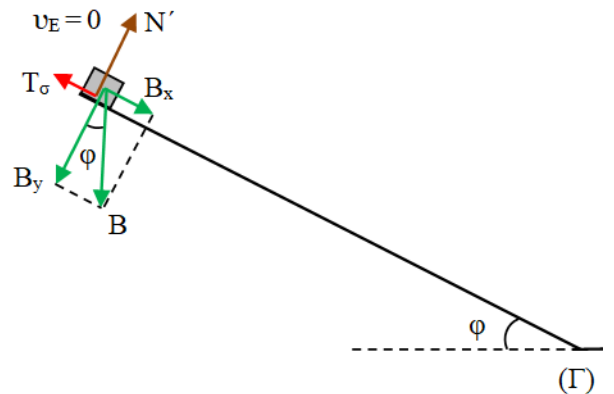
Αφού η $\vec{B}_x$ τείνει να κινήσει το σώμα προς τα κάτω, η στατική τριβή $\vec{T}_\sigma$ έχει φορά προς τα πάνω.

Δίνεται ότι : $T_{\sigma(\max)} = T = 5 \text{ N}$.

Επίσης : $B_x = 5 \text{ N}$.

Αφού $B_x = T_{\sigma(\max)} \Rightarrow \Sigma F_x = 0$.

Άρα το σώμα θα παραμείνει ακίνητο στη θέση E .



92. (13696) Ένα ορεινό χωριό της Θεσσαλίας είναι αποκλεισμένο και χρειάζεται άμεσα βοήθεια με τρόφιμα και φάρμακα. Η τροφοδοσία του χωριού πραγματοποιείται με ένα ελικόπτερο. Κατά την παράδοση των εφοδίων, ο χειριστής διατηρεί το ελικόπτερο ακίνητο σε ύψος $H = 40 \text{ m}$ από το έδαφος καθώς ο συγκυβερνήτης αφήνει διαδοχικά ελεύθερα όμοια δέματα, καθένα μάζας $m = 20 \text{ kg}$. Για την ασφαλή προσεδάφισή του, κάθε δέμα φέρει αλεξίπτωτο αμελητέας μάζας. Η πτώση του δέματος είναι συνεχώς κατακόρυφη, η δύναμη αντίστασης στο δέμα, θεωρείται, για λόγους απλότητας, σταθερή, ενώ το μέτρο της λαμβάνεται ίσο με 100 N .



4.1) Να χαρακτηρίσετε την κίνηση του δέματος και να γράψετε τις αντίστοιχες χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας $v(t)$ και της μετατόπισης $\Delta y(t)$.

4.2) Να υπολογίσετε το χρόνο πτώσης καθώς και το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το δέμα φτάνει στο έδαφος.

4.3) Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό του εδάφους, να υπολογίσετε την ταχύτητα του δέματος στο σημείο όπου η δυναμική του ενέργεια είναι ίση με το $1/4$ της αρχικής.

4.4) Νομίζοντας ότι έχει ολοκληρωθεί η παράδοση των εφοδίων, ο κυβερνήτης θέτει το ελικόπτερο σε κατακόρυφη ανοδική πορεία με ταχύτητα μέτρου $v_{\text{ελικ}} = 10 \text{ m/s}$ τη στιγμή που ο συγκυβερνήτης αφήνει ελεύθερο το τελευταίο δέμα. Εξ αιτίας του λάθους αυτού, το αλεξίπτωτο του τελευταίου δέματος δεν ανοίγει. Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα, να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα που διανύει το δέμα, μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

(Μονάδες 6+6+7+6)

Απάντηση

4.1)

Στο δέμα ασκείται το βάρος $\vec{B}$ που έχει κατακόρυφη διεύθυνση, φορά προς τα κάτω και σταθερό μέτρο $B = mg = 200 \text{ N}$, με αποτέλεσμα να κινηθεί προς τα κάτω.

Η αντίσταση του αέρα $\vec{F}_a$ είναι αντίρροπη από την ταχύτητα του δέματος, δηλαδή κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και έχει σταθερό μέτρο $F_a = 100 \text{ N}$.

Αφού $B > F_a$, το δέμα κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση μέτρου a .

Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow B - F_a = ma \Rightarrow a = \frac{B - F_a}{m} = \frac{(200 - 100) \text{ N}}{20 \text{ Kg}} \Rightarrow a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το δέμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = at \Rightarrow v = 5t. \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

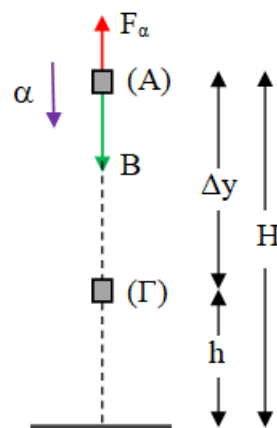
$$\text{Το μέτρο της μετατόπισης δίνεται από τη σχέση : } \Delta y = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow \Delta y = 2,5t^2. \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

4.2)

Τη χρονική στιγμή t_1 που φτάνει το δέμα στο έδαφος, ισχύει :

$$\Delta y = H = 40 \text{ m} \xrightarrow{(2)} 40 = 2,5t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = 16 \Rightarrow t_1 = 4 \text{ s}.$$

$$(1) \Rightarrow v_t = \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}) \Rightarrow v_t = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3)

Έστω Α η αρχική θέση και Γ η ζητούμενη θέση. Ισχύει :

$$U_{\Gamma} = \frac{U_A}{4} \Leftrightarrow mgh = \frac{mgH}{4} \Leftrightarrow h = \frac{H}{4} \Rightarrow h = 10 \text{ m.}$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη θέση Α στη θέση Γ, με $\Delta y = H - h = 30 \text{ m}$:

$$K_{\Gamma} - K_A = W_B + W_{F_a} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = (B - F_a) \cdot (\Delta y) \Leftrightarrow v^2 = \frac{2(B - F_a) \cdot (\Delta y)}{m} \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{2 \cdot 100 \cdot 30}{20} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 300 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow v = 10\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4)

Το τελευταίο δέμα ξεκινά με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = \vec{v}_e$ και κινείται αρχικά προς τα πάνω. Στη διάρκεια της κίνησης έχει σταθερή επιτάχυνση $\vec{g}$.

Ανοδος

Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : $v = v_0 - gt$. (3)

Στο ψηλότερο σημείο Δ :

$$v = 0 \xrightarrow{(3)} 0 = v_0 - gt_{av} \Leftrightarrow t_{av} = \frac{v_0}{g} \Rightarrow t_{av} = \frac{10}{10} \text{ s} \Rightarrow t_{av} = 1 \text{ s.}$$

Το μέγιστο ύψος από το σημείο Α είναι :

$$y_{\max} = v_0 t_{av} - \frac{1}{2}gt_{av}^2 = \left(10 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2\right) \text{ m} \Rightarrow y_{\max} = 5 \text{ m.}$$

Το διάστημα που διάνυσε το δέμα κατά τη διάρκεια της ανόδου είναι :

$$s_1 = y_{\max} = 5 \text{ m.}$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του s_1

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του δέματος από το σημείο Α μέχρι το ανώτερο σημείο Δ, σε απόσταση s_1 από το Α :

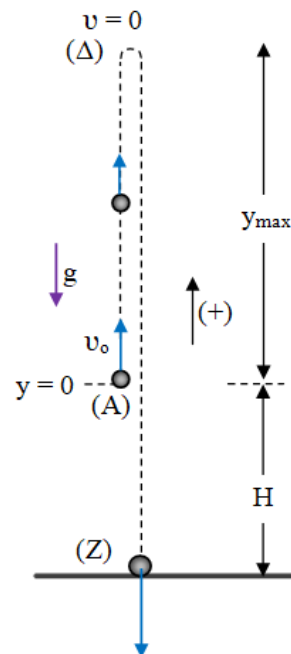
$$\Sigma W = K_{\Delta} - K_A \Leftrightarrow -(mg)s_1 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow s_1 = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow s_1 = \frac{10^2}{2 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow s_1 = 5 \text{ m.}$$

Κάθοδος

Μέχρι να φτάσει το δέμα στο έδαφος θα διανύσει διάστημα : $s_2 = H + y_{\max} = 45 \text{ m.}$

Άρα, το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το δέμα στη διάρκεια της κίνησης είναι:

$$s_{\text{ολ}} = s_1 + s_2 = 5 \text{ m} + 45 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 50 \text{ m.}$$



93. (13700) Μία ομάδα μαθητών αναλαμβάνει να κατασκευάσει και να εκτοξεύσει ένα μικρό σώμα που είναι εφοδιασμένο με κατάλληλους αισθητήρες θερμοκρασίας, πίεσης, υγρασίας κ.ά., έτσι ώστε να συλλέξει μετεωρολογικά δεδομένα. Στο σώμα είναι ενσωματωμένο μικρό αλεξίπτωτο αμελητέας μάζας το οποίο είναι προγραμματισμένο να ανοίξει στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του. Στην πρώτη τους δοκιμή, αν και κατάφεραν να εκτοξεύσουν το σώμα κατακόρυφα, το αλεξίπτωτο δεν άνοιξε λόγω κάποιου προβλήματος στην κατασκευή. Αν γνωρίζετε ότι η συνολική μάζα του σώματος είναι $m = 0,5 \text{ kg}$ και ότι το σώμα έφτασε σε μέγιστο ύψος $H = 45 \text{ m}$, να υπολογιστούν:



4.1) η ταχύτητα εκτόξευσης του σώματος, θεωρώντας την αντίσταση του αέρα καθώς και οποιαδήποτε άλλη τριβή αμελητέα,

Μονάδες 6

4.2) το ύψος από την επιφάνεια του εδάφους που βρίσκεται το σώμα, όταν η κινητική του ενέργεια είναι τετραπλάσια της δυναμικής,

Μονάδες 6

4.3) η μέση ταχύτητα του σώματος κατά τη διάρκεια της κίνησης του.

Μονάδες 6

Σε μία δεύτερη απόλυτα επιτυχημένη δοκιμή όταν το σώμα φτάσει στο μέγιστο ύψος H το αλεξίπτωτο ανοίγει. Για λόγους απλότητας θεωρήστε ότι η δύναμη που ασκείται από το αλεξίπτωτο στο σώμα, έχει σταθερό μέτρο, $F = 4,55 \text{ N}$.

4.4) Να υπολογιστεί ο χρόνος πτώσης του σώματος.

Μονάδες 7

Θεωρήστε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την επιφάνεια του εδάφους και την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Είναι γνωστό ότι και οι δύο εκτοξεύσεις γίνονται από μηχανισμό στην επιφάνεια του εδάφους.

Απάντηση

4.1)

Το σώμα κινείται με την επίδραση του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για τη θέση εκτόξευσης Α και τη θέση Δ στο μέγιστο ύψος Η :

$$K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgH \Leftrightarrow v_0^2 = 2gH \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{2gH} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2)

Έστω ότι στο σημείο Γ σε ύψος h είναι $K_\Gamma = 4U_\Gamma$.

Εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για τις θέσεις Γ, Δ :

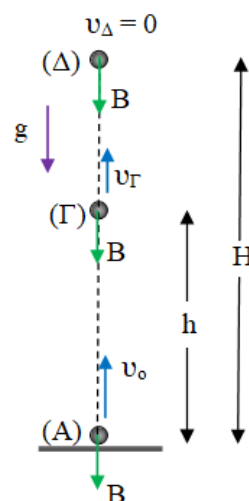
$$K_\Gamma + U_\Gamma = K_\Delta + U_\Delta \xrightarrow{K_\Gamma = 4U_\Gamma} 5U_\Gamma = U_\Delta \Rightarrow 5mgh = mgH \Rightarrow h = \frac{H}{5} \Rightarrow h = 9 \text{ m}.$$

4.3)

Άνοδος (Α → Δ)

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου $\alpha = g$.

Η ταχύτητά του υπολογίζεται από τη σχέση $v = v_0 - gt$. (1)



Στο ψηλότερο σημείο Δ :

$$v_{\Delta} = 0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_o - gt_{\alpha} \Leftrightarrow t_{\alpha} = \frac{v_o}{g} \Rightarrow t_{\alpha} = \frac{30}{10} \text{ s} \Rightarrow t_{\alpha} = 3 \text{ s}.$$

Κάθοδος (Δ → Α)

Το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος H. Ισχύει :

$$H = \frac{1}{2}gt_{\kappa}^2 \Leftrightarrow t_{\kappa}^2 = \frac{2H}{g} \Rightarrow t_{\kappa} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow t_{\kappa} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} \text{ s} = \sqrt{9} \text{ s} \Rightarrow t_{\kappa} = 3 \text{ s}.$$

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σώμα, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = 2H = 90 \text{ m}.$$

Η συνολική διάρκεια της κίνησης, είναι :

$$t_{\text{ολ}} = t_{\alpha} + t_{\kappa} = 6 \text{ s}.$$

Η μέση ταχύτητα του σώματος για τη διαδρομή Α → Δ → Α έχει τιμή :

$$v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{90 \text{ m}}{6 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4)

Στη διάρκεια της πτώσης ασκούνται στο σώμα δύο σταθερές κατακόρυφες δυνάμεις και κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α.

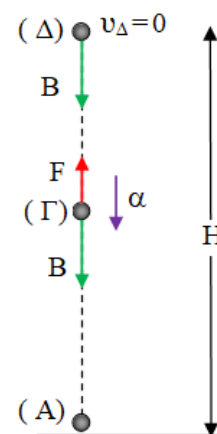
Ορίζω θετική φορά προς τα κάτω και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow B - F = ma \Leftrightarrow \alpha = \frac{mg - F}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{(5 - 4,55) \text{ N}}{0,5 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_o' = 0$).

Ισχύει :

$$H = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \Leftrightarrow (\Delta t)^2 = \frac{2H}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2H}{\alpha}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{0,9}} \text{ s} = \sqrt{100} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 10 \text{ s}.$$



94. (13701) Νεαρή σκιέρ που μαζί με τον εξοπλισμό της έχει μάζα, $m = 50 \text{ kg}$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ διέρχεται από το σημείο Α οριζόντια χιονισμένης πίστας με ταχύτητα μέτρου 11 m/s .

Το οριζόντιο τμήμα της πίστας στο τέλος του οποίου βρίσκεται ο τερματισμός (σημείο Β) έχει μήκος 22 m και κατά μήκος του η αθλήτρια χρησιμοποιεί συνέχεια τα μπαστούνια στήριξης

με αποτέλεσμα να της ασκείται δύναμη σταθερού μέτρου $F = 250 \text{ N}$ η οποία σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια πίστα. Αφού η αθλήτρια τερματίσει παύει να χρησιμοποιεί τα μπαστούνια, οπότε η $\vec{F}$ καταργείται και ταυτόχρονα εισέρχεται σε πλαγιά γωνία κλίσης επίσης φ με αποτέλεσμα να επιβραδυνθεί και τελικά να σταματήσει (σημείο Γ).

Δεδομένου ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης τα πέδιλα της σκιέρ με το χιόνι παρουσιάζουν συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$.

4.1) να υπολογίσετε το μέτρο της κάθετης δύναμης επαφής $\vec{N}$, στην οριζόντια πίστα, **Μονάδες 6**

4.2) να αποδείξετε ότι στην οριζόντια πίστα (ΑΒ), η σκιέρ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Μονάδες 6

4.3) να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή όπου η αθλήτρια ακινητοποιείται στην πλαγιά καθώς και το μήκος της διαδρομής που διάνυσε από το σημείο Α έως το σημείο Γ.

Μονάδες 8

4.4) να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται από την πλαγιά στην αθλήτρια κατά τη διάρκεια της κίνησής της σε αυτήν.

Μονάδες 5

Να θεωρήσετε ότι η σκιέρ και ο εξοπλισμός έχουν συμπεριφορά υλικού σημείου, ότι η ταχύτητα στη βάση της πλαγιάς είναι ίσου μέτρου με την ταχύτητα εξόδου από το οριζόντιο επίπεδο και ότι στο σημείο Β δεν συμβαίνει καμία αναπήδηση.

Δίνονται, $\eta\mu\varphi = 0,8$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,6$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

Στην οριζόντια πίστα :

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ και υπολογίζω τα μέτρα τους.

$$F_x = F \sigma\upsilon\nu\varphi = 150 \text{ N.}$$

$$F_y = F \eta\mu\varphi = 200 \text{ N.}$$

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow$$

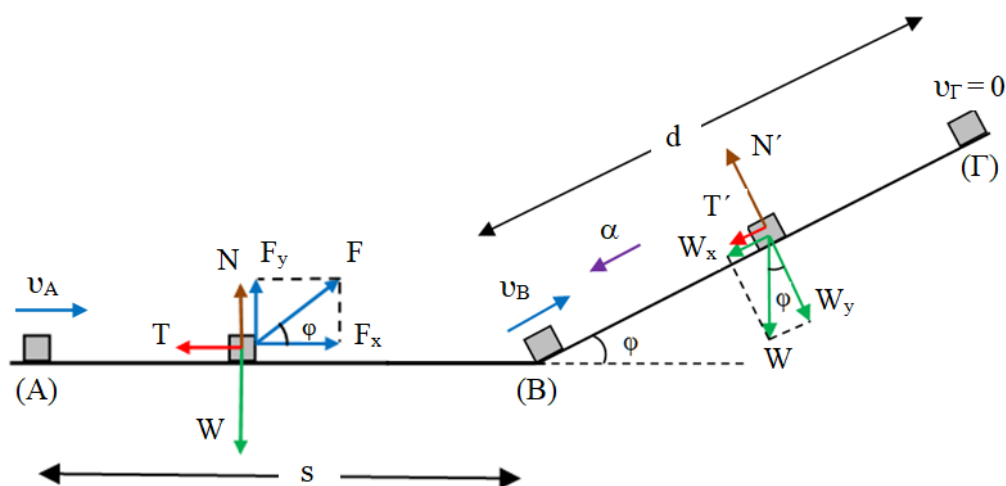
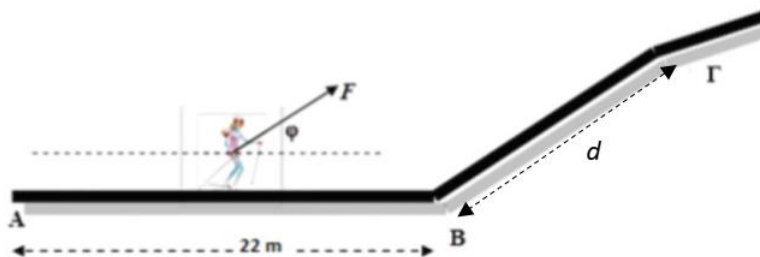
$$N + F_y - W = 0 \Leftrightarrow$$

$$N = mg - F_y \Rightarrow N = 500 \text{ N} - 200 \text{ N} \Rightarrow N = 300 \text{ N.}$$

4.2)

Σύμφωνα με το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N = 0,5 \cdot 300 \text{ N} \Rightarrow T = 150 \text{ N.}$

Στον άξονα x ισχύει : $\Sigma F_x = F_x - T = 150 \text{ N} - 150 \text{ N} \Rightarrow \Sigma F_x = 0.$



Επομένως, στην οριζόντια πίστα η σκιέρ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και φτάνει στο Β με ταχύτητα μέτρου : $v_B = v_A = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.3)

Στο οριζόντια πίστα (A → B)

Η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι : $\Delta t_1 = \frac{s}{v_A} = \frac{22 \text{ m}}{11 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow \Delta t_1 = 2 \text{ s}$.

Στην πλαγιά (B → Γ)

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{W}_x$, $\vec{W}_y$ και υπολογίζω τα μέτρα τους.

$$W_x = mg \mu \phi = (500 \text{ N}) 0,8 \Rightarrow W_x = 400 \text{ N}.$$

$$W_y = mg \sigma \nu \phi = (500 \text{ N}) 0,6 \Rightarrow W_y = 300 \text{ N}.$$

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει : } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' = W_y \Rightarrow N' = 300 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T' = \mu N' = 0,5 \cdot 300 \text{ N} \Rightarrow T' = 150 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (θετική φορά προς τα κάτω) :

$$\Sigma F_x = m a \Leftrightarrow B_x + T' = m a \Leftrightarrow a = \frac{B_x + T'}{m} \Rightarrow a = \frac{(400 + 150) \text{ N}}{50 \text{ Kg}} \Rightarrow a = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η σκιέρ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_B = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\text{Η ταχύτητα της σκιέρ υπολογίζεται από τη σχέση : } v = v_B - a(\Delta t). \quad (1)$$

Τη στιγμή που σταματά στο σημείο Γ ισχύει :

$$v_\Gamma = 0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_B - a(\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{v_B}{a} \Rightarrow \Delta t_2 = 1 \text{ s}.$$

Ο συνολικός χρόνος κίνησης για τη διαδρομή A → Γ είναι :

$$\Delta t_{\text{ολ}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2 \text{ s} + 1 \text{ s} \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ}} = 3 \text{ s}.$$

Αφού $t_0 = 0$, άρα η σκιέρ θα σταματήσει τη χρονική στιγμή $t_2 = 3 \text{ s}$.

Το μήκος της διαδρομής που διανύει η σκιέρ στην πλαγιά είναι :

$$d = v_B(\Delta t_2) - \frac{1}{2} a(\Delta t_2)^2 = \left(11 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow d = 5,5 \text{ m}.$$

Το συνολικό μήκος της διαδρομής είναι :

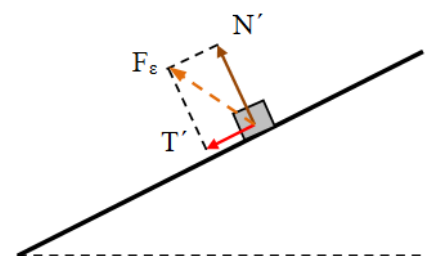
$$s_{\text{ολ}} = s + d = 22 \text{ m} + 5,5 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 27,5 \text{ m}.$$

4.4)

Η δύναμη $\vec{F}_\epsilon$ που ασκεί η πλαγιά στη σκιέρ, είναι η συνισταμένη της κάθετης δύναμης $\vec{N}'$ και της τριβής $\vec{T}'$: $\vec{F}_\epsilon = \vec{N}' + \vec{T}'$.

Αφού οι δυνάμεις $\vec{N}'$ και $\vec{T}'$ είναι κάθετες μεταξύ τους, άρα το μέτρο της $\vec{F}_\epsilon$ υπολογίζεται με το Πυθαγόρειο Θεώρημα :

$$F_\epsilon = \sqrt{N'^2 + T'^2} = \sqrt{300^2 + 150^2} \text{ N} = \sqrt{5 \cdot 150^2} \text{ N} \Rightarrow F_\epsilon = 150\sqrt{5} \text{ N}.$$



Σχόλιο : Στο σχήμα της εκφώνησης φαίνεται ότι το σημείο Γ βρίσκεται στο ανώτερο τμήμα της πλαγιάς, το οποίο έχει διαφορετική κλίση από το κατώτερο τμήμα.

95. (13703) Αυτοκίνητο ξεκινά να κινείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, με σταθερή επιτάχυνση σε ευθύγραμμο και οριζόντιο δρόμο. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 8 \text{ s}$ ο οδηγός του αυτοκινήτου, αντιλαμβάνεται ότι μπροστά του ο δρόμος είναι κλειστός λόγω έργων, εφαρμόζει απότομα τα φρένα με αποτέλεσμα οι τροχοί του αυτοκινήτου να μπλοκάρουν. Το αυτοκίνητο κινείται για διάστημα ίσο με 16 m με μπλοκαρισμένους τροχούς και τελικά ακινητοποιείται, αφήνοντας στο δρόμο χαρακτηριστική μαύρη γραμμή από τα λιωμένα ελαστικά του (η Τροχαία την αποκαλεί γραμμή φρεναρίσματος).

Αξιοποιώντας τα παρακάτω δεδομένα:

- Η συνολική μάζα αυτοκινήτου και οδηγού είναι 1250 kg .
- Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των ελαστικών και του οδοστρώματος είναι ίσος με $0,8$.
- Το όριο ταχύτητας στο σημείο που ο οδηγός εφαρμόζει τα φρένα είναι 72 km/h .
- Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με 10 m/s^2 .

4.1) να υπολογίσετε το έργο της τριβής ολίσθησης κατά τη διάρκεια του φρεναρίσματος,

Μονάδες 5

4.2) να ελέγξετε αν τη χρονική στιγμή t_1 που ο οδηγός εφαρμόζει τα φρένα, έχει παραβιάσει το όριο ταχύτητας,

Μονάδες 7

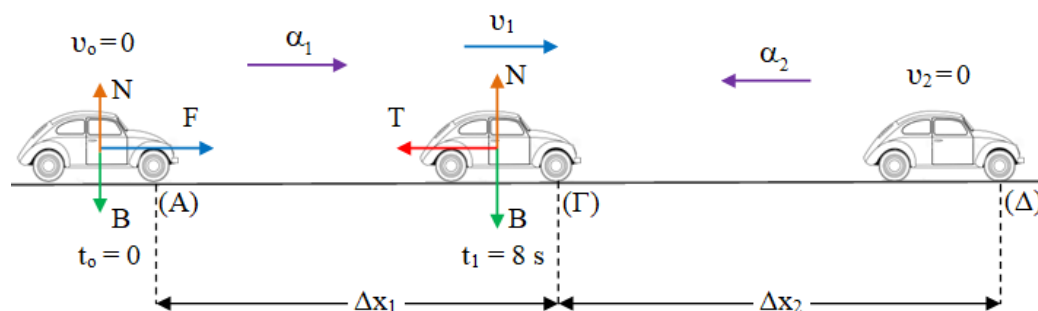
4.3) να υπολογίσετε την σταθερή επιτάχυνση του αυτοκινήτου καθώς και το διάστημα που διάνυσε στη χρονική διάρκεια από $0 \rightarrow t_1$,

Μονάδες 6

4.4) να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F που επιταχύνει το αυτοκίνητο στη χρονική διάρκεια από $0 \rightarrow t_1$.

Μονάδες 7

Οι αντιστάσεις του αέρα να μην ληφθούν υπόψη.



Απάντηση

4.1) Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg \Rightarrow N = 12500 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 0,8 \cdot 12500 \text{ N} \Rightarrow T = 10000 \text{ N}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης στη διάρκεια του φρεναρίσματος είναι :

$$W_T = -T(\Delta x_2) = -(10000 \text{ N})(16 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -160000 \text{ J}.$$

4.2)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη θέση Γ (χρονική στιγμή t_1) μέχρι τη θέση Δ που σταματά το αυτοκίνητο :

$$K_\Delta - K_\Gamma = W_T \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_T \Leftrightarrow v_1^2 = -\frac{2W_T}{m} \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{-\frac{2W_T}{m}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_1 = \sqrt{-\frac{2 \cdot (-160000)}{1250}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{256} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το όριο ταχύτητας είναι : $v_{\max} = 72 \frac{\text{Km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, άρα ο οδηγός δεν το παραβίασε.

4.3)

Στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$ το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση : $\alpha_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{16 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{8 \text{s}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Το μέτρο της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (64 \text{s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 64 \text{m}.$$

4.4)

Αφού η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, η μοναδική δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο στη διεύθυνση της κίνησης κατά τη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \text{ s} \rightarrow t_1 = 8 \text{ s}$ είναι η κινητήρια δύναμη $\vec{F}$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F_x = m \alpha_1 \Leftrightarrow F = m \alpha_1 \Rightarrow F = (1250 \text{Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F = 2500 \text{N}.$$

Σχόλια :

1) Αν υποθέσουμε ότι μπλοκάρουν ταυτόχρονα οι εμπρός και οι πίσω τροχοί, τότε η γραμμή φρεναρίσματος είναι : $s = \Delta x_2 + d$ (σχήμα), όπου Δx_2 η μετατόπιση ενός σημείου του αμαξώματος μέχρι να σταματήσει και d η απόσταση μεταξύ εμπρός και πίσω τροχών (μεταξόνιο).

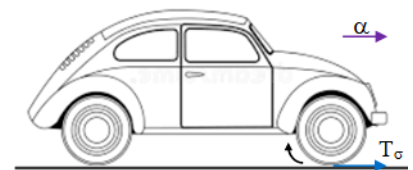
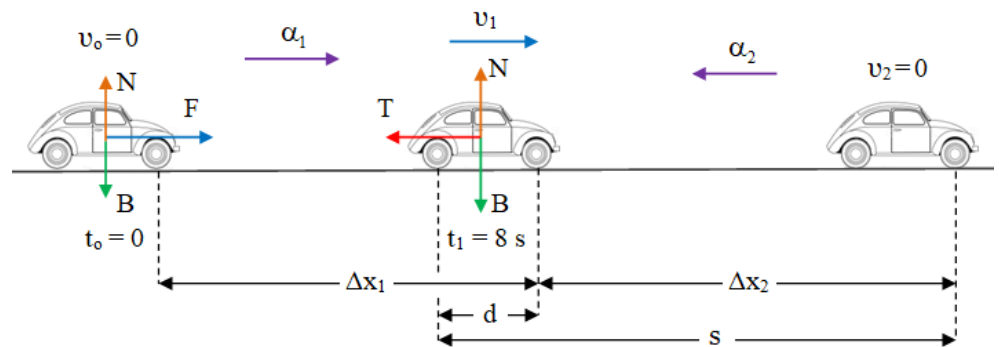
Επομένως, αν το αυτοκίνητο είχε μεταξόνιο π.χ. $d = 2,5 \text{ m}$, έπρεπε η εκφώνηση να έδινε το μήκος της γραμμής φρεναρίσματος $s = 18,5 \text{ m}$ ώστε η μετατόπιση να είναι πάλι $\Delta x_2 = s - d = 16 \text{ m}$.

2) Στη διάρκεια της επιταχυνόμενης κίνησης, στο αυτοκίνητο

ασκείται μόνο η κινητήρια δύναμη $\vec{F}$ (η οποία είναι η συνισταμένη των στατικών τριβών που ασκούνται στους κινητήριους τροχούς).

Εφ' όσον οι τροχοί περιστρέφονται χωρίς να ολισθαίνουν, δεν υπάρχει τριβή ολίσθησης.

Μόνο στη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης (που οι τροχοί έχουν μπλοκάρει και δεν περιστρέφονται) υπάρχει τριβή ολίσθησης.



96. (13705) Στις καλοκαιρινές διακοπές το αυτοκίνητό σας (A1), που μαζί με τους επιβάτες έχει μάζα 2000kg , ακινητοποιείται από κάποια βλάβη. Ευτυχώς για εσάς, μετά από λίγο περνάει μια φιλική οικογένεια, με το αυτοκίνητό της (A2), που έχει μάζα μαζί με τους επιβάτες του 3000kg , και προσφέρεται να σας ρυμουλκήσει στο πιο κοντινό συνεργείο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείτε ένα σχοινί, το οποίο να θεωρήσετε μη ελαστικό και με αμελητέα μάζα.

Γνωρίζετε ότι το αυτοκίνητό σας και το αυτοκίνητο των φίλων σας εμφανίζουν συντελεστές τριβής ολίσθησης με τον οριζόντιο δρόμο ίσους με 0,3 και 0,4 αντιστοίχως, ενώ η δύναμη που επιταχύνει το αμάξι των φίλων σας έχει μέτρο ίσο με $F = 33000\text{N}$.

4.1) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κάθε αυτοκίνητο, όταν κινούνται ρυμουλκώντας το ένα το άλλο, και να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής που δέχεται το καθένα.

Μονάδες 7

4.2) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση την οποία αποκτούν τα δύο αυτοκίνητα.

Μονάδες 6

4.3) Να υπολογίσετε την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του αυτοκινήτό σας, όταν αυτό έχει μετατοπιστεί κατά 6 m.

Μονάδες 7

4.4) Τη χρονική στιγμή που το σύστημα των δύο αυτοκινήτων έχει μετατοπιστεί κατά 6 m χαλαίει και το αυτοκίνητο των φίλων σας, οπότε η δύναμη F παύει να δρα. Να ελέγξετε αν το σχοινί που συνδέει τα δύο αυτοκίνητα θα χαλαρώσει οπότε υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης.

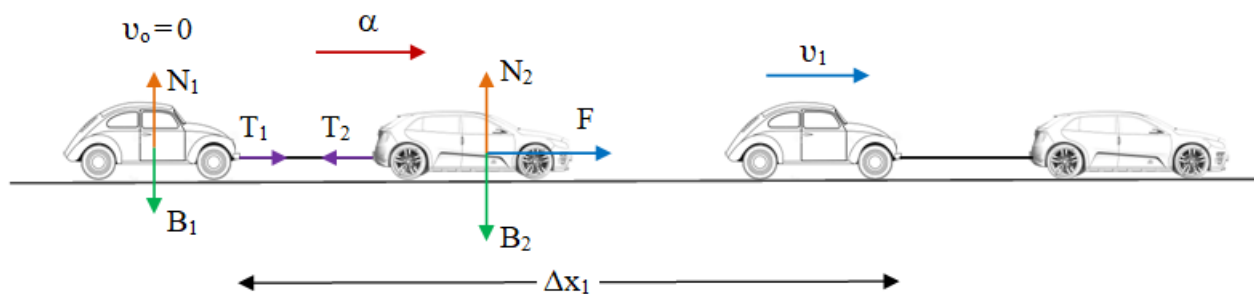
ΥΠΟΔΕΙΞΗ (για το 4.4): Θεωρήστε ότι το νήμα δεν χαλαρώνει και υπολογίστε την τιμή της δύναμης που ασκεί. Ελέγξτε αν η τιμή που προσδιορίσατε είναι λογική για σχοινί.

Μονάδες 5

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)



Αυτοκίνητο A1

Στη διεύθυνση της κίνησης (άξονας x) ασκείται μόνο η τάση του σχοινιού $\vec{T}_1$.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση (άξονας y) ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_1$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}_1$ από το οδόστρωμα.

Αυτοκίνητο A2

Στη διεύθυνση της κίνησης (άξονας x) ασκούνται : η κινητήρια δύναμη $\vec{F}$ και η τάση του σχοινιού $\vec{T}_2$.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση (άξονας y) ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_2$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}_2$ από το οδόστρωμα.

Παρατήρηση :

Αφού οι τροχοί των δύο αυτοκινήτων περιστρέφονται χωρίς να ολισθαίνουν, άρα δεν υπάρχει τριβή ολίσθησης.

Κατά τη λύση της άσκησης δεν λαμβάνονται υπόψη οι δυνάμεις στατικής τριβής ανάμεσα στα ελαστικά και το οδόστρωμα (για το αυτοκίνητο A1) καθώς και η αντίσταση του αέρα.

4.2)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε αυτοκίνητο.

Αυτοκίνητο A₁

$$\Sigma F_x = m_1 \alpha \Leftrightarrow T_1 = m_1 \alpha. \quad (1)$$

Αυτοκίνητο A₂

$$\Sigma F_x = m_2 \alpha \Leftrightarrow F - T_2 = m_2 \alpha. \quad (2)$$

Αφού η μάζα του σχοινιού είναι αμελητέα, ισχύει : $T_1 = T_2 = T$.

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$T + F - T = m_1 \alpha + m_2 \alpha \Leftrightarrow F = (m_1 + m_2) \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F}{m_1 + m_2} \Rightarrow \alpha = \frac{33000 \text{ N}}{5000 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.3)

1ος τρόπος

Κάθε αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$v_1 = \alpha t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_1}{\alpha}. \quad (3)$$

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \xrightarrow{(3)} \Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{v_1}{\alpha} \right)^2 \Leftrightarrow \Delta x_1 = \frac{v_1^2}{2\alpha} \Leftrightarrow v_1^2 = 2\alpha (\Delta x_1). \quad (4)$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του A₁ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , είναι :

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \xrightarrow{(4)} \Delta K_1 = m_1 \alpha (\Delta x_1) \Rightarrow \Delta K_1 = 2000 \cdot 6,6 \cdot 6 \text{ J} \Rightarrow \Delta K_1 = 79200 \text{ J}.$$

2ος τρόπος

$$(1) \Rightarrow T_1 = (2000 \text{ Kg}) \left(6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow T_1 = 13200 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη μετακίνηση του A₁ :

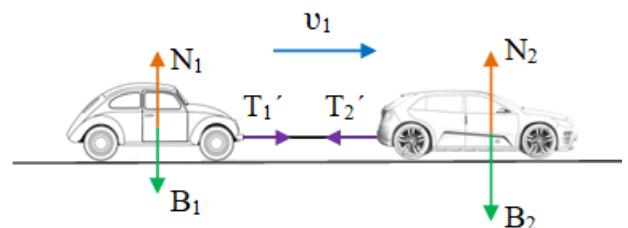
$$\Delta K_1 = \Sigma W = T_1 (\Delta x_1) = (13200 \text{ N})(6 \text{ m}) \Rightarrow \Delta K_1 = 79200 \text{ J}.$$

4.4)

Μέχρι τη στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ τα δύο αυτοκίνητα έχουν ίσες ταχύτητες και η απόστασή τους είναι σταθερή, με το σχοινί τεντωμένο.

Υποθέτουμε ότι το σχοινί παραμένει τεντωμένο αμέσως μόλις καταργηθεί η κινητήρια δύναμη $\vec{F}$.

Στην περίπτωση αυτή η τάση $\vec{T}_1'$ θα επιτάχυνε το A₁ ενώ η $\vec{T}_2'$ θα επιβράδυνε το A₂, με αποτέλεσμα η μεταξύ τους απόσταση να μειωθεί και το σχοινί να χαλαρώσει.

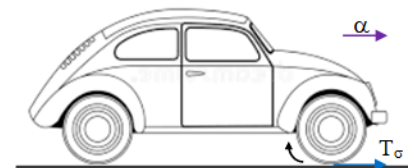


Σχόλιο : Η άσκηση είναι λανθασμένη!

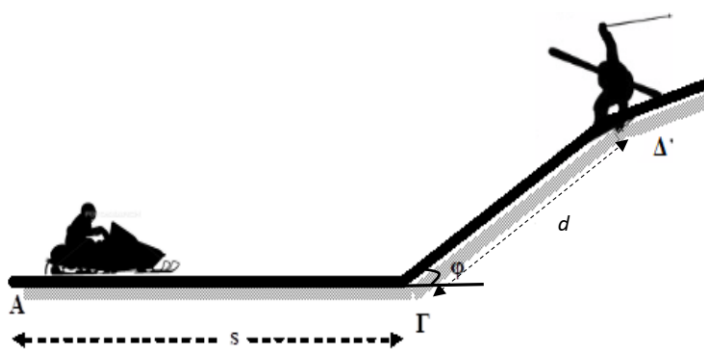
Όταν ένα όχημα κινείται κανονικά (οι τροχοί του περιστρέφονται χωρίς να ολισθαίνουν), δεν υπάρχει τριβή ολίσθησης.

Η δύναμη που κινεί το όχημα είναι η **κινητήρια δύναμη $\vec{F}$** (η οποία είναι η **συνισταμένη των στατικών τριβών** που ασκούνται στους κινητήριους τροχούς).

Η **τριβή ολίσθησης εμφανίζεται μόνο όταν χάνεται η πρόσφυση** π.χ. κατά τη διάρκεια μιας απότομης εκκίνησης (οπότε «σπινάρουν» οι τροχοί) ή ενός δυνατού φρεναρίσματος (εφ' όσον μπλοκάρουν οι τροχοί).



97. (13706) Σε ένα χιονοδρομικό κέντρο, ένα παιδί κάνει snowmobile. Η συνολική μάζα του παιδιού και του snowmobile είναι $m = 100\text{kg}$. Το snowmobile ξεκινά να κινείται σε οριζόντια επιφάνεια με την οποία έχει συντελεστή τριβής $\mu_1 = 0,2$, με την επίδραση σταθερής μέσης οριζόντιας δύναμης μέτρου $F = 300\text{N}$. Αφού διανύσει διάστημα $s = 50\text{m}$ στην οριζόντια επιφάνεια το όχημα συναντά ανηφορική χιονισμένη πλαγιά γωνίας κλίσης φ και ταυτόχρονα παύει να ασκείται πάνω του η δύναμη F (σβήνει η μηχανή του).



Να υπολογίσετε :

4.1) Το μέτρο της επιτάχυνσης του οχήματος στο οριζόντιο επίπεδο.

Μονάδες 6

4.2) Τη χρονική διάρκεια κίνησης μέχρι τη βάση της χιονισμένης πλαγιάς καθώς και το μέτρο της ταχύτητας του εκεί (Σημείο Γ).

Μονάδες 6

4.3) Το μέτρο της επιβράδυνσης του οχήματος στο κεκλιμένο επίπεδο (χιονισμένη πλαγιά) αν γνωρίζετε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης οχήματος – πλαγιάς είναι $\mu_2 = 0,5$.

Μονάδες 7

4.4) Αν σε απόσταση $d = 10\text{m}$ από τη βάση της πλαγιάς, βρίσκεται τραυματισμένος ένας σκιέρ, να ελέγξετε αν το παιδί θα καταφέρει να αποφύγει τη σύγκρουση με τον σκιέρ, λαμβάνοντας υπόψη ότι η πορεία του θα παραμείνει ευθύγραμμη.

Μονάδες 6

Να θεωρήσετε ότι το παιδί και το snowmobile έχουν συμπεριφορά υλικού σημείου, ότι η ταχύτητα του οχήματος στη βάση της πλαγιάς είναι ίσου μέτρου με την ταχύτητα εξόδου από το οριζόντιο επίπεδο και ότι στο σημείο Γ δεν συμβαίνει καμία αναπήδηση.

Δίνονται: $\eta\mu\varphi = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

Οριζόντια πίστα (A → Γ) :

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_1 = mg \Rightarrow$$

$$N_1 = 1000\text{ N}.$$

Σύμφωνα με το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_1 = \mu_1 N_1 = 0,2 \cdot 1000\text{ N} \Rightarrow$$

$$T_1 = 200\text{ N}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης α_1 :

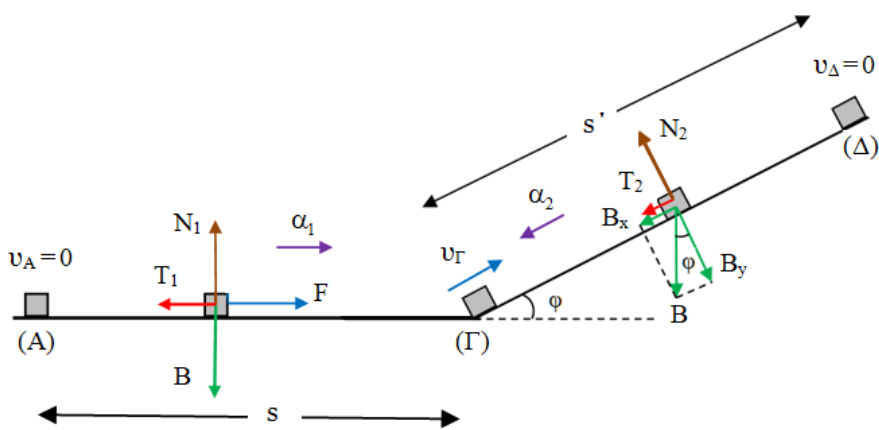
$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F - T_1 = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F - T_1}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(300 - 200)\text{ N}}{100\text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.2)

Στην οριζόντια πίστα το όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$). Ισχύει :

$$s = \frac{1}{2} \alpha_1 (\Delta t_1)^2 \Leftrightarrow (\Delta t_1)^2 = \frac{2s}{\alpha_1} \Leftrightarrow \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2s}{\alpha_1}} \Rightarrow \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{1}} \Rightarrow \Delta t_1 = 10\text{ s}.$$

$$\text{Στη θέση Γ έχει ταχύτητα μέτρου : } v_\Gamma = \alpha_1 (\Delta t_1) = \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (10\text{ s}) \Rightarrow v_\Gamma = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3)

Κεκλιμένη επιφάνεια ($\Gamma \rightarrow \Delta$)

Αναλύω το βάρος σε συνιστώσες $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$ και υπολογίζω τα μέτρα τους :

$$B_x = mg \sin \varphi = 1000 \text{ N} \cdot 0,6 \Rightarrow B_x = 600 \text{ N},$$

$$B_y = mg \cos \varphi = 1000 \text{ N} \cdot 0,8 \Rightarrow B_y = 800 \text{ N}.$$

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει : } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 = B_y \Rightarrow N_2 = 800 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T_2 = \mu_2 N_2 = 0,5 \cdot 800 \text{ N} \Rightarrow T_2 = 400 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική φορά προς τα κάτω) και υπολογίζω το μέτρο της επιβράδυνσης α_2 :

$$\Sigma F_x = m \alpha_2 \Leftrightarrow B_x + T_2 = m \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{B_x + T_2}{m} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{(600 + 400) \text{ N}}{100 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.4)

Το όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_\Gamma = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\text{Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : } v = v_\Gamma - \alpha_2 (\Delta t). \quad (1)$$

Έστω ότι θα σταματήσει μετά από χρονική διάρκεια Δt_2 . Ισχύει :

$$v = 0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_\Gamma - \alpha_2 (\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{v_\Gamma}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 1 \text{ s}.$$

Το μήκος της διαδρομής που θα διανύσει μέχρι να σταματήσει είναι :

$$s' = v_\Gamma (\Delta t_2) - \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t_2)^2 = \left(10 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow s' = 5 \text{ m}.$$

Αφού $s' < d$, άρα το όχημα θα αποφύγει τη σύγκρουση με τον σκιέρ.

Εναλλακτική απάντηση

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη βάση Γ της πλαγιάς μέχρι τη θέση Δ που σταματά, σε απόσταση s :

$$K_\Delta - K_\Gamma = \Sigma W \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_\Gamma^2 = -(m \alpha_2) s \Leftrightarrow s = \frac{v_\Gamma^2}{2 \alpha_2} \Rightarrow s = \frac{10^2}{2 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow s = 5 \text{ m}.$$

Αφού $s' < d$, άρα το όχημα θα αποφύγει τη σύγκρουση με τον σκιέρ.

Σχόλιο :

Η διατύπωση «με την επίδραση σταθερής μέσης οριζόντιας δύναμης» είναι άστοχη.

Η έννοια της μέσης δύναμης χρησιμοποιείται όταν το μέτρο της δύναμης δεν είναι σταθερό.

98. (13707) Οι δύο μικροί μεταλλικοί κύβοι Σ_1 και Σ_2 του σχήματος, με μάζες $m_1 = 2 \text{ Kg}$ και $m_2 = 4 \text{ Kg}$ αντίστοιχα, μπορούν να κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο σε παράλληλες ράγες.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο κύβος Σ_1

διέρχεται από το σημείο A με

ταχύτητα μέτρου $v_0 = 5 \text{ m/s}$, ενώ στον ακίνητο κύβο Σ_2 ξεκινά να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη με μέτρο $F = 8 \text{ N}$ και φορά που φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται ότι τα σημεία A, B απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 150 \text{ m}$ και ότι ως θετική λαμβάνεται η φορά της ταχύτητας του Σ_1 .

Αν οι κύβοι συναντώνται τη χρονική στιγμή t_1 , να υπολογίσετε:

4.1) την επιτάχυνση που θα αποκτήσει ο κύβος Σ_2 ,

Μονάδες 5

4.2) τη χρονική στιγμή t_1 που οι κύβοι θα συναντηθούν καθώς και σε ποια απόσταση από το σημείο A θα συμβεί η συνάντηση,

Μονάδες 8

4.3) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$.

Μονάδες 5

4.4) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας κάθε κύβου σε συνάρτηση με το χρόνο, στο ίδιο σύστημα βαθμολογημένων αξόνων για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow t_1$.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$, ο κύβος Σ_2 θα αποκτήσει επιτάχυνση $\vec{a}$ που έχει φορά προς τα αριστερά.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο

της Μηχανικής για τον Σ_2 στον άξονα x (θετική φορά προς τα δεξιά) και υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης α :

$$\Sigma F_x = m_2 \alpha \Leftrightarrow -F = m_2 \alpha \Leftrightarrow \alpha = -\frac{F}{m_2} \Rightarrow \alpha = -\frac{8 \text{ N}}{4 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.2)

κύβος Σ_1 : εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Σε χρόνο t θα διανύσει απόσταση: $s_1 = v_0 t \Rightarrow s_1 = 5t$. (S.I.) (1)

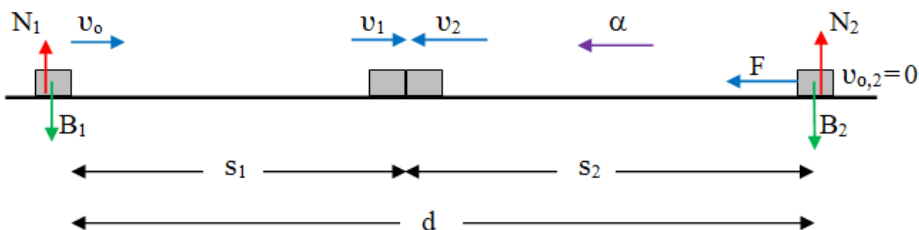
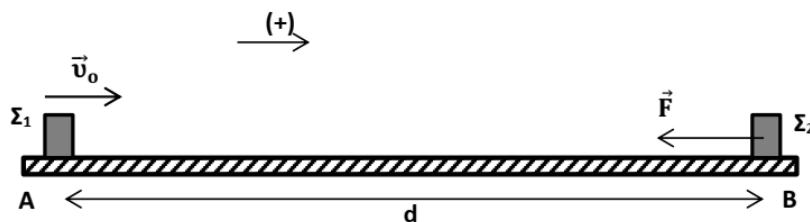
κύβος Σ_2 : εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_{0,2} = 0$).

Σε χρόνο t θα διανύσει απόσταση: $s_2 = \frac{1}{2} |\alpha| t^2 \Rightarrow s_2 = t^2$. (S.I.) (2)

Τη στιγμή που συναντώνται οι κύβοι, ισχύει:

$$s_1 + s_2 = d \xrightarrow{(1),(2)} 5t + t^2 = 150 \Leftrightarrow t^2 + 5t - 150 = 0.$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-150) = 25 + 600 = 625.$$



$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm 25}{2} = \begin{cases} \frac{-5+25}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ s} \\ \frac{-5-25}{2} = -\frac{30}{2} = -15 \text{ s (απορρίπτεται)} \end{cases}$$

Άρα, οι κύβοι θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$, σε απόσταση από το Α :
 $s_1 = 5 \cdot 10 \text{ m} = 50 \text{ m}$.

4.3)

Μέχρι τη στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$, ο Σ_2 θα έχει διανύσει απόσταση : $s_2 = 10^2 \text{ m} = 100 \text{ m}$.

Το έργο της δύναμης σε αυτή τη χρονική διάρκεια είναι :

$$W = F \cdot s_2 = (8 \text{ N})(100 \text{ m}) \Rightarrow W = 800 \text{ J}.$$

4.4)

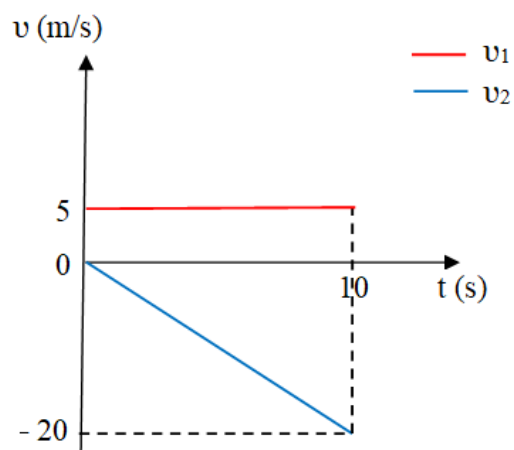
Ο κύβος Σ_1 έχει σταθερή ταχύτητα με αλγεβρική τιμή : $v_1 = v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση :

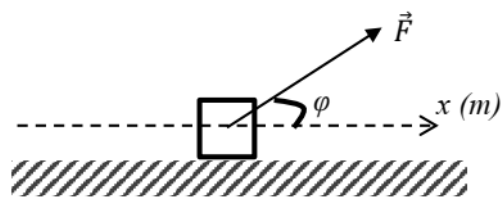
$$v_2 = at \Rightarrow v_2 = -2t. \text{ (S.I.)} \quad (3)$$

$$\text{Για } t = 10 \text{ s} \xrightarrow{(3)} v_2 = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το διάγραμμα της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας κάθε κύβου σε συνάρτηση με το χρόνο, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



99. (13708) Ένας κύβος μάζας 4 kg ολισθαίνει πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα, μέτρου $v_0 = 2\text{ m/s}$, κατά μήκος μιας ευθείας που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'x$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ όπου ο κύβος διέρχεται από τη θέση O ($x_0 = 0$) του άξονα κινούμενος προς τη θετική φορά αρχίζει να ασκείται σε αυτόν δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 10 N και κατεύθυνσης που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα.



Τη χρονική στιγμή που ο κύβος διέρχεται από τη θέση A ($x_A = 3\text{ m}$) η δύναμη $\vec{F}$ παύει να ασκείται. Αμέσως μετά την κατάργηση της $\vec{F}$ ο κύβος εισέρχεται και κινείται σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο μέχρι να ακινητοποιηθεί. Η χρονική διάρκεια της κίνησης στο τραχύ δάπεδο είναι 4 s . Να υπολογίσετε:

4.1) το μέτρο της επιτάχυνσης του κύβου στη θέση B ($x_B = 1\text{ m}$),

Μονάδες 5

4.2) το μέτρο της ταχύτητας του κύβου στη θέση A ,

Μονάδες 7

4.3) τη θέση στην οποία ο κύβος θα ακινητοποιηθεί,

Μονάδες 6

4.4) τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κύβου-δαπέδου στο τραχύ δάπεδο.

Μονάδες 7

Δίνονται: $\eta\mu\varphi = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

Στο λείο δάπεδο ($O \rightarrow A$)

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε συνιστώσες και υπολογίζω το μέτρο της οριζόντιας συνιστώσας:

$$F_x = F\sigma\upsilon\nu\varphi = (10\text{ N})0,8 = 8\text{ N}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x , υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_1$ (θετική φορά προς τα δεξιά):

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F_x}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{8\text{ N}}{4\text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Στη θέση B ($0\text{ m} < x_B < 3\text{ m}$) ο κύβος έχει επιτάχυνση μέτρου $\alpha_1 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

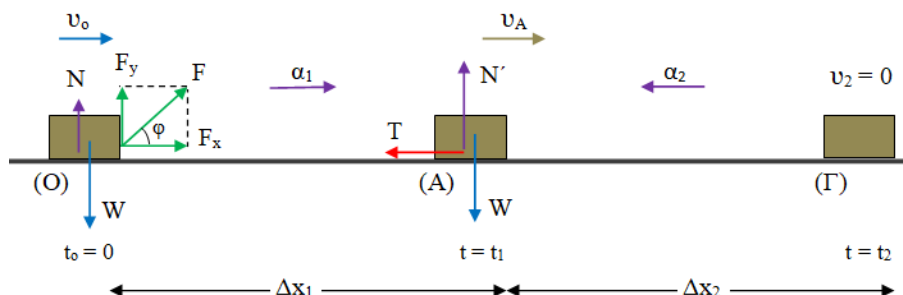
4.2)

Το μέτρο της μετατόπισης του κύβου μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , είναι: $\Delta x_1 = x_A - x_0 = x_A$.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $O \rightarrow A$:

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow K_A - K_O = W_F \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = (m\alpha_1)x_A \Leftrightarrow v_A^2 = v_0^2 + 2\alpha_1 x_A \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 + 2\alpha_1 x_A}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } v_A = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{16} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_A = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3)

Στο τραχύ δάπεδο (A → Γ) : Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_A = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και επιβράδυνση α_2 .

$$\text{Ισχύει : } \alpha_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{(0 - 4) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{s}} \Rightarrow \alpha_2 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το μέτρο της μετατόπισης Δx_2 μέχρι να σταματήσει, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Delta x_2 = v_A (\Delta t_2) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t_2)^2 = \left[4 \cdot 4 + \frac{1}{2} (-1) 4^2 \right] \text{m} \Rightarrow \Delta x_2 = 8 \text{m}.$$

Ο κύβος θα σταματήσει στη θέση :

$$x_\Gamma = x_A + \Delta x_2 = 3 \text{ m} + 8 \text{ m} \Rightarrow x_\Gamma = 11 \text{ m}.$$

4.4)

Στο τραχύ δάπεδο

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (θετική φορά προς τα δεξιά) :

$$\Sigma F_x = m \alpha_2 \Leftrightarrow -T = m \alpha_2 \Rightarrow T = -m \alpha_2 = -(4 \text{ Kg}) \left(-1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow T = 4 \text{ N}.$$

Στον άξονα y ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' = mg \Rightarrow N' = 40 \text{ N}.$

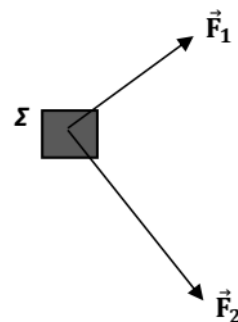
$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T = \mu N' \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N'} \Rightarrow \mu = \frac{4 \text{ N}}{40 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,1.$$

Σχόλια : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι

- 1) η δύναμη $\vec{F}$ βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με την αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ (με τον άξονα x).
- 2) οι διαστάσεις του κύβου είναι ασήμαντες ώστε να δεχτούμε ότι η μετάβαση από τη λεία στην τραχειά επιφάνεια γίνεται σχεδόν ακαριαία.

100. (13709) Το σώμα Σ με μάζα $m = 1 \text{ kg}$ ισορροπεί ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ασκούνται σε αυτό **δύο** δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα 6 N και 8 N αντίστοιχα που είναι κάθετες μεταξύ τους. Στο σχήμα απεικονίζεται η κάτοψη του οριζοντίου επιπέδου στην οποία δεν έχουν σχεδιαστεί όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ .

ΚΑΤΟΨΗ



Το σώμα μετά την t_0 κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$.

4.1) Να υπολογίσετε τη συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σε μέτρο και κατεύθυνση.

Μονάδες 5

4.2) Να αιτιολογήσετε γιατί στο σώμα ασκείται τριβή και να υπολογίσετε το μέτρο της.

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$, οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ παύουν να ασκούνται.

4.3) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που το σώμα θα ακινητοποιηθεί καθώς και το συνολικό διάστημα που θα διανύσει από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη στιγμή που ακινητοποιείται.

Μονάδες 7

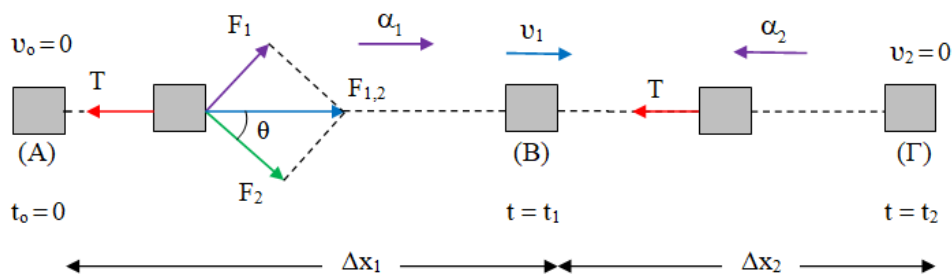
4.4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ για το χρονικό διάστημα που ασκείται στο Σ .

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Αφού οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους, το μέτρο της συνισταμένης τους $\vec{F}_{1,2}$ υπολογίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα :



$$F_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} \text{ N} = \sqrt{36 + 64} \text{ N} = \sqrt{100} \text{ N} \Rightarrow F_{1,2} = 10 \text{ N}.$$

Το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}_{1,2}$ με την $\vec{F}_2$, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\cos \theta = \frac{F_2}{F_{1,2}} = \frac{8 \text{ N}}{10 \text{ N}} \Rightarrow \cos \theta = 0,8.$$

4.2)

Ορίζω σαν θετική τη φορά της επιτάχυνσης $\vec{a}_1$ και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m a_1 = (1 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Sigma F_x = 2 \text{ N}.$$

Αφού $\Sigma F_x < F_{1,2}$, άρα υπάρχει τριβή ολίσθησης.

Η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ έχει την ίδια διεύθυνση με την $\vec{F}_{1,2}$, αντίθετη φορά από αυτή και μέτρο :

$$T = F_{1,2} - \Sigma F_x \Rightarrow T = 10 \text{ N} - 2 \text{ N} \Rightarrow T = 8 \text{ N}.$$

4.3)

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα μέτρου : $v_1 = a_1 t_1 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Το μέτρο της μετατόπισης μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (16 \text{s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 16 \text{ m}.$$

Μετά τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα επιβραδύνεται λόγω της τριβής, μέχρι να σταματήσει.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική φορά της $\vec{\alpha}_1$) :

$$\Sigma F_x = m \alpha_2 \Leftrightarrow -T = m \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = -\frac{T}{m} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{8 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας από τη στιγμή t_1 μέχρι να σταματήσει, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = v_1 + \alpha_2 (\Delta t_2).$$

Τη χρονική στιγμή t_2 που σταματά το σώμα, είναι :

$$v = 0 \Rightarrow 0 = v_1 + \alpha_2 (\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v_1}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 1 \text{ s}.$$

Το σώμα θα ακινητοποιηθεί τη χρονική στιγμή : $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 4 \text{ s} + 1 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 5 \text{ s}.$

Το μέτρο της μετατόπισης στη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης, είναι :

$$\Delta x_2 = v_1 (\Delta t_2) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t_2)^2 = \left[8 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-8) \cdot 1^2 \right] \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 4 \text{ m}.$$

Η συνολική μετατόπιση του σώματος μέχρι να σταματήσει, έχει μέτρο :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 16 \text{ m} + 4 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 20 \text{ m}.$$

4.4)

Η δύναμη $\vec{F}_2$ ασκείται στη διάρκεια της μετατόπισης $\Delta \vec{x}_1$.

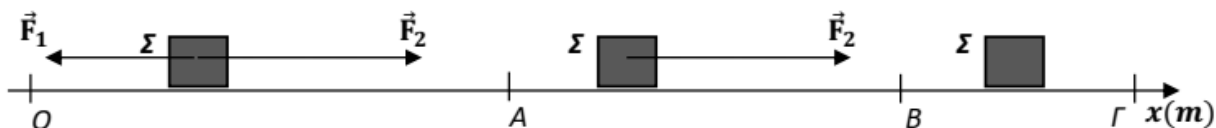
Το έργο της υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_2 = F_2 \cdot (\Delta x_1) \cdot \cos \theta = (8 \text{ N})(16 \text{ m}) \cdot 0,8 \Rightarrow W_2 = 102,4 \text{ J}.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ είναι οριζόντιες.

101. (13710)



Το σώμα Σ με μάζα $m = 2 \text{ kg}$ κινείται σε **ευθύγραμμο** και τραχύ **οριζόντιο επίπεδο** η διεύθυνση του **οποίου ταυτίζεται με ευθεία $x'x$** . Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το σώμα διέρχεται από το σημείο Ο ($x_0 = 0$) με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 5 \text{ m/s}$, ενώ δέχεται δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα 6 N και 8 N αντίστοιχα, που είναι αντίρροπες μεταξύ τους. Στο σχήμα δεν έχουν σχεδιαστεί όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ. Το σώμα μετά την t_0 κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέχρι τη θέση Α ($x_A = 16 \text{ m}$). Στη θέση Α η $\vec{F}_1$ καταργείται, ενώ, όταν το Σ διέρχεται από τη θέση Β ($x_B = 32 \text{ m}$), καταργείται και η $\vec{F}_2$ με αποτέλεσμα το Σ να ακινητοποιηθεί στη θέση Γ.

Να υπολογίσετε:

4.1) το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και οριζοντίου επιπέδου.

Μονάδες 6

4.2) Τη χρονική στιγμή όπου το σώμα διέρχεται από τη θέση Β.

Μονάδες 7

4.3) Τη θέση του σημείου Γ.

Μονάδες 7

4.4) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη στιγμή που ακινητοποιείται σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

Μονάδες 5

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

διαδρομή Ο → Α

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, άρα : $\Sigma F_x = 0$.

Αφού $F_2 > F_1$, υπάρχει τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (με φορά προς τα αριστερά).

Εφαρμόζω τον 1ο νόμο του Newton σε κάθε άξονα.

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_2 - F_1 - T = 0 \Leftrightarrow T = F_2 - F_1 \Rightarrow T = 8 \text{ N} - 6 \text{ N} \Rightarrow T = 2 \text{ N}.$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 20 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης, υπολογίζω τον συντελεστή τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{2 \text{ N}}{20 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,1.$$

4.2)

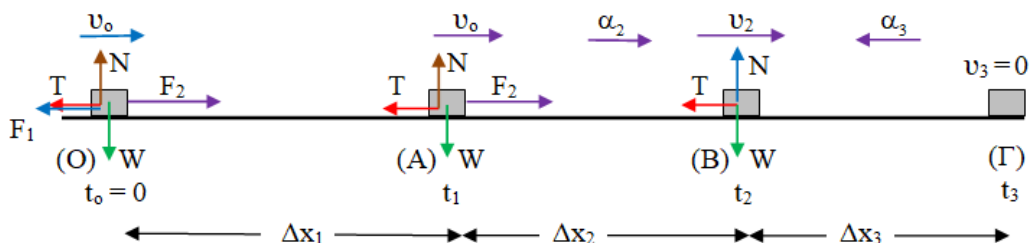
διαδρομή Ο → Α

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Το μέτρο της μετατόπισης είναι : $\Delta x_1 = x_A - x_0 = 16 \text{ m}$.

$$\text{Ισχύει : } \Delta x_1 = v_0 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_0} \Rightarrow t_1 = \frac{16 \text{ m}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow t_1 = 3,2 \text{ s}.$$

διαδρομή Α → Β

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :



$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow F_2 - T = m\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{F_2 - T}{m} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{(8-2)N}{2Kg} \Rightarrow \alpha_2 = 3 \frac{m}{s^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Η μετατόπιση από το Α στο Β έχει μέτρο : $\Delta x_2 = x_B - x_A = 32 \text{ m} - 16 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 16 \text{ m}.$

Ισχύει :

$$\Delta x_2 = v_0(\Delta t_2) + \frac{1}{2}\alpha_2(\Delta t_2)^2 \Rightarrow 16 = 5(\Delta t_2) + 1,5(\Delta t_2)^2 \Rightarrow 1,5(\Delta t_2)^2 + 5(\Delta t_2) - 16 = 0.$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot (-16) = 25 + 96 = 121.$$

$$\Delta t_2 = \frac{-5 \pm 11}{3} = \begin{cases} \frac{-5+11}{3} = \frac{6}{3} = 2s \\ \frac{-5-11}{3} = -\frac{16}{3}s \text{ (απορρίπτεται)} \end{cases}$$

Άρα, η επιταχυνόμενη κίνηση έχει διάρκεια $\Delta t_2 = 2 \text{ s}.$

Το σώμα διέρχεται από το Β τη χρονική στιγμή : $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 3,2 \text{ s} + 2 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 5,2 \text{ s}.$

4.3)

Τη στιγμή που φτάνει στο Β έχει ταχύτητα μέτρου :

$$v_2 = v_0 + \alpha_2(\Delta t_2) = 5 \frac{m}{s} + \left(3 \frac{m}{s^2}\right)(2s) \Rightarrow v_2 = 11 \frac{m}{s}.$$

διαδρομή Β→Γ

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (θετική φορά της ταχύτητας):

$$\Sigma F_x = m\alpha_3 \Leftrightarrow -T = m\alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_3 = -\frac{T}{m} \Rightarrow \alpha_3 = -\frac{2N}{2Kg} \Rightarrow \alpha_3 = -1 \frac{m}{s^2}.$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : $v = v_2 + \alpha_3(\Delta t_3).$

Τη στιγμή που σταματά το σώμα :

$$v = 0 \Rightarrow 0 = v_2 + \alpha_3(\Delta t_3) \Leftrightarrow \Delta t_3 = -\frac{v_2}{\alpha_3} \Rightarrow \Delta t_3 = 11s.$$

Το μέτρο της μετατόπισης στη διάρκεια της επιβραδυνόμενη κίνησης, είναι :

$$\Delta x_3 = v_2(\Delta t_3) + \frac{1}{2}\alpha_3(\Delta t_3)^2 = \left[11 \cdot 11 + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 11^2\right] m \Rightarrow \Delta x_3 = 60,5 m.$$

Η θέση του σημείου Γ είναι :

$$x_\Gamma = x_B + \Delta x_3 = 32 \text{ m} + 60,5 \text{ m} \Rightarrow x_\Gamma = 92,5 \text{ m}.$$

4.4)

$$0 \text{ s} \rightarrow 3,2 \text{ s} : v = v_0 = 5 \frac{m}{s}.$$

3,2 s → 5,2 s :

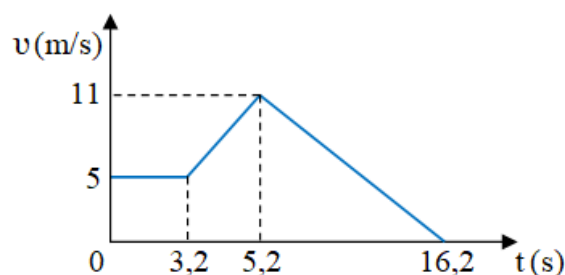
$$v = v_0 + \alpha_2(t - t_1) \Rightarrow v = 5 + 3(t - 3,2). \quad (\text{S.I.})$$

Το σώμα θα ακινητοποιηθεί τη χρονική στιγμή :

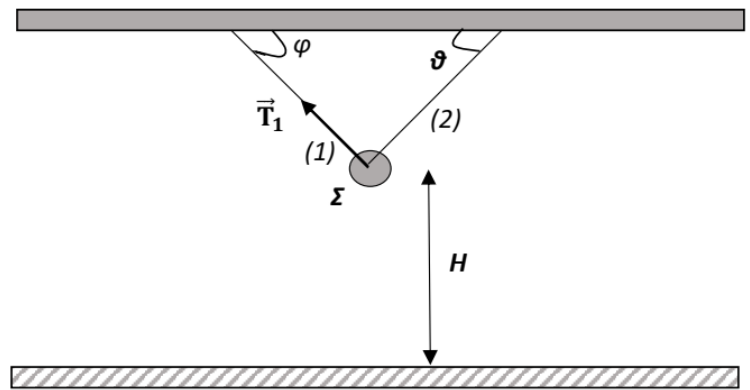
$$t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 5,2 \text{ s} + 11 \text{ s} \Rightarrow t_3 = 16,2 \text{ s}.$$

5,2 s → 16,2 s :

$$v = v_2 + \alpha_3(t - t_2) \Rightarrow v = 11 - (t - 5,2). \quad (\text{S.I.})$$



102. (13711) Η σφαίρα Σ με μάζα m ισορροπεί ακίνητη με τη βοήθεια δύο αβαρών και μη εκτατών νημάτων (1) και (2) που είναι κάθετα μεταξύ τους. Τα νήματα έχουν το ένα άκρο τους προσδεμένο στη Σ και το άλλο άκρο τους ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Η Σ απέχει από το οριζόντιο δάπεδο απόσταση $H = 5m$. Το μέτρο της δύναμης (τάσης $\vec{T}_1$) που ασκεί το νήμα (1) στη σφαίρα είναι 60 N .



4.1) Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα κατά την ισορροπία

της και να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης (τάσης $\vec{T}_2$) που ασκεί το νήμα (2) στη Σ .

Μονάδες 6

4.2) Να υπολογίσετε τη μάζα της Σ .

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, τα νήματα κόβονται ταυτόχρονα με αποτέλεσμα η σφαίρα Σ να εκτελέσει ελεύθερη πτώση.

4.3) Να υπολογίσετε σε ποιο ύψος από το έδαφος η κινητική της ενέργεια είναι τετραπλάσια από τη βαρυτική δυναμική της ενέργεια.

Μονάδες 7

4.4) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας της Σ κατά την πτώση της σε συνάρτηση με την απόσταση της y από τη θέση όπου κόβονται τα νήματα, σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

Μονάδες 6

Δίνεται ότι ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας θεωρείται αυτό του οριζοντίου δαπέδου, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$, $\eta\mu\varphi = \sigma\upsilon\nu\theta = 0,6$ και ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\theta = 0,8$.

Επίσης η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και η σφαίρα Σ έχει μικρές διαστάσεις έτσι ώστε να μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση ως υλικό σημείο.

Απάντηση

4.1)

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι : το βάρος $\vec{B}$ και οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$.

Αναλύω τις τάσεις των νημάτων σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το κέντρο της σφαίρας.

Στον άξονα x η σφαίρα ισορροπεί, άρα ισχύει :

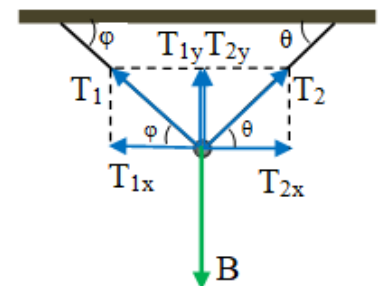
$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Leftrightarrow T_{2x} = T_{1x} \Leftrightarrow T_2 \sigma\upsilon\nu\theta = T_1 \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow 0,6T_2 = 60 \cdot 0,8\text{ N} \\ &\Rightarrow T_2 = 80\text{ N}. \end{aligned}$$

4.2)

Στον άξονα y η σφαίρα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Leftrightarrow T_{1y} + T_{2y} - B = 0 \Leftrightarrow B = T_1 \eta\mu\varphi + T_2 \eta\mu\theta \Rightarrow \\ B &= 60 \cdot 0,6\text{ N} + 80 \cdot 0,8\text{ N} \Rightarrow B = 100\text{ N}. \end{aligned}$$

$$\text{Ισχύει : } B = mg \Leftrightarrow m = \frac{B}{g} \Rightarrow m = \frac{100\text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow m = 10\text{ Kg}.$$



Εναλλακτική απάντηση για τα ερωτήματα 4.1, 4.2

4.1)

Αφού $\eta\mu\theta = \text{συν}\theta$, οι γωνίες φ, θ είναι συμπληρωματικές ($\varphi + \theta = 90^\circ$)
άρα οι δυνάμεις $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

Η σφαίρα ισορροπεί, άρα η συνισταμένη $\vec{T}_{1,2}$ των δυνάμεων $\vec{T}_1, \vec{T}_2$
είναι αντίθετη από το βάρος: $\vec{T}_{1,2} = -\vec{B}$.

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{T_2}{T_1} \Leftrightarrow T_2 = T_1 \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow T_2 = T_1 \frac{\eta\mu\theta}{\text{συν}\theta} \Rightarrow T_2 = 60 \cdot \frac{0,8}{0,6} \text{ N} \Rightarrow$$

$$T_2 = 80 \text{ N}.$$

4.2)

Το μέτρο του βάρους είναι ίσο με το μέτρο της $\vec{T}_{1,2}$, άρα:

$$B = T_{1,2} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} \Rightarrow B = \sqrt{60^2 + 80^2} \text{ N} = \sqrt{10000} \text{ N} \Rightarrow B = 100 \text{ N}.$$

$$\text{Ισχύει: } B = mg \Leftrightarrow m = \frac{B}{g} \Rightarrow m = \frac{100 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow m = 10 \text{ Kg}.$$

4.3)

Έστω ότι στη θέση Α σε ύψος h ισχύει: $K_A = 4U_A$.

Η σφαίρα κινείται με την επίδραση του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για τις θέσεις Ο, Α:

$$K_A + U_A = K_O + U_O \xrightarrow{K_A = 4U_A} 5U_A = U_O \Leftrightarrow 5mgh = mgH \Leftrightarrow$$

$$h = \frac{H}{5} \Rightarrow h = 1 \text{ m}.$$

4.4)

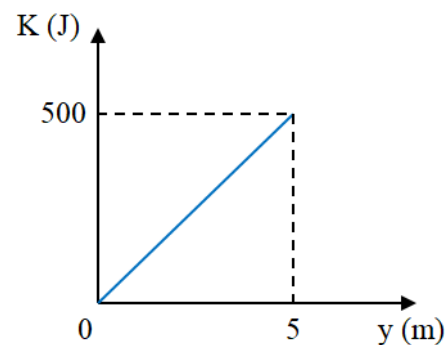
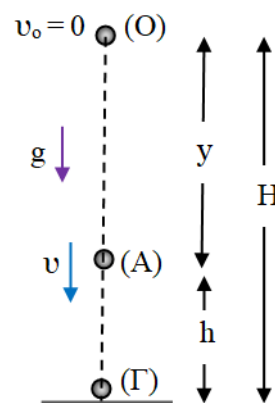
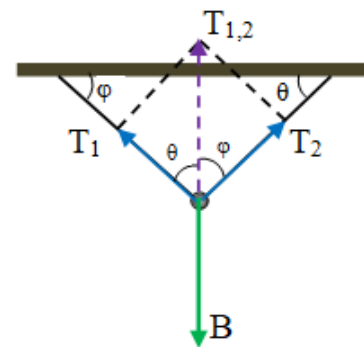
Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από την αρχική θέση Ο μέχρι την τυχαία θέση σε απόσταση y από το Ο:

$$K - K_O = W_B \Leftrightarrow K = mgy \Rightarrow K = 100y \text{ (S.I.)}. \quad (1) \quad [0 \leq y \leq 5 \text{ m}]$$

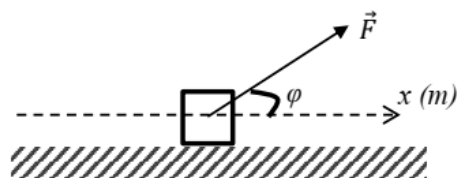
$$\text{Για } y = 0 \xrightarrow{(1)} K = 0 \text{ J}.$$

$$\text{Για } y = H = 5 \text{ m} \xrightarrow{(1)} K = 500 \text{ J}.$$

Το διάγραμμα της κινητικής ενέργειας της σφαίρας σε συνάρτηση με την απόσταση y από την αρχική της θέση (μέχρι να φτάσει στο έδαφος), φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



103. (13712) Ένας κύβος μάζας 1 kg ολισθαίνει πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$, κατά μήκος μιας ευθείας που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'x$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ όπου ο κύβος διέρχεται από τη θέση O ($x = 0$) του άξονα κινούμενος προς τη θετική φορά έχει ταχύτητα μέτρου, $v_0 = 1\text{ m/s}$.



Στον κύβο, όπως φαίνεται στο σχήμα, ασκείται σταθερή δύναμη F μέτρου 10 N και κατεύθυνσης που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\text{ s}$, που ο κύβος διέρχεται από τη θέση A (x_A), η δύναμη F καταργείται. Μετά την κατάργηση της F ο κύβος συνεχίζει να κινείται στο ίδιο οριζόντιο δάπεδο μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Να υπολογίσετε:

4.1) το μέτρο της επιτάχυνσης του κύβου κατά την κίνηση του από τη θέση O στη θέση A .

Μονάδες 6

4.2) τη χρονική στιγμή στην οποία ο κύβος θα ακινητοποιηθεί.

Μονάδες 7

4.3) το έργο της τριβής από τη χρονική $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή που ο κύβος ακινητοποιείται.

Μονάδες 7

4.4) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του κύβου σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη στιγμή που ακινητοποιείται σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

Μονάδες 5

Δίνονται, $\eta\mu\varphi = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας, $g = 10\text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1) $O \rightarrow A$

Αναλύω τη δύναμη $\vec{F}$ σε

κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$

και υπολογίζω τα μέτρα τους :

$$F_x = F\sigma\upsilon\nu\varphi = 10 \cdot 0,8\text{ N} = 8\text{ N},$$

$$F_y = F\eta\mu\varphi = 10 \cdot 0,6\text{ N} = 6\text{ N}.$$

Στον άξονα y ο κύβος ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_1 + F_y - B = 0 \Leftrightarrow N_1 = mg - F_y \Leftrightarrow N_1 = (10 - 6)\text{ N} = 4\text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T_1 = \mu N_1 = 0,5 \cdot 4\text{ N} = 2\text{ N}.$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (θετική φορά της ταχύτητας) :

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F_x - T_1 = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F_x - T_1}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(8 - 2)\text{ N}}{1\text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.2)

Στη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 2\text{ s}$, ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου :

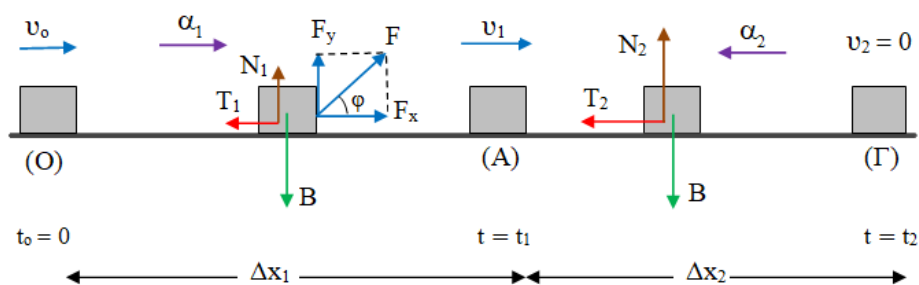
$$v_1 = v_0 + \alpha_1 t_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2\text{ s}) \Rightarrow v_1 = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$t_1 = 2\text{ s} \rightarrow t_2$:

Από τη στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$, μεταβάλλεται το μέτρο της κάθετης δύναμης και της τριβής.

Στον άξονα y ο κύβος ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 - B = 0 \Leftrightarrow N_2 = B = 10\text{ N}.$$



Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T_2 = \mu N_2 = 0,5 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_2 = 5 \text{ N}$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής (θετική φορά της ταχύτητας) :

$$\Sigma F_x = m a_2 \Leftrightarrow -T_2 = m a_2 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{T_2}{m} \Rightarrow a_2 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Μετά τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, μέχρι να σταματήσει τη χρονική στιγμή t_2 .

Η ταχύτητα του κύβου υπολογίζεται από τη σχέση : $v = v_1 + a_2(\Delta t_2)$. (1)

Τη στιγμή που σταματά, ισχύει :

$$v = 0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_1 + a_2(\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v_1}{a_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{13}{5} \text{ s} = 2,6 \text{ s}.$$

Ο κύβος θα ακινητοποιηθεί τη χρονική στιγμή : $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 2 \text{ s} + 2,6 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 4,6 \text{ s}$.

4.3)

Η μετατόπιση του κύβου μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, έχει μέτρο :

$$\Delta x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 14 \text{ m}.$$

1ος τρόπος υπολογισμού του έργου

Το μέτρο της μετατόπισης του κύβου στη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$, είναι :

$$\Delta x_2 = v_1(\Delta t_2) + \frac{1}{2} a_2(\Delta t_2)^2 \Rightarrow \Delta x_2 = \left(13 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2,6 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6,76 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_2 = 16,9 \text{ m}.$$

Το έργο της τριβής ολίσθησης στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 4,6 \text{ s}$ είναι :

$$W_T = -T_1(\Delta x_1) - T_2(\Delta x_2) = -(2 \text{ N})(14 \text{ m}) - (5 \text{ N})(16,9 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -112,5 \text{ J}.$$

2ος τρόπος υπολογισμού του έργου

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του κύβου από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να σταματήσει :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_F + W_T = 0 - K_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow W_T = -K_{\text{αρχ}} - W_F \Leftrightarrow W_T = -\frac{1}{2} m v_0^2 - F_x(\Delta x_1) \Rightarrow$$

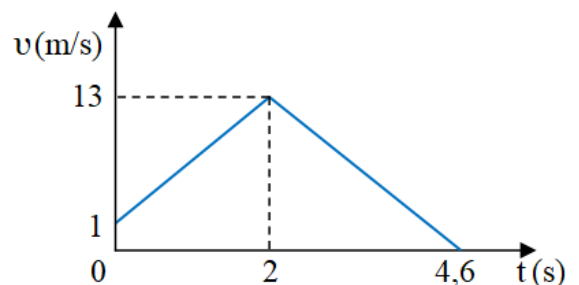
$$W_T = \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 - 8 \cdot 14\right) \text{ J} \Rightarrow W_T = -112,5 \text{ J}.$$

4.4)

Για $0 \leq t \leq 2 \text{ s}$: $v = v_0 + a_1 t \Rightarrow v = 1 + 6t$. (S.I.)

Για $2 \text{ s} \leq t \leq 4,6 \text{ s}$: $v = v_1 + a_2(t - t_1) \Rightarrow$
 $v = 13 - 5(t - 2)$. (S.I.)

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι η δύναμη $\vec{F}$ βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με την αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ (με τον άξονα x).

104. (13713) Σώμα μικρών διαστάσεων μάζας 1 kg κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του προσανατολισμένου άξονα Ox και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα. Θεωρήστε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 5\text{ m}$.

4.1) Να προσδιορίσετε τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 10\text{ s}$.

Μονάδες 6

4.2) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 20\text{ s}$.

Μονάδες 6

4.3) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της τιμής της συνισταμένης δύναμης $\Sigma \vec{F}$ που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 20\text{ s}$, σε βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.

Μονάδες 7

4.4) Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης δύναμης $\Sigma \vec{F}$, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 20\text{ s}$.

Μονάδες 6

Απάντηση

4.1)

Από τα εμβαδά των σχημάτων του διαγράμματος υπολογίζω τις τιμές των αντίστοιχων μετατοπίσεων.

$$0\text{ s} \rightarrow 5\text{ s}: \Delta x_1 = E_{\text{τραπ}} = \frac{(10+5) \cdot 5}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 37,5 \text{ m}.$$

$$5\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}: \Delta x_2 = E_{\text{ορθ}} = 5 \cdot 10 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 50 \text{ m}.$$

Στη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}$

το σώμα μετατοπίζεται κατά

$$\Delta x_{1,2} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 37,5 \text{ m} + 50 \text{ m} \\ \Rightarrow \Delta x_{1,2} = 87,5 \text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 10\text{ s}$,

το σώμα βρίσκεται στη θέση :

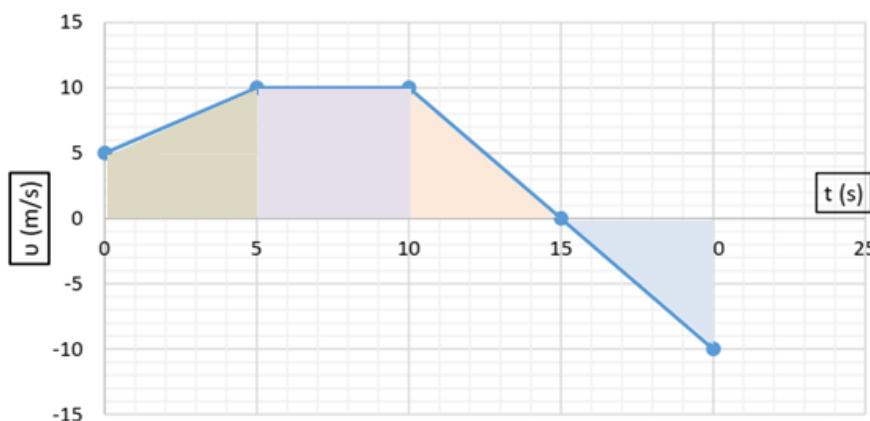
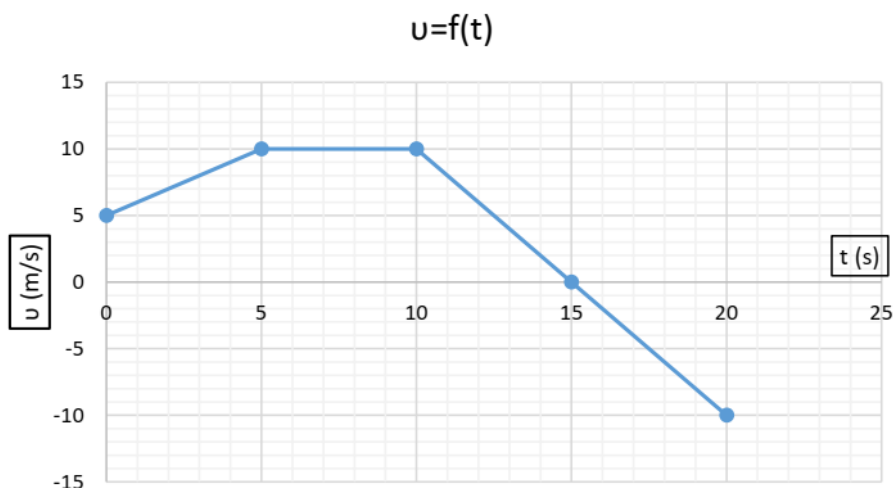
$$x_2 = x_0 + \Delta x_{1,2} = 5 \text{ m} + 87,5 \text{ m} \Rightarrow \\ x_2 = 92,5 \text{ m}.$$

4.2)

$10\text{ s} \rightarrow 15\text{ s}$:

$$\Delta x_3 = E_{\text{τριγ}} = \frac{5 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_3 = 25 \text{ m}.$$

$$15\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}: \Delta x_4 = E_{\text{τριγ}}' = \frac{5 \cdot (-10)}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_4 = -25 \text{ m}.$$



Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σώμα στη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| = 37,5\text{ m} + 50\text{ m} + 25\text{ m} + 25\text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 137,5\text{ m}.$$

Η μέση ταχύτητα σε αυτή τη χρονική διάρκεια, έχει μέτρο :

$$v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{137,5\text{ m}}{20\text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 6,875 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3)

Από τις τιμές του διαγράμματος υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης σε κάθε χρονική διάρκεια και εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής.

$$0\text{ s} \rightarrow 5\text{ s}: \alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{(10 - 5) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\text{ s} - 0\text{ s}} \Rightarrow \alpha_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

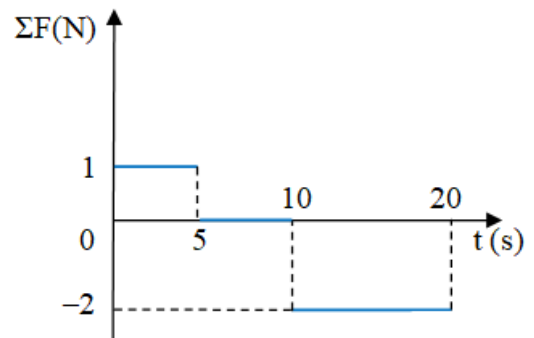
$$\Sigma F_1 = m\alpha_1 = 1\text{ N}.$$

$$5\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}: \alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(10 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\text{ s} - 5\text{ s}} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Sigma F_2 = m\alpha_2 = 0\text{ N}.$$

$$10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}: \alpha_3 = \frac{v_4 - v_2}{t_4 - t_2} = \frac{(-10 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20\text{ s} - 10\text{ s}} \Rightarrow \alpha_3 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\Sigma F_3 = m\alpha_3 = -2\text{ N}.$$



Το διάγραμμα της τιμής της συνισταμένης δύναμης ΣF που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

4.4)

1ος τρόπος

Το συνολικό έργο της συνισταμένης δύναμης είναι το αλγεβρικό άθροισμα των έργων της σε κάθε χρονική διάρκεια :

$$W_{\text{ολ}} = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) + (\Sigma F_2)(\Delta x_2) + (\Sigma F_3)(\Delta x_3 + \Delta x_4) = (1\text{ N})(37,5\text{ m}) + 0 + (-2\text{ N})(25\text{ m} - 25\text{ m}) \Rightarrow W_{\text{ολ}} = 37,5\text{ J}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_4 = 20\text{ s}$:

$$W_{\text{ολ}} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m(v_4^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (100 - 25)\text{ J} \Rightarrow W_{\text{ολ}} = 37,5\text{ J}.$$

105. (13714) Κιβώτιο μάζας $m = 1 \text{ Kg}$ αφήνεται να ολισθήσει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Το κιβώτιο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a = 2 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να εξηγήσετε γιατί το κιβώτιο δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης.

Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό και να τις αναλύσετε σε δυο κάθετους μεταξύ τους άξονες από τους οποίους ο ένας να είναι ο άξονας της κίνησης.

Μονάδες 8

4.2 Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης τριβής ολίσθησης που δέχεται το κιβώτιο και την τιμή του συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του κεκλιμένου επιπέδου.

Μονάδες 8

4.3 Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του βάρους του κιβωτίου, όταν αυτό θα έχει διανύσει 4 m κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου από το σημείο που ξεκίνησε.

Πόση είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του κιβωτίου;

Να συγκρίνετε το έργο του βάρους με την αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας και να διατυπώσετε το συμπέρασμά σας.

Μονάδες 5

4.4 Ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου, όταν αυτό έχει διανύσει το παραπάνω διάστημα των 4 m κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου;

Δίνονται : $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

Σχεδιάζω το βάρος του κιβωτίου και την κάθετη δύναμη

$\vec{N}$ που ασκεί η επιφάνεια.

Αναλύω το βάρος του κιβωτίου σε δύο κάθετους άξονες, ώστε ο άξονας x να είναι παράλληλος στην κεκλιμένη επιφάνεια και υπολογίζω τα μέτρα των συνιστωσών $\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$:

$\vec{B}_x$, $\vec{B}_y$:

$$B_x = mg\eta\mu\varphi = 5 \text{ N},$$

$$B_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 5\sqrt{3} \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow \Sigma F_x = 2 \text{ N}.$$

Αφού $\Sigma F_x < B_x$, άρα υπάρχει τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (με φορά προς τα πάνω).

4.2)

$$\text{Στον άξονα } x \text{ ισχύει: } \Sigma F_x = B_x - T \Leftrightarrow T = B_x - \Sigma F_x \Rightarrow T = 5 \text{ N} - 2 \text{ N} \Rightarrow T = 3 \text{ N}.$$

$$\text{Στον άξονα } y \text{ το σώμα ισορροπεί, άρα: } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B_y = 5\sqrt{3} \text{ N}.$$

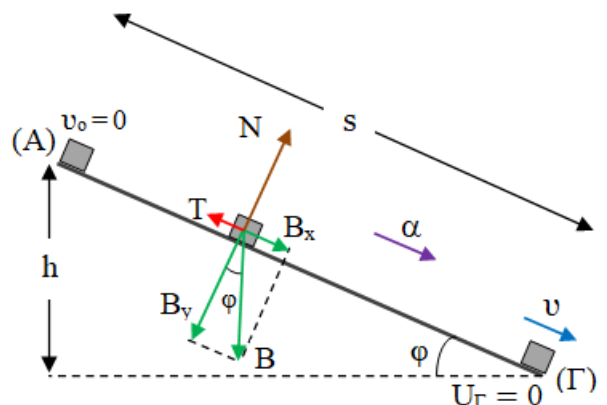
$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης: } T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{3 \text{ N}}{5\sqrt{3} \text{ N}} \Rightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

4.3)

Κατά τη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$ το κιβώτιο διανύει απόσταση $s = 4 \text{ m}$.

Το έργο του βάρους είναι:

$$W_B = B_x \cdot s \Rightarrow W_B = (5 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow W_B = 20 \text{ J}.$$



Έστω h η υψομετρική διαφορά μεταξύ αρχικής θέσης Α και τελικής θέσης Γ.

$$\text{Ισχύει: } \eta\mu\varphi = \frac{h}{s} \Leftrightarrow h = s\eta\mu\varphi \Rightarrow h = (4\text{ m})\frac{1}{2} = 2\text{ m}.$$

Ορίζω σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Γ ($U_{\Gamma} = 0$) και υπολογίζω μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας κατά τη διαδρομή Α → Γ :

$$\Delta U = U_{\Gamma} - U_{\text{Α}} = 0 - mgh = -mgh \Rightarrow \Delta U = -(1\text{Kg})\left(10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2\text{m}) \Rightarrow \Delta U = -20\text{J}.$$

Διαπιστώνω ότι για την ίδια διαδρομή ισχύει : $W_{\text{Β}} = -\Delta U$.

Συμπέρασμα

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος, το έργο του βάρους είναι αντίθετο από τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

4.4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή Α → Γ :

$$K_{\Gamma} - K_{\text{Α}} = W_{\text{Β}} + W_{\text{Τ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{\text{Β}} - T \cdot s \Leftrightarrow v^2 = \frac{2(W_{\text{Β}} - T \cdot s)}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(W_{\text{Β}} - T \cdot s)}{m}} \Rightarrow$$
$$v = \sqrt{\frac{2(20-12)}{1}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{16} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

106. (14211) Μια σκιέρ ξεκινάει από την ηρεμία, από την κορυφή επίπεδης κεκλιμένης και χιονισμένης πλαγιάς. Η πλαγιά σχηματίζει γωνία φ με τον ορίζοντα, για την οποία δίνονται $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$. Κατά την κίνησή της αποκτά αμέσως σταθερή επιτάχυνση και διανύει 18 m στα πρώτα 3 s της κίνησής της.

4.1 Μετά πόσο χρόνο από την εκκίνησή της έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου 24 m/s ;

Μονάδες 6

4.2 Πόσο διάστημα διανύει στην διάρκεια του δεύτερου δευτερολέπτου της κίνησής της;

Μονάδες 6

4.3 Να δείξετε ότι μεταξύ των πέδινων που φοράει η σκιέρ και της χιονισμένης πλαγιάς, δημιουργείται τριβή και, αν οι επιφάνειες θεωρηθούν ομογενείς, να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ τους.

Μονάδες 7

4.4 Αν δίνεται ότι η μάζα της σκιέρ είναι $m = 60$ kg , να υπολογίσετε την ελάττωση της βαρυτικής δυναμικής της ενέργειας μετά από χρόνο 10 s από την εκκίνησή της.

Μονάδες 6

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10$ m/s², ότι οι αντιστάσεις αέρα μπορούν να αγνοηθούν για τους χρόνους που αναφέρονται και το μήκος της πλαγιάς είναι αρκετά μεγάλο.

Απάντηση

4.1)

Η σκιέρ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 3$ s διανύει διάστημα $s_3 = 18$ m.

Ισχύει :

$$s_3 = \frac{1}{2} \alpha t_3^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2s_3}{t_3^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 18 \text{ m}}{9 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας :

$$v = \alpha t \Leftrightarrow t = \frac{v}{\alpha} \Rightarrow t = \frac{24}{4} \text{ s} \Rightarrow t = 6 \text{ s}.$$

4.2)

Το 2ο δευτερόλεπτο της κίνησης είναι η χρονική διάρκεια

$\Delta t = 1$ s από τη χρονική στιγμή $t_1 = 1$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 2$ s.

Υπολογίζω τα διαστήματα που διάνυσε στις χρονικές διάρκειες : $0 \text{ s} \rightarrow 1 \text{ s}$, $0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$ και $1 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$.

$0 \text{ s} \rightarrow 1 \text{ s}$

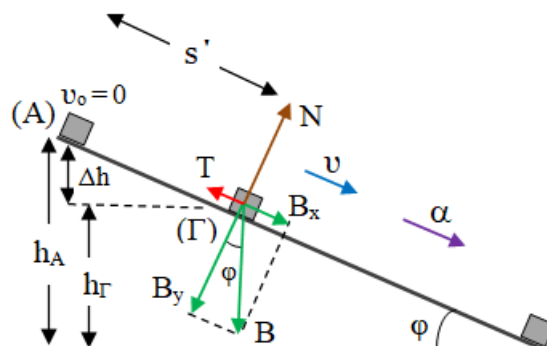
$$s_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (1 \text{ s}^2) \Rightarrow s_1 = 2 \text{ m}.$$

$0 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$

$$s_2 = \frac{1}{2} \alpha t_2^2 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}^2) \Rightarrow s_2 = 8 \text{ m}.$$

$1 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$

$$s_{1,2} = s_2 - s_1 = 8 \text{ m} - 2 \text{ m} \Rightarrow s_{1,2} = 6 \text{ m}.$$



4.3)

Σχεδιάζω το βάρος της σκιέρ και την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ που ασκεί η επιφάνεια.

Αναλύω το βάρος σε δύο κάθετους άξονες, ώστε ο άξονας x να είναι παράλληλος στην κεκλιμένη επιφάνεια. Ισχύουν οι σχέσεις :

$$B_x = mg\eta\mu\varphi,$$

$$B_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Αν δεν υπήρχε τριβή, με επίδραση της $\vec{B}_x$ η σκιέρ θα αποκτούσε επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha' = \frac{B_x}{m} = \frac{mg\eta\mu\varphi}{m} = g\eta\mu\varphi \Rightarrow \alpha' = 6 \frac{m}{s^2}.$$

Αφού η επιτάχυνση έχει μέτρο $\alpha = 4 \frac{m}{s^2} < \alpha'$, άρα υπάρχει τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (με φορά προς τα πάνω).

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow B_x - T = m\alpha \Leftrightarrow T = mg\eta\mu\varphi - m\alpha. \quad (1)$$

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει : } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B_y = 0 \Leftrightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi. \quad (2)$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \xrightarrow{(1),(2)} \mu = \frac{m(g\eta\mu\varphi - \alpha)}{mg\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \mu = \frac{g\eta\mu\varphi - \alpha}{g\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \mu = 0,25.$$

4.4)

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t' = 10 \text{ s}$, η σκιέρ διανύει διάστημα :

$$s' = \frac{1}{2} \alpha t'^2 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{m}{s^2} \right) (100 s^2) \Rightarrow s' = 200 \text{ m}.$$

1ος τρόπος

Η ελάττωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι ίση με το έργο του βάρους :

$$|\Delta U| = W_B = B_x \cdot s' = (mg\eta\mu\varphi) \cdot s' \Rightarrow \Delta U = 60 \cdot 10 \cdot 200 \cdot 0,6 \text{ J} \Rightarrow \Delta U = 72000 \text{ J}.$$

2ος τρόπος

Η υψομετρική διαφορά Δh μεταξύ αρχικής – τελικής θέσης, είναι :

$$\Delta h = s' \eta\mu\varphi = (200 \text{ m}) \cdot 0,6 \Rightarrow \Delta h = 120 \text{ m}.$$

Η ελάττωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι :

$$|\Delta U| = mg(\Delta h) = 60 \cdot 10 \cdot 120 \text{ J} \Rightarrow |\Delta U| = 72000 \text{ J}.$$

107. (14217) Ένας μηχανισμός $\mathcal{E}$ (εργάτης), είναι στερεωμένος στο άκρο μιας οριζόντιας ράμπας μεγάλου μήκους και σέρνει ένα σύστημα δύο κιβωτίων, με τη βοήθεια αβαρούς και μη ελαστικού νήματος.

Τα δύο κιβώτια Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα και είναι μεταξύ τους δεμένα με οριζόντιο και τεντωμένο νήμα, αβαρές και μη ελαστικό, μήκους $l = 12,5 \text{ cm}$, όπως στην εικόνα.

Τα δύο κιβώτια εμφανίζουν τριβή με το επίπεδο της ράμπας, με ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,25$.

Το νήμα του μηχανισμού είναι δεμένο στο κιβώτιο Σ_1 , ασκεί σε αυτό σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και το αποτέλεσμα είναι το σύστημα των δύο κιβωτίων, να κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_0$ μέτρου $v_0 = 2,5 \text{ m/s}$.

4.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το νήμα που συνδέει τα δύο κιβώτια κόβεται, ενώ η δύναμη που ασκεί ο μηχανισμός διατηρείται σταθερή.

4.2 Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 και το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ_2 , μετά το κόψιμο του νήματος.

Μονάδες 6

4.3 Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα δύο σώματα, τη στιγμή t_1 κατά την οποία ακινητοποιείται το σώμα Σ_2 ;

Μονάδες 7

4.4 Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_1 από τον μηχανισμό, από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα, μέχρι τη στιγμή κατά την οποία έχει διανύσει 3 m ;

Μονάδες 6

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι οι αντιστάσεις αέρα αγνοούνται

Απάντηση

4.1)

Σ_1

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_1 = B_1 = m_1 g \Rightarrow N_1 = 20 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_1 = \mu N_1 = 0,25 \cdot 20 \text{ N} \Rightarrow T_1 = 5 \text{ N}.$$

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, στον άξονα x ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F - T - T_1 = 0. \quad (1)$$

Σ_2

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

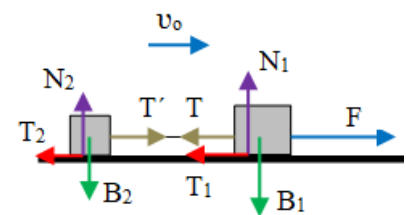
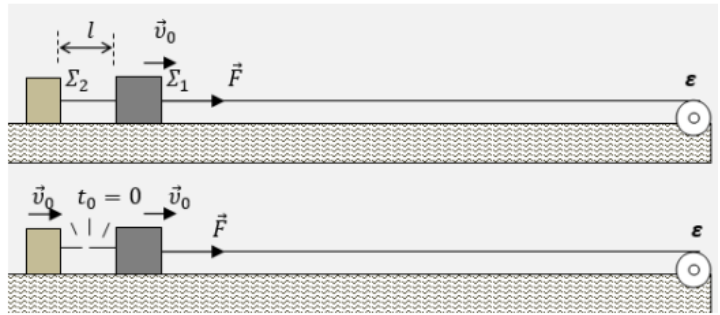
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 = B_2 = m_2 g \Rightarrow N_2 = 10 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_2 = \mu N_2 = 0,25 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_2 = 2,5 \text{ N}.$$

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, στον άξονα x ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow T' - T_2 = 0. \quad (2)$$



Αφού η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, για τα μέτρα των τάσεων ισχύει : $T' = T$.

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

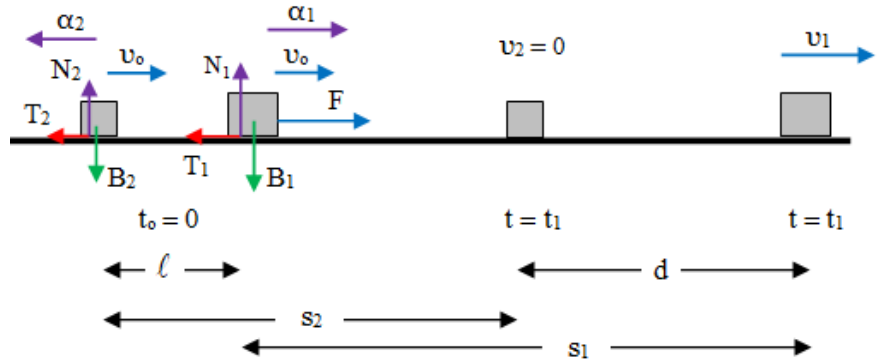
$$F - T - T_1 + T' - T_2 = 0 \xrightarrow{T'=T} F = T_1 + T_2 \Rightarrow F = 7,5 \text{ N.}$$

4.2)

Σ_1

Επειδή $F > T_1$, το κιβώτιο θα αποκτήσει επιτάχυνση $\vec{\alpha}_1$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (θετική φορά προς τα δεξιά) :



$$\Sigma F_x = m_1 \alpha_1 \Leftrightarrow F - T_1 = m_1 \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F - T_1}{m_1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(7,5 - 5) \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Σ_2

Λόγω της τριβής ολίσθησης $\vec{T}_2$ το κιβώτιο θα αποκτήσει επιβράδυνση $\vec{\alpha}_2$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (θετική φορά προς τα δεξιά) :

$$\Sigma F_x = m_2 \alpha_2 \Leftrightarrow -T_2 = m_2 \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = -\frac{T_2}{m_2} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{2,5 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = -2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Άρα, το Σ_2 αποκτά επιβράδυνση μέτρου $|\alpha_2| = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

4.3)

Σ_2 : ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : $v_2 = v_0 + \alpha_2 t$. (3)

Τη χρονική στιγμή t_1 που σταματά ισχύει :

$$v_2 = 0 \xrightarrow{(3)} 0 = v_0 + \alpha_2 t_1 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{v_0}{\alpha_2} \Rightarrow t_1 = -\frac{2,5}{-2,5} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}.$$

Μέχρι να σταματήσει, το Σ_2 θα διανύσει διάστημα :

$$s_2 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 t_1^2 = \left(2,5 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow s_2 = 1,25 \text{ m}.$$

Σ_1 : ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , θα διανύσει διάστημα :

$$s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \left(2,5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow s_1 = 3,125 \text{ m}.$$

Έστω d η απόσταση μεταξύ των σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει :

$$l + s_1 = s_2 + d \Leftrightarrow d = l + s_1 - s_2 \Rightarrow d = 0,125 \text{ m} + 3,125 \text{ m} - 1,25 \text{ m} \Rightarrow d = 2 \text{ m}.$$

4.4)

Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_1 από τον μηχανισμό είναι ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}$:

$$W_F = F \cdot (\Delta x_1) = (7,5 \text{ N})(3 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 22,5 \text{ J}.$$

108. (14254) Ένα φορτηγό πλοίο οδηγείται στο λιμάνι του Πειραιά, αποκλειστικά με τη βοήθεια δύο ρυμουλκών, τα οποία τραβούν το φορτηγό, με σχοινιά, που μπορούν να θεωρηθούν οριζόντια. Για μια σημαντική χρονική διάρκεια, τα σχοινιά που τραβούν το πλοίο, είναι κάθετα μεταξύ τους.

Το ρυμουλκό (1) ασκεί δύναμη $\vec{F}_1$ μέτρου

$F_1 = 8 \cdot 10^4 \text{ N}$, το ρυμουλκό (2) ασκεί δύναμη $\vec{F}_2$

μέτρου $F_2 = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$ και το πλοίο κινείται

ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ μέτρου $v = 5 \text{ m/s}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Να υπολογίσετε:

4.1 το μέτρο της οριζόντιας δύναμης – αντίστασης $\vec{A}$ που δέχεται το πλοίο από το νερό,

Μονάδες 8

4.2 τη μετατόπιση του πλοίου σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 2 \text{ min}$,

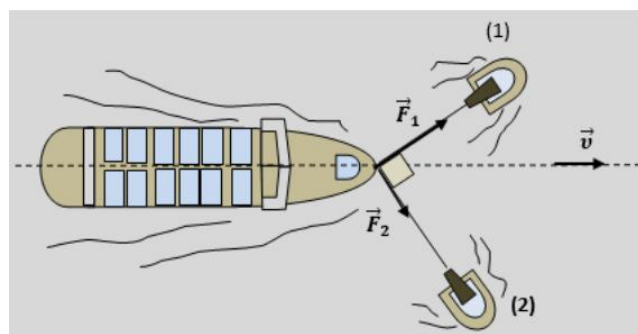
Μονάδες 5

4.3 την ενέργεια που προσφέρθηκε συνολικά στο πλοίο από τα δύο ρυμουλκά, κατά την παραπάνω χρονική διάρκεια.

Μονάδες 6

4.4 την ενέργεια που προσέφερε κάθε ρυμουλκό στο πλοίο, κατά την παραπάνω χρονική διάρκεια.

Μονάδες 6



Απάντηση

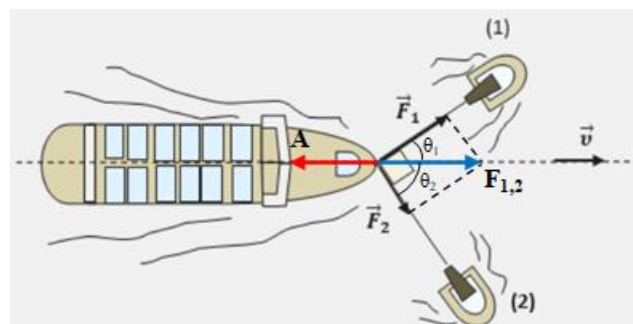
4.1)

Αφού οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους,

το μέτρο της συνισταμένης τους $\vec{F}_{1,2}$ υπολογίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα :

$$F_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{64 \cdot 10^8 + 36 \cdot 10^8} \text{ N} = \sqrt{100 \cdot 10^8} \text{ N} \Rightarrow$$

$$F_{1,2} = \sqrt{10^{10}} \text{ N} \Rightarrow F_{1,2} = 10^5 \text{ N}.$$



Το πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα, επομένως η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική.

Άρα, η αντίσταση του νερού $\vec{A}$ είναι αντίθετη από την $\vec{F}_{1,2}$:

$$\vec{F}_{\text{ολ}} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{1,2} + \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = -\vec{F}_{1,2}.$$

Επομένως, το μέτρο της αντίστασης είναι : $A = F_{1,2} = 10^5 \text{ N}$.

4.2)

Κάθε σημείο του πλοίου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Το μέτρο της μετατόπισης ενός σημείου του πλοίου σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x = v(\Delta t) = \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(120 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x = 600 \text{ m}.$$

4.3)

Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο πλοίο από τα δύο ρυμουλκά είναι ίση με το έργο της συνισταμένης $\vec{F}_{1,2}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ που ασκούν τα ρυμουλκά στο πλοίο :

$$W_{F_{1,2}} = F_{1,2}(\Delta x) \cos 0^\circ = (10^5 \text{ N})(600 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_{1,2}} = 6 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

4.4)

Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο πλοίο από κάθε ρυμουλκό είναι ίση με το έργο της δύναμης που ασκεί κάθε ρυμουλκό στο πλοίο.

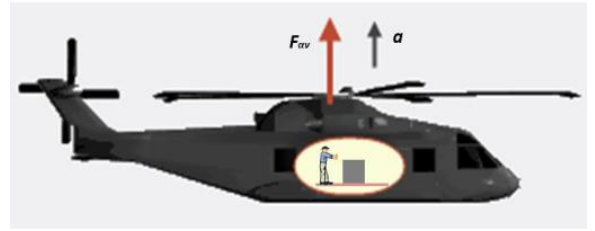
$$\left. \begin{array}{l} W_{F_1} = F_1(\Delta x)\cos\theta_1 \\ \cos\theta_1 = \frac{F_1}{F_{1,2}} \end{array} \right\} \Rightarrow W_{F_1} = \frac{F_1^2}{F_{1,2}}(\Delta x) \Rightarrow W_{F_1} = \frac{64 \cdot 10^8}{10^5} \cdot 6 \cdot 10^2 \text{ J} \Rightarrow W_{F_1} = 3,84 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

$$\left. \begin{array}{l} W_{F_2} = F_2(\Delta x)\cos\theta_2 \\ \cos\theta_2 = \frac{F_2}{F_{1,2}} \end{array} \right\} \Rightarrow W_{F_2} = \frac{F_2^2}{F_{1,2}}(\Delta x) \Rightarrow W_{F_2} = \frac{36 \cdot 10^8}{10^5} \cdot 6 \cdot 10^2 \text{ J} \Rightarrow W_{F_2} = 2,16 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Σχόλιο :

Στο ερώτημα 4.2 έπρεπε να ζητείται η μετατόπιση **ενός σημείου** του πλοίου, αφού το πλοίο δεν μπορεί να θεωρηθεί σημειακό κινητό.

109. (14255) Ένα ελικόπτερο αρχικά αιωρείται ακίνητο, με τη βοήθεια κατακόρυφης ανυψωτικής δύναμης $\vec{F}_{av}$, η οποία δημιουργείται από την αλληλεπίδραση των πτερυγίων της έλικας που περιστρέφεται οριζόντια και του αέρα.



Με κατάλληλους χειρισμούς του πιλότου, αυξάνεται το μέτρο της ανυψωτικής δύναμης και το ελικόπτερο αρχίζει

να ανεβαίνει κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$, μέτρου $a = 2 \text{ m/s}^2$.

Η συνολική μάζα του ελικοπτερίου, μαζί με τους επιβαίνοντες και τα φορτία που μεταφέρει είναι $M = 5 \cdot 10^3 \text{ kg}$. Στη διάρκεια αυτής της κατακόρυφης κίνησης του ελικοπτερίου, το δάπεδό του είναι οριζόντιο και πάνω σε αυτό βρίσκεται ένα κιβώτιο μάζας $m_k = 20 \text{ kg}$. Το κιβώτιο εμφανίζει με το δάπεδο τριβή, με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,4$.

4.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης $\vec{F}_{av}$, η οποία αρχικά καταφέρνει να διατηρεί ακίνητο, αιωρούμενο στον αέρα το ελικόπτερο, αλλά και το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης $\vec{F}_{av}'$, η οποία καταφέρνει να ανεβάσει το ελικόπτερο με επιτάχυνση $\vec{a}$.

Μονάδες 6 (3+3)

4.2 Να υπολογίσετε την κατακόρυφη μετατόπιση του ελικοπτερίου, σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 20 \text{ s}$, από την έναρξη της κατακόρυφης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησής του.

Μονάδες 5

4.3 Να υπολογίσετε το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης $\vec{N}$, την οποία δέχεται το κιβώτιο από το δάπεδο του ελικοπτερίου, στη διάρκεια αυτής της κατακόρυφης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησής του.

Μονάδες 6

4.4 Καθώς διαρκεί αυτή η ομαλά επιταχυνόμενη κατακόρυφη κίνηση του ελικοπτερίου, κάποιος από το πλήρωμα, ασκεί στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη, δίνοντάς του μια πολύ μικρή σταθερή ταχύτητα, οπότε το μετατοπίζει κατά $\Delta x_k = 60 \text{ cm}$.

Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε από τον άνθρωπο του πληρώματος στο κιβώτιο σε αυτή την οριζόντια μετατόπιση που του προκάλεσε;

Μονάδες 8

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

Θεωρούμε το ελικόπτερο μαζί με το πλήρωμα και τα αντικείμενα που βρίσκονται μέσα σ' αυτό, σαν ένα σώμα μάζας M .

Στην περίπτωση που το ελικόπτερο αιωρείται ακίνητο, ισχύει :

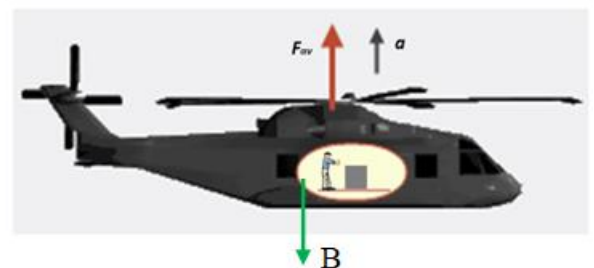
$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{av} - B = 0 \Leftrightarrow F_{av} = Mg \Rightarrow F_{av} = 5 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για την περίπτωση που το ελικόπτερο ανεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{a}$:

$$\Sigma F = Ma \Leftrightarrow F_{av}' - Mg = Ma \Leftrightarrow F_{av}' = M(g + a) \Rightarrow F_{av}' = 5 \cdot 10^3 \cdot 12 \Rightarrow F_{av}' = 6 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

4.2)

Ένα τυχαίο σημείο του ελικοπτερίου (με εξαίρεση τα σημεία του έλικα) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).



Το μέτρο της μετατόπισης σε χρονική διάρκεια Δt (από τη στιγμή της εκκίνησης) είναι :

$$\Delta y = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (400 \text{s}^2) \Rightarrow \Delta y = 400 \text{m}.$$

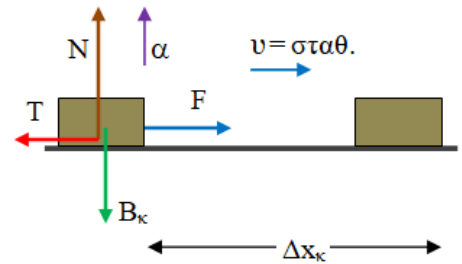
4.3)

Το κιβώτιο κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, με την επίδραση της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ από το δάπεδο και του βάρους του $\vec{B}_κ$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον κατακόρυφο άξονα y :

$$\Sigma F_y = m_k \alpha \Leftrightarrow N - B = m_k \alpha \Leftrightarrow N = m_k g + m_k \alpha \Leftrightarrow$$

$$N = m_k (g + \alpha) \Rightarrow N = (20 \text{ Kg}) \left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow N = 240 \text{ N}.$$



4.4)

Κιβώτιο

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N = 0,4 \cdot 240 \text{ N} \Rightarrow T = 96 \text{ N}.$

Στον οριζόντιο άξονα x το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \Leftrightarrow F = T \Rightarrow F = 96 \text{ N}.$$

Η ενέργεια που προσφέρει ο άνθρωπος στο κιβώτιο είναι ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}$:

$$W_F = F(\Delta x_k) = (96 \text{ N})(0,6 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 57,6 \text{ J}.$$

Σχόλια :

- 1) Στο ερώτημα 4.2 έπρεπε να ζητείται η κατακόρυφη μετατόπιση **ενός σημείου** του ελικοπτερου, αφού το ελικόπτερο δεν μπορεί να θεωρηθεί σημειακό κινητό.
- 2) Στο ερώτημα 4.4 η έκφραση «κάποιος ασκεί στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη, δίνοντάς του μια πολύ μικρή σταθερή ταχύτητα» δεν είναι ακριβής.
Αρχικά το κιβώτιο δεν έχει οριζόντια ταχύτητα, άρα η δύναμη το επιταχύνει για λίγο και στη συνέχεια κινείται με σταθερή (οριζόντια) ταχύτητα.
Δηλαδή, ο υπολογισμός του έργου είναι προσεγγιστικός αφού πρέπει να υποθέσουμε ότι η δύναμη είναι συνεχώς σταθερή και ότι η οριζόντια ταχύτητα του κιβωτίου είναι επίσης σταθερή.
- 3) Ως προς ένα σταθερό σημείο του εδάφους, **το κιβώτιο εκτελεί σύνθετη κίνηση** (συνδυασμό ευθύγραμμης ομαλής στον οριζόντιο άξονα και ομαλά επιταχυνόμενης στον κατακόρυφο άξονα).
Οι σύνθετες κινήσεις ανήκουν στη διδακτέα ύλη της Β' Λυκείου, συνεπώς **το ερώτημα 4.4 θεωρείται εκτός ύλης.**

110. (14256) Το flyboard είναι θαλάσσιο σπορ, στο οποίο ένας αθλητής είναι στερεωμένος πάνω σε μια βάση, στο κάτω μέρος της οποίας υπάρχουν σωλήνες που εκτοξεύουν προς τα κάτω νερό, με αποτέλεσμα να ασκούν στη βάση δύναμη προς τα πάνω και να προκαλούν κατακόρυφη μετατόπιση στο σύστημα.

Στη διπλανή εικόνα ο αθλητής έχει μάζα $M = 80 \text{ kg}$ και η βάση με τους σωλήνες έχει μάζα $m = 10 \text{ kg}$.

Το **σύστημα βάση-αθλητής**, δέχεται από τον μηχανισμό σταθερή προς τα πάνω δύναμη $\vec{F}$, μέτρου $F = 1080 \text{ N}$, ξεκινάει τη στιγμή $t_0 = 0$, από την ηρεμία και από την επιφάνεια της θάλασσας και κινείται κατακόρυφα.

Να υπολογίσετε:

4.1 το ύψος που έχει ανέβει η βάση του συστήματος, από την επιφάνεια της θάλασσας, τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$,

Μονάδες 7

4.2 το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης $\vec{F}_1$ που δέχεται ο αθλητής από τη βάση στην οποία πατάει,

Μονάδες 6

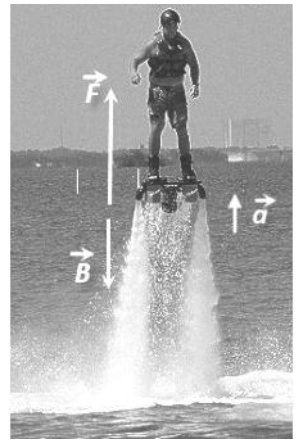
4.3 την ενέργεια που δόθηκε στον αθλητή από την βάση που τον ανεβάζει, από την έναρξη της κίνησης αυτής, μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$,

Μονάδες 6

4.4 τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος βάση-αθλητής, από την έναρξη της κίνησης αυτής, μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας θεωρείται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και αντιστάσεις αέρα-νερού αγνοούνται.



Απάντηση

4.1)

Στον αθλητή ασκούνται δύο κατακόρυφες δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}_1$ και η δύναμη $\vec{F}_1$ από τη βάση.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τον αθλητή :

$$\Sigma F_1 = M\alpha \Leftrightarrow F_1 - B_1 = M\alpha. \quad (1)$$

Στη βάση ασκούνται τρεις κατακόρυφες δυνάμεις : η δύναμη $\vec{F}$ από το νερό, το βάρος $\vec{B}_2$ και η δύναμη $\vec{F}_2$ από τον αθλητή.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη βάση :

$$\Sigma F_2 = m\alpha \Leftrightarrow F - B_2 - F_2 = m\alpha. \quad (2)$$

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ έχουν σχέση δράσης – αντίδρασης, άρα έχουν ίσα μέτρα : $F_1 = F_2$. (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$F_1 - B_1 + F - B_2 - F_2 = M\alpha + m\alpha \xrightarrow{(3)} F - B_1 - B_2 = M\alpha + m\alpha \Leftrightarrow F - (M + m)g = (M + m)\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{F - (M + m)g}{M + m} \Rightarrow \alpha = \frac{(1080 - 900) \text{ N}}{90 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ο αθλητής εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Μετά από χρόνο t_1 θα φτάσει σε ύψος : $h = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}^2) \Rightarrow h = 4 \text{ m}.$



4.2)

$$(1) \Rightarrow F_{\alpha} = Mg + M\alpha = M(g + \alpha) \Rightarrow F_{\alpha} = (80 \text{ Kg}) \left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F_{\alpha} = 960 \text{ N}.$$

4.3)

Η ενέργεια που μεταφέρθηκε από τη βάση στον αθλητή είναι ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ που ασκεί η βάση σ' αυτόν. Ισχύει :

$$W_{F_1} = F_1 \cdot h = (960 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow W_{F_1} = 3840 \text{ J}.$$

4.4)

Έστω ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια στην επιφάνεια της θάλασσας είναι μηδενική: $U_{\text{αρχ}} = 0$.

Η δυναμική ενέργεια αθλητή – βάσης σε ύψος h είναι :

$$U_{\text{τελ}} = (M + m)gh = (90 \text{ Kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ m}) \Rightarrow U_{\text{τελ}} = 3600 \text{ J}.$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι : $\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta U = 3600 \text{ J}.$

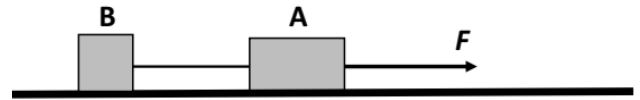
Σχόλια :

1) Η έννοια του συστήματος σωμάτων δεν διδάσκεται στην Α' Λυκείου.

2) Κατά τη διάρκεια της κίνησης η **μάζα του συστήματος μειώνεται** (λόγω του νερού που εκτοξεύεται από τη βάση), **άρα η επιτάχυνση αυξάνεται**.

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι η μεταβολή της μάζας στη διάρκεια της κίνησης είναι ασήμαντη.

111. (14388) Στο οριζόντιο επίπεδο του σχήματος ηρεμούν δυο σώματα Α και Β με μάζες $M = 3 \text{ kg}$ και $m = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα, τα οποία είναι δεμένα μέσω αβαρών μη εκτατού νήματος. Ένα παιδί, κάποια στιγμή που θεωρούμε $t = 0 \text{ s}$, τραβάει το σώμα Α, ασκώντας του οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 28 \text{ N}$, όπως στο σχήμα. Τα σώματα ολισθαίνουν στο οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης κάθε σώματος με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu = 0,5$.



4.1 Να μεταφέρετε το σχήμα στο γραπτό σας και να το συμπληρώσετε με τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα.

Μονάδες 8

Να υπολογίσετε:

4.2 Την επιτάχυνση που αποκτούν τα σώματα.

Μονάδες 5

4.3 Την τάση του νήματος που ασκείται σε κάθε σώμα.

Μονάδες 3

4.4 Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το νήμα που ενώνει τα δύο σώματα κόβεται, ενώ η δύναμη μέτρου $F = 28 \text{ N}$ συνεχίζει να ασκείται στο σώμα Α.

α. Ποιο είναι το είδος της κίνησης που εκτελεί το κάθε σώμα, αφού κοπεί το νήμα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

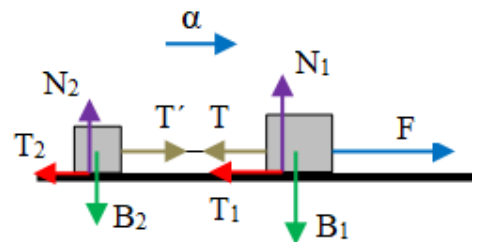
β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Β την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 1,6 \text{ s}$.

Μονάδες 3

Απάντηση

4.1)

Στο σώμα Α ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_1$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}_1$, η δύναμη $\vec{F}$, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_1$.
Στο σώμα Β ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_2$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}_2$, η τάση του νήματος $\vec{T}'$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_2$.



4.2)

Σώμα Α

Στον άξονα y ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_1 = B_1 = Mg \Rightarrow N_1 = 30 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_1 = \mu N_1 = 0,5 \cdot 30 \text{ N} \Rightarrow T_1 = 15 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = Ma \Leftrightarrow F - T - T_1 = Ma. \quad (1)$$

Σώμα Β

Στον άξονα y ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 = B_2 = mg \Rightarrow N_2 = 10 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_2 = \mu N_2 = 0,5 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_2 = 5 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = ma \Leftrightarrow T' - T_2 = ma. \quad (2)$$

Αφού η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, ισχύει : $T' = T$.

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$F - T - T_1 + T' - T_2 = M\alpha + m\alpha \xrightarrow{T'=T} F - T_1 - T_2 = (M + m)\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F - T_1 - T_2}{M + m} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{(28 - 15 - 5) \text{ N}}{(3 + 1) \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.3)

$$(2) \Rightarrow T' = T_2 + m\alpha \Rightarrow T' = 5 \text{ N} + 2 \text{ N} \Rightarrow T' = 7 \text{ N}.$$

Επομένως η τάση του νήματος έχει μέτρο $T = 7 \text{ N}$.

4.4)

α. Μέχρι τη στιγμή t_1 τα σώματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t_1 = 4 \text{ s έχουν ταχύτητα μέτρου } v_1 = \alpha t_1 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αφού κοπεί το νήμα

Στο σώμα Α ασκούνται στην οριζόντια διεύθυνση η δύναμη $\vec{F}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_1$.

Αφού $F > T_1$, το σώμα Α αποκτά επιτάχυνση $\vec{a}_1$ που έχει την ίδια φορά με την αρχική ταχύτητα $\vec{v}_1$.

Άρα, το σώμα Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Στο σώμα Β στην οριζόντια διεύθυνση ασκείται μόνο η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_2$, η οποία είναι αντίρροπη από την αρχική ταχύτητα $\vec{v}_1$.

Το σώμα Β θα αποκτήσει επιβράδυνση μέτρου :

$$\alpha_2 = \frac{T_2}{m_2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{5 \text{ N}}{1 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Άρα, το σώμα Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

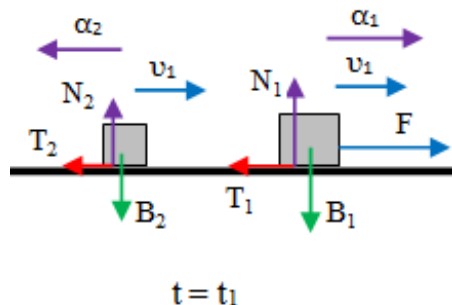
β.

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Β υπολογίζεται από τη σχέση : $v_2 = v_1 - \alpha_2(t - t_1)$. (3)

$$\text{Για } t = t_1 + 1,6 \text{ s} \xrightarrow{(3)} v_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (1,6 \text{ s}) \Rightarrow v_2 = 0.$$

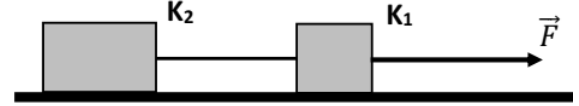
Σχόλιο

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο και οριζόντιο και η δύναμη $\vec{F}$ έχει τη διεύθυνση του νήματος.



112. (14389) Τα κιβώτια K_1 και K_2 του διπλανού σχήματος έχουν μάζες $m_1 = 3 \text{ kg}$ και $m_2 = 5 \text{ kg}$ αντίστοιχα και βρίσκονται αρχικά ακίνητα σε οριζόντιο δάπεδο, με το οποίο εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$.

Τα κιβώτια είναι δεμένα μεταξύ τους με ένα μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας, το οποίο είναι οριζόντιο και τεντωμένο.



Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ένας εργάτης ασκεί στο κιβώτιο K_1 οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ στη διεύθυνση του νήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα και μετακινεί τα κιβώτια με σταθερή επιτάχυνση $a = 1 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να μεταφέρετε το σχήμα στο γραπτό σας, να το συμπληρώσετε με τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα και να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής ολίσθησης που ασκείται σε κάθε κιβώτιο.

Μονάδες 12

4.2 Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα σε κάθε κιβώτιο.

Μονάδες 3

4.3 Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης που ασκεί το νήμα στο κιβώτιο K_1 , από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική $t_1 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 4

4.4 Να υπολογίσετε, πόσο τοις εκατό από την ενέργεια που μεταβιβάζει ο εργάτης στα κιβώτια, παραμένει ως κινητική στο κιβώτιο K_1 .

Μονάδες 6

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

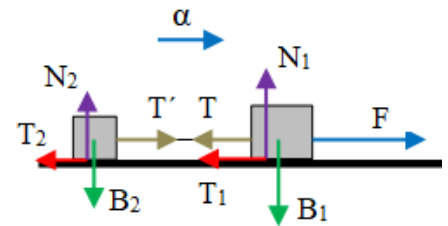
Στο κιβώτιο K_1 ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_1$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}_1$, η δύναμη $\vec{F}$, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_1$.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_1 = B_1 = m_1 g \Rightarrow N_1 = 30 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_1 = \mu N_1 = 0,5 \cdot 30 \text{ N} \Rightarrow T_1 = 15 \text{ N}.$$



Στο κιβώτιο K_2 ασκούνται : το βάρος $\vec{B}_2$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}_2$, η τάση του νήματος $\vec{T}'$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}_2$.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 = B_2 = m_2 g \Rightarrow N_2 = 50 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_2 = \mu N_2 = 0,5 \cdot 50 \text{ N} \Rightarrow T_2 = 25 \text{ N}.$$

4.2)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x για το κιβώτιο K_2 :

$$\Sigma F_x = m_2 a \Leftrightarrow T' - T_2 = m_2 a \Leftrightarrow T' = T_2 + m_2 a \Rightarrow T' = 25 \text{ N} + 5 \text{ N} \Rightarrow T' = 30 \text{ N}.$$

Αφού η μάζα του νήματος είναι ασήμαντη, ισχύει : $T' = T$.

Επομένως, η τάση του νήματος έχει μέτρο $T = 30 \text{ N}$.

4.3)

Τα κιβώτια εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της μετατόπισης του K_1 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s, είναι :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (16 \text{s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 8 \text{ m}.$$

Το έργο της τάσης του νήματος $\vec{T}$ υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_T = T \cdot (\Delta x_1) \cdot \sin 180^\circ = (30 \text{ N})(8 \text{ m})(-1) \Rightarrow W_T = -240 \text{ J}.$$

4.4)

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για το κιβώτιο K_1 υπολογίζω το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$:

$$\Sigma F_x = m_1 a \Leftrightarrow F - T - T_1 = m_1 a \Leftrightarrow F = T + T_1 + m_1 a \Rightarrow F = 30 \text{ N} + 15 \text{ N} + 3 \text{ N} \Rightarrow F = 48 \text{ N}.$$

Μετά από χρόνο t το κιβώτιο K_1 έχει μετατοπιστεί κατά Δx και έχει κινητική ενέργεια K .

Σύμφωνα με το ΘΜΚΕ για το K_1 :

$$K = \Sigma W = (\Sigma F_x)(\Delta x) \Leftrightarrow K = m_1 a (\Delta x). \quad (1)$$

Η ενέργεια που προσφέρει ο εργάτης στα κιβώτια μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ στην ίδια χρονική διάρκεια, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_F = F(\Delta x). \quad (2)$$

Το ποσοστό της ενέργειας που προσφέρει ο εργάτης, η οποία μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του κιβωτίου K_1 είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{K}{W_F} \cdot 100\% \xrightarrow{(1),(2)} \Pi(\%) = \frac{m_1 a (\Delta x)}{F(\Delta x)} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{m_1 a}{F} \cdot 100\% \Rightarrow$$

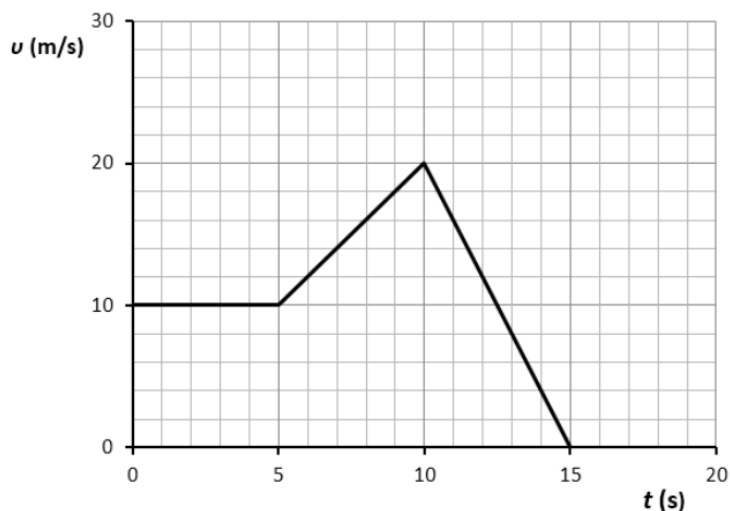
$$\Pi(\%) = \frac{3 \cdot 1}{48} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 6,25\%.$$

113. (14390) Ένα σώμα με μάζα $m = 120 \text{ kg}$ ολισθαίνει σε οριζόντιο ευθύγραμμο δρόμο, που ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$.

Στο σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$ στη διεύθυνση της κίνησης του και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$, διέρχεται από τη θέση $x_0 = -25 \text{ m}$, κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα.

Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του δρόμου είναι $\mu = 0,2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.



4.1 Ποιο είναι το είδος της κίνησης του σώματος για καθένα από τα χρονικά διαστήματα: $0 \text{ s} - 5 \text{ s}$, $5 \text{ s} - 10 \text{ s}$, $10 \text{ s} - 15 \text{ s}$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσής του για καθένα από τα παραπάνω χρονικά διαστήματα.

Μονάδες 10

4.2 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις και να υπολογίσετε το μέτρο της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$, που ασκείται στο σώμα, στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 5 \text{ s}$.

Μονάδες 7

4.3 Να προσδιορίσετε τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 4

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$, στη διάρκεια του 4ου δευτερολέπτου της κίνησης του σώματος.

Μονάδες 4

Απάντηση

4.1)

$0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$: η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

$$\text{Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι : } \alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{(10 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(5 - 0) \text{s}} \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

$5 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$: το μέτρο της ταχύτητας του σώματος αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$$\text{Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι : } \alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(20 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(10 - 5) \text{s}} \Rightarrow \alpha_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$10 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$: το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μειώνεται γραμμικά με το χρόνο, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

$$\text{Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι : } \alpha_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{(0 - 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(15 - 10) \text{s}} \Rightarrow \alpha_3 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.2)

Στη διεύθυνση κίνησης (άξονας x) ασκούνται :

η δύναμη $\vec{F}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση (άξονας y) ασκούνται :

το βάρος $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το δρόμο.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

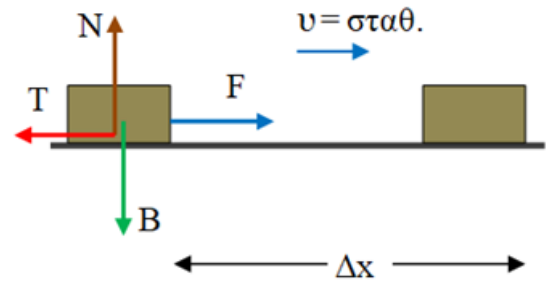
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B = mg \Rightarrow N = 1200 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N = 0,2 \cdot 1200 \text{ N} \Rightarrow T = 240 \text{ N}.$$

Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 5 \text{ s}$ το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα στον άξονα x ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \Rightarrow F = T = 240 \text{ N}.$$



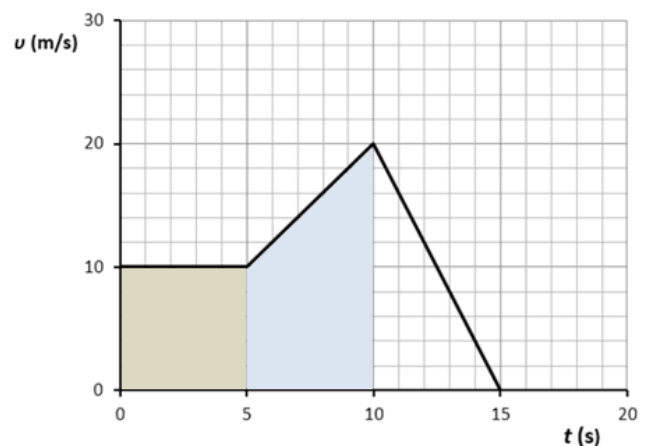
4.3)

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης του σώματος στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} - 10 \text{ s}$ είναι ίση (αριθμητικά) με το (αλγεβρικό) άθροισμα των εμβαδών των σχημάτων στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου :

$$\Delta x = E_{\text{ορθ}} + E_{\text{τραπ}} = 5 \cdot 10 \text{ m} + \frac{(20+10) \cdot 5}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 125 \text{ m}.$$

Η αλγεβρική τιμή της θέσης του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 10 \text{ s}$, είναι :

$$x = x_0 + \Delta x \Rightarrow x = -25 \text{ m} + 125 \text{ m} \Rightarrow x = 100 \text{ m}.$$



4.4)

Στο χρονικό διάστημα $3 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$ το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

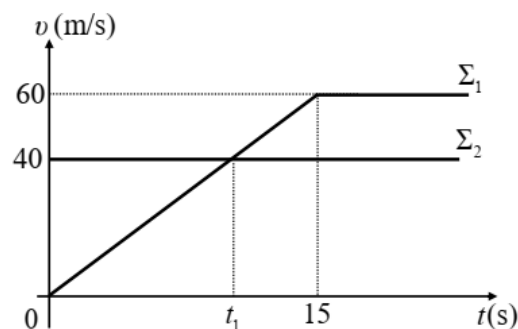
Το μέτρο της μετατόπισης του σώματος σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 1 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x' = v(\Delta t) \Rightarrow \Delta x' = 10 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στην ίδια χρονική διάρκεια είναι :

$$W_F = F(\Delta x') = (240 \text{ N})(10 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 2400 \text{ J}.$$

114. (14391) Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με ίσες μάζες $m_1 = m_2 = 40 \text{ Kg}$, βρίσκονται στον ίδιο οριζόντιο ευθύγραμμο δρόμο, με τον οποίο εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Ο οριζόντιος δρόμος συμπίπτει με τον οριζόντιο άξονα x' . Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ το Σ_1 ξεκινά να κινείται από ένα σημείο του δρόμου και την ίδια στιγμή διέρχεται από το ίδιο σημείο το σώμα Σ_2 κινούμενο με σταθερή ταχύτητα ίση με 40 m/s , στην ίδια κατεύθυνση με το Σ_1 . Στο διάγραμμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ταχύτητας – χρόνου για τα δύο αυτά σώματα.



4.1 Στο γραπτό σας να σχεδιάσετε τα σώματα και τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε ένα.

Μονάδες 8

4.2 Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε σώμα κατά την διεύθυνση του οριζόντιου άξονα x' (α) για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 15 \text{ s}$ και (β) μετά τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$.

Μονάδες 8

4.3 Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα σώματα τη χρονική στιγμή t_1 ;

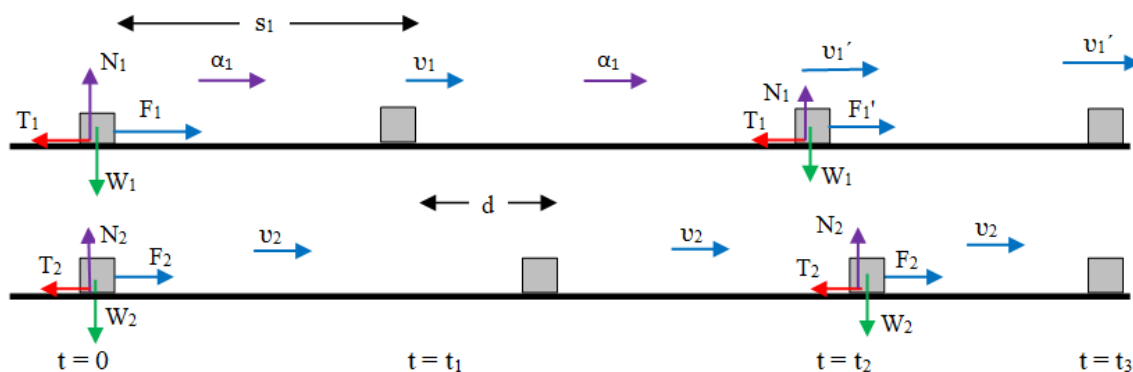
Μονάδες 5

4.4 Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ τα δύο σώματα θα συναντηθούν ξανά. Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Μονάδες 4

Απάντηση

4.1)



4.2)

Σ_1

Στον άξονα y ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_1 = m_1 g \Rightarrow N_1 = 400 \text{ N}$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T_1 = \mu N_1 = 0,2 \cdot 400 \text{ N} \Rightarrow T_1 = 80 \text{ N}$.

$t_0 = 0 \text{ s} \rightarrow t_2 = 15 \text{ s}$

Με βάση το διάγραμμα υπολογίζω την τιμή της επιτάχυνσης : $\alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_2 - t_0} = \frac{(60 - 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(15 - 0) \text{s}} \Rightarrow \alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$\Sigma F_x = m_1 \alpha_1 \Leftrightarrow F_1 - T_1 = m_1 \alpha_1 \Leftrightarrow F_1 = T_1 + m_1 \alpha_1 \Rightarrow F_1 = 80 \text{ N} + 160 \text{ N} \Rightarrow F_1 = 240 \text{ N}$.

$t > 15 \text{ s}$

Αφού το Σ_1 κινείται με σταθερή ταχύτητα, στον άξονα x ισχύει :

$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_1' - T_1 = 0 \Leftrightarrow F_1' = T_1 \Rightarrow F_1' = 80 \text{ N}$.

Σ_2

Στον άξονα y ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 = m_2 g \Rightarrow N_2 = 400 \text{ N}$.

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T_2 = \mu N_2 = 0,2 \cdot 400 \text{ N} \Rightarrow T_2 = 80 \text{ N}$.

Αφού το Σ_2 κινείται με σταθερή ταχύτητα, στον άξονα x ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_2 - T_2 = 0 \Leftrightarrow F_2 = T_2 \Rightarrow F_2 = 80 \text{ N}.$$

4.3)

Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , το Σ_1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Το μέτρο της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : $v_1 = \alpha_1 t$.

Τη χρονική στιγμή t_1 οι ταχύτητες των σωμάτων έχουν ίσα μέτρα. Επομένως :

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = \alpha_1 t \\ v_1 = v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 t_1 = v_2 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_2}{\alpha_1} \Rightarrow t_1 = \frac{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow t_1 = 10 \text{ s}.$$

Μέχρι τη στιγμή t_1 , τα σώματα έχουν διανύσει διαστήματα :

$$s_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (100 \text{ s}^2) \Rightarrow s_1 = 200 \text{ m}.$$

$$s_2 = v_2 t_1 = \left(40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (10 \text{ s}) \Rightarrow s_2 = 400 \text{ m}.$$

Τη στιγμή t_1 , η απόστασή τους είναι : $d = s_2 - s_1 = 400 \text{ m} - 200 \text{ m} \Rightarrow d = 200 \text{ m}$.

4.4)

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 15 \text{ s}$, τα σώματα έχουν διανύσει διαστήματα :

$$s_1' = \frac{1}{2} \alpha_1 t_2^2 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (225 \text{ s}^2) \Rightarrow s_1' = 450 \text{ m}.$$

$$s_2' = v_2 t_2 = \left(40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (15 \text{ s}) \Rightarrow s_2' = 600 \text{ m}.$$

Αφού $s_2' > s_1'$, άρα θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t_3 > t_2$.

Στη χρονική διάρκεια $t_2 \rightarrow t_3$, έχουν διανύσει διαστήματα :

$$s_1'' = v_1'(t_3 - t_2) \Rightarrow s_1'' = 60(t_3 - 15). \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

$$s_2'' = v_2(t_3 - t_2) \Rightarrow s_2'' = 40(t_3 - 15). \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει : } s_1' + s_1'' = s_2' + s_2'' \xrightarrow{(1),(2)} 450 + 60(t_3 - 15) = 600 + 40(t_3 - 15) \Leftrightarrow$$

$$20(t_3 - 15) = 150 \Leftrightarrow 20t_3 - 300 = 150 \Leftrightarrow 20t_3 = 450 \Leftrightarrow t_3 = 22,5 \text{ s}.$$

2ος τρόπος

Έστω ότι θα συναντηθούν τη χρονική στιγμή $t_3 > 15 \text{ s}$.

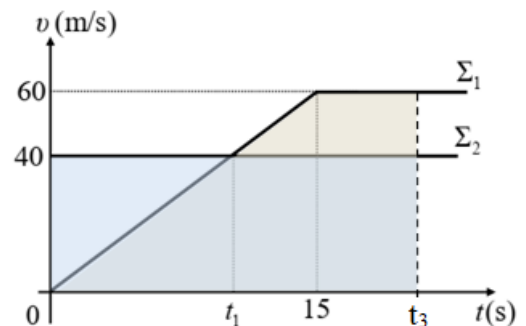
Τα διαστήματα που έχουν διανύσει είναι ίσα (αριθμητικά) με τα εμβαδά των αντίστοιχων σχημάτων στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου :

$$s_1 = E_{\text{τραπ}} = \frac{t_3 + (t_3 - 15)}{2} \cdot 60 = 30(2t_3 - 15). \text{ S.I.} \quad (3)$$

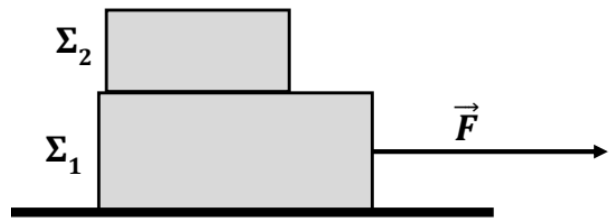
$$s_2 = E_{\text{ορθ}} = 40t_3. \text{ S.I.} \quad (4)$$

Τη στιγμή που συναντώνται, ισχύει :

$$s_1 = s_2 \Leftrightarrow 30(2t_3 - 15) = 40t_3 \Leftrightarrow 60t_3 - 450 = 40t_3 \Leftrightarrow 20t_3 = 450 \Rightarrow t_3 = 22,5 \text{ s}.$$



115. (14392) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 6 \text{ kg}$ και $m_2 = 4 \text{ kg}$ αντίστοιχα, με το Σ_2 τοποθετημένο πάνω στο Σ_1 . Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ ασκούμε στο Σ_1 οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα σώματα, εξαιτίας της στατικής τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ τους, κινούνται μαζί σαν ένα σώμα, ξεκινώντας από την ηρεμία, με σταθερή επιτάχυνση $a = 2 \text{ m/s}^2$, επάνω στο οριζόντιο ακίνητο δάπεδο προς την κατεύθυνση της δύναμης. Το μέτρο της τριβής ολίσθησης που εμφανίζεται μεταξύ του σώματος Σ_1 και του δαπέδου είναι ίσο με $T_{ολ} = 30 \text{ N}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.



4.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 3

4.2 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συστήματος των δύο σωμάτων, όταν αυτό έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 9 \text{ m}$.

Μονάδες 4

4.3 Να υπολογίσετε το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος Σ_1 και του οριζόντιου δαπέδου.

Μονάδες 10

4.4 Τη χρονική στιγμή t_1 που η ταχύτητα του συστήματος είναι ίση με $v_1 = 10 \text{ m/s}$, απομακρύνουμε ακαριαία το σώμα Σ_2 , χωρίς να καταργήσουμε τη δύναμη $\vec{F}$.

Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Σ_1 , τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 3 \text{ s}$.

Μονάδες 8

Απάντηση

4.1)

Τα δύο σώματα κινούνται προς τα δεξιά με την ίδια επιτάχυνση μέτρου a .

Σώμα 2

Η στατική τριβή $\vec{T}_2$ (που εμποδίζει την ολίσθηση του Σ_2 πάνω στο Σ_1) έχει φορά προς τα δεξιά, ώστε να επιταχύνει το Σ_2 προς τα δεξιά.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής : $\Sigma F_x = m_2 a \Leftrightarrow T_2 = m_2 a$. (1)

Σώμα 1

Το σώμα Σ_1 δέχεται από το Σ_2 δύναμη στατικής τριβής $\vec{T}_1$, με φορά προς τα αριστερά.

Οι δυνάμεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ έχουν ίσα μέτρα : $T_1 = T_2$ (δράση – αντίδραση).

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής : $\Sigma F_x = m_1 a \Leftrightarrow F - T_1 - T = m_1 a$. (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

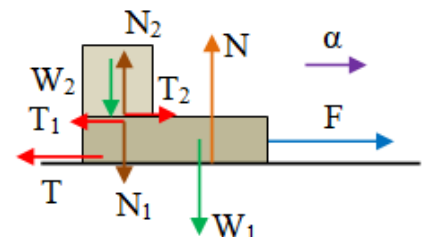
$$F - T_1 - T + T_2 = m_1 a + m_2 a \xrightarrow{T_1 = T_2} F = T + (m_1 + m_2) a \Rightarrow F = 30 \text{ N} + (10 \text{ Kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow F = 50 \text{ N}.$$

4.2)

Τα σώματα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Από την εξίσωση της ταχύτητας προκύπτει :

$$v = at \Leftrightarrow t = \frac{v}{a}. \quad (3)$$



Αντικαθιστώ στην εξίσωση της μετατόπισης :

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \xrightarrow{(3)} \Delta x = \frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{v^2}{2\alpha} \Leftrightarrow v^2 = 2\alpha(\Delta x) \Rightarrow v^2 = 2 \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (9 \text{ m}) \Rightarrow v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3)

Σώμα 2

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 = m_2 g \Rightarrow N_2 = 40 \text{ N}.$$

Σώμα 1

$$N_1 = N_2 = 40 \text{ N} \quad (\text{δράση} - \text{αντίδραση}).$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = N_1 + m_1 g \Rightarrow N = 40 \text{ N} + 60 \text{ N} \Rightarrow N = 100 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{30 \text{ N}}{100 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,3.$$

4.4)

Μόλις απομακρύνουμε το Σ_2 μειώνεται το μέτρο της κάθετης δύναμης και της τριβής ολίσθησης, οπότε αυξάνεται το μέτρο της επιτάχυνσης.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' = m_1 g \Rightarrow N' = 60 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T' = \mu N' = 0,3 \cdot 60 \text{ N} \Rightarrow T' = 18 \text{ N}.$$

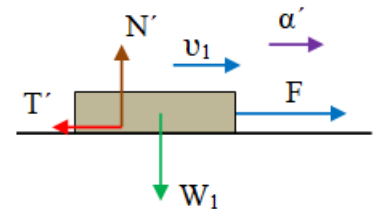
Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m_1 \alpha' \Leftrightarrow F - T' = m_1 \alpha' \Leftrightarrow \alpha' = \frac{F - T'}{m_1} \Rightarrow \alpha' = \frac{(50 - 18) \text{ N}}{6 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha' = \frac{16 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}.$$

Το Σ_1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου v_1 και επιτάχυνση μέτρου α' .

Το μέτρο της ταχύτητας μετά από χρονική διάρκεια $\Delta t = 3 \text{ s}$ είναι :

$$v_1' = v_1 + \alpha'(\Delta t) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(\frac{16 \text{ m}}{3 \text{ s}^2} \right) (3 \text{ s}) \Rightarrow v_1' = 26 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



116. (14393) Σε σώμα μάζας $m = 4 \text{ Kg}$, το οποίο είναι ακίνητο στη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$, επάνω σε μη λείο οριζόντιο δάπεδο, ασκείται την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$, σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 20 \text{ N}$. Το σώμα κινείται επάνω στο οριζόντιο δάπεδο και η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας κατά τη διάρκεια του *δου* μέτρου της μετατόπισής του είναι $\Delta K = 12 \text{ J}$.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να υπολογίσετε:

4.1 Τον συντελεστή της τριβής ολίσθησης (μ) μεταξύ του σώματος και του οριζόντιου δαπέδου.

Μονάδες 5

4.2 Την χρονική στιγμή t_1 , κατά την οποία το σώμα θα βρίσκεται στην θέση $x_1 = 6 \text{ m}$ και το μέτρο v_1 της ταχύτητας που αυτό θα έχει αποκτήσει.

Μονάδες 6

Μετά την χρονική στιγμή t_1 καταργείται η δύναμη F .

4.3 Σε ποια θέση x_2 και σε ποια χρονική στιγμή t_2 θα μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος;

Μονάδες 9

4.4 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου για το παραπάνω σώμα από την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ μέχρι την χρονική στιγμή t_2 .

Μονάδες 5

Απάντηση

4.1)

Το *δου* μέτρο είναι η μετατόπιση από τη θέση $x = 5 \text{ m}$ μέχρι τη θέση $x_1 = 6 \text{ m}$.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για μετατόπιση $\Delta x = 1 \text{ m}$:

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow (F - T)(\Delta x) = \Delta K \Leftrightarrow$$

$$T = F - \frac{\Delta K}{\Delta x} \Rightarrow T = 20 \text{ N} - \frac{12 \text{ J}}{1 \text{ m}} \Rightarrow T = 8 \text{ N}.$$

$$\text{Στον άξονα } y \text{ ισχύει: } \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 40 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{8 \text{ N}}{40 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,2.$$

4.2)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha_1 \Leftrightarrow F - T = m\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{F - T}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{12 \text{ N}}{4 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow t_1$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Ισχύει :

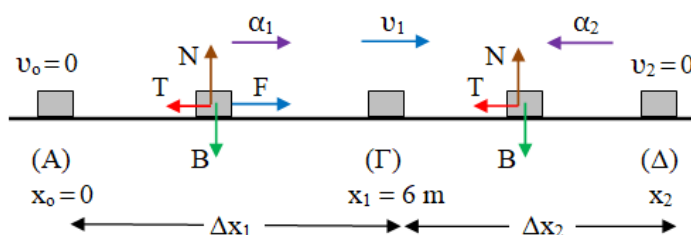
$$x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2x_1}{\alpha_1} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{\alpha_1}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6}{3}} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}.$$

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t_1, \text{ το μέτρο της ταχύτητας είναι: } v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3)

Μετά τη χρονική στιγμή t_1 , το σώμα επιβραδύνεται εξαιτίας της τριβής ολίσθησης.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (με θετική φορά προς τα δεξιά) :



$$\Sigma F_x = m\alpha_2 \Leftrightarrow -T = m\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = -\frac{T}{m} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{8\text{ N}}{4\text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_2 = -2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας, υπολογίζω τη χρονική διάρκεια Δt_2 της επιβραδυνόμενης κίνησης :

$$v_2 = v_1 + \alpha_2(\Delta t_2) \xrightarrow{v_2=0} \alpha_2(\Delta t_2) = -v_1 \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v_1}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 3\text{ s}.$$

Η ταχύτητα του σώματος θα μηδενιστεί τη χρονική στιγμή : $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 2\text{ s} + 3\text{ s} \Rightarrow t_2 = 5\text{ s}.$

Η τιμή της μετατόπισης στη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι :

$$\Delta x_2 = v_1(\Delta t_2) + \frac{1}{2}\alpha_2(\Delta t_2)^2 = \left(6\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(3\text{ s}) + \frac{1}{2}\left(-2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(9\text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_2 = 9\text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 5\text{ s}$ βρίσκεται στη θέση : $x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 6\text{ m} + 9\text{ m} \Rightarrow x_2 = 15\text{ m}.$

4.4)

0 s → 2 s : $v = 3t$ (S.I.)

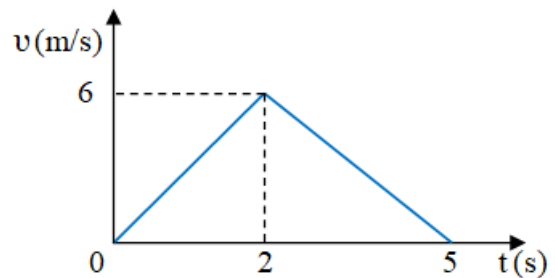
$$t = 0 \Rightarrow v = 0.$$

$$t = 2\text{ s} \Rightarrow v = 6\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2 s → 5 s : $v = 6 - 2(t - 2)$ ή $v = 10 - 2t$ (S.I.)

$$t = 2\text{ s} \Rightarrow v = 6\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$t = 5\text{ s} \Rightarrow v = 0.$$



Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για τη χρονική διάρκεια $0\text{ s} \rightarrow 5\text{ s}$, φαίνεται στο σχήμα.

117. (14394) Σώμα μάζας $m = 10 \text{ Kg}$ είναι δεμένο στην άκρη νήματος μήκους $l = 1 \text{ m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο της οροφής. Το σώμα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα ισορροπεί με το νήμα στην κατακόρυφη θέση (1). Ασκώντας σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, εκτρέπουμε το σώμα από την αρχική του θέση έτσι ώστε το νήμα στη νέα θέση (2) να σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την κατακόρυφο. Το σώμα ισορροπεί στη νέα θέση.

4.1 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όταν αυτό ισορροπεί στις θέσεις (1) και (2) και να αναλύσετε τις δυνάμεις σε δύο κάθετους μεταξύ τους άξονες στη θέση (2), με τον άξονα x' να είναι οριζόντιος.

Μονάδες 7

Να υπολογίσετε:

4.2 Την τάση του νήματος στις θέσεις (1) και (2).

Μονάδες 7

4.3 Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 4

4.4 Αν αφήσουμε ελεύθερο το σώμα από την θέση (2), να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που αυτό θα έχει όταν διέρχεται από την θέση (1).

Μονάδες 7

Δίνονται: $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

θέση (1)

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι : το βάρος $\vec{B}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}_1$.

θέση (2)

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι : το βάρος $\vec{B}$, η τάση του νήματος $\vec{T}_2$ και η οριζόντια δύναμη $\vec{F}$.

Αναλύω την $\vec{T}_2$ σε κάθετες συνιστώσες $\vec{T}_{2x}$, $\vec{T}_{2y}$.

4.2)

θέση (1)

Το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow T_1 = B = mg \Rightarrow T_1 = 100 \text{ N}.$$

θέση (2)

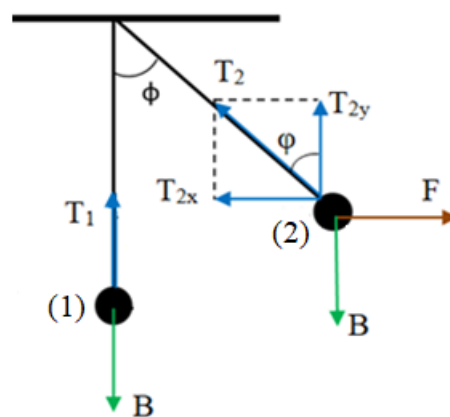
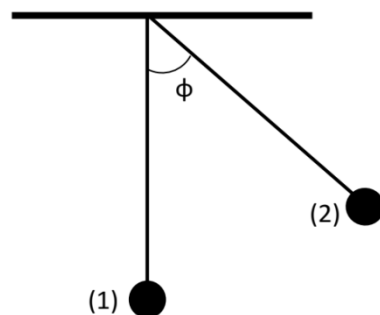
Στον άξονα y ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow T_{2y} = B = mg \Rightarrow T_{2y} = 100 \text{ N}.$

$$\text{Ισχύει : } T_{2y} = T_2 \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow T_2 = \frac{T_{2y}}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow T_2 = \frac{100 \text{ N}}{0,5} \Rightarrow T_2 = 200 \text{ N}.$$

4.3)

θέση (2)

$$\text{Στον άξονα } x \text{ ισχύει : } \Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F = T_{2x} = T_2 \eta\mu\varphi \Rightarrow F = (200 \text{ N}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F = 100\sqrt{3} \text{ N}.$$



4.4)

Η υψομετρική διαφορά μεταξύ αρχικής θέσης Γ και τελικής θέσης Α είναι :

$$h = (A\Delta) = (AO) - (\Delta O) = \ell - \ell \cos\phi \Rightarrow h = \ell (1 - \cos\phi) \Rightarrow$$

$$h = 0,5 \text{ m.}$$

Κατά τη διάρκεια της διαδρομής από το Γ στο Α παράγει έργο μόνο το βάρος του σώματος (η τάση του νήματος δεν παράγει έργο γιατί είναι συνεχώς κάθετη στις στοιχειώδεις μετατοπίσεις).

1ος τρόπος

Η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζω σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Α και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ :

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh \Leftrightarrow v^2 = 2gh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

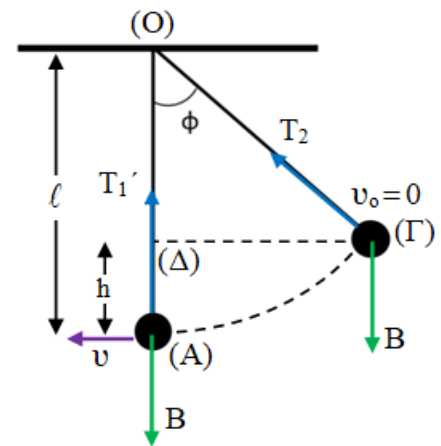
$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = \sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2ος τρόπος

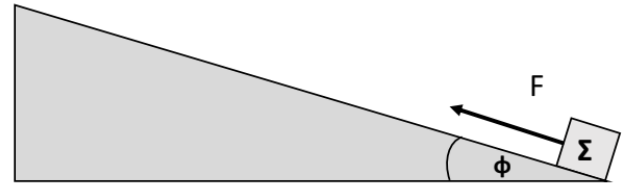
Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή (Γ) → (Α) :

$$K_A - K_\Gamma = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \Leftrightarrow v^2 = 2gh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = \sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



118. (14395) Σε σώμα Σ μάζας $m = 10 \text{ Kg}$, το οποίο βρίσκεται στη βάση (θέση $x_0 = 0 \text{ m}$) μη λείου κεκλιμένου επιπέδου, μεγάλου μήκους και γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$, αρχίζει να ασκείται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$, σταθερή δύναμη μέτρου $F = 120 \text{ N}$, με διεύθυνση παράλληλη του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα, ξεκινώντας από την ηρεμία, κινείται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου ανεβαίνοντας με σταθερή επιτάχυνση και το μέτρο της μετατόπισής του, κατά τη διάρκεια του 4ου δευτερολέπτου της κίνησής του, είναι $\Delta x = 7 \text{ m}$.



4.1 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα κατά την κίνησή του επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, για το χρονικό διάστημα $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_4 = 4 \text{ s}$ και να τις αναλύσετε σε δύο κάθετους μεταξύ τους άξονες, εκ των οποίων ο ένας να είναι ο άξονας της κίνησης.

Μονάδες 5

4.2 Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος για το παραπάνω χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 4 \text{ s}$.

Μονάδες 4

4.3 Τον συντελεστή τριβής ολίσθησης (μ) μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου.

Μονάδες 7

Μετά την χρονική στιγμή $t_4 = 4 \text{ s}$ και ενώ το σώμα βρίσκεται στη θέση x_4 επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο καταργείται η δύναμη F .

4.4 Σε ποια θέση (x_5) θα μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος;

Μονάδες 9

Δίνονται: $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

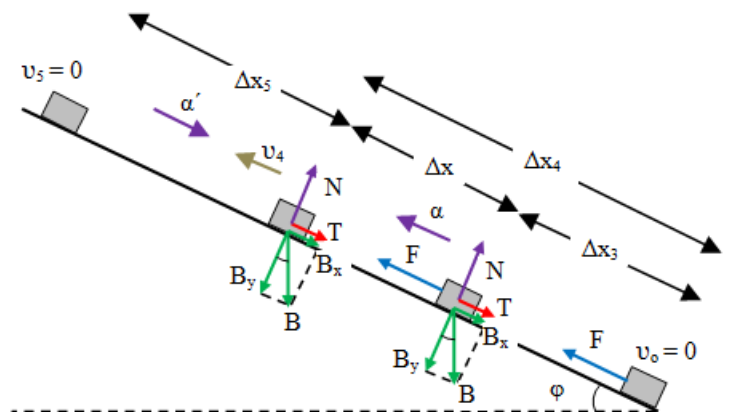
Απάντηση

4.1)

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, στο σώμα ασκούνται και οι εξής δυνάμεις :
το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ (με φορά προς τα κάτω).
Αναλύω το βάρος σε κάθετες συνιστώσες $\vec{B}_x$ (παράλληλη στην επιφάνεια) και $\vec{B}_y$ (κάθετη στην επιφάνεια) και υπολογίζω τα μέτρα τους :

$$B_x = mg\eta\mu\varphi = 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \text{ N} = 50 \text{ N},$$

$$B_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N} = 50\sqrt{3} \text{ N}.$$



4.2)

Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 4 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$). Το 4ο s είναι η χρονική διάρκεια από τη χρονική στιγμή $t_3 = 3 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_4 = 4 \text{ s}$. Για τα μέτρα των αντίστοιχων μετατοπίσεων ισχύουν οι σχέσεις :

$0 \text{ s} - 3 \text{ s}$

$$\Delta x_3 = \frac{1}{2} a t_3^2. \quad (1)$$

$$\frac{0 \text{ s} - 4 \text{ s}}{\Delta x_4} = \frac{1}{2} \alpha t_4^2 \quad (2)$$

$$\frac{3 \text{ s} - 4 \text{ s}}{\Delta x} = \Delta x_4 - \Delta x_3 \xrightarrow{(1),(2)} \Delta x = \frac{1}{2} \alpha (t_4^2 - t_3^2) \Leftrightarrow \alpha = \frac{2(\Delta x)}{t_4^2 - t_3^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 7 \text{ m}}{(16 - 9) \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.3)

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y \Rightarrow N = 50\sqrt{3} \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F - B_x - T = m\alpha \Leftrightarrow T = F - B_x - m\alpha \Rightarrow T = 120 \text{ N} - 50 \text{ N} - 20 \text{ N} \Rightarrow T = 50 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{50 \text{ N}}{50\sqrt{3} \text{ N}} \Rightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.4)

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t_4 = 4 \text{ s το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου : } v_4 = \alpha t_4 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}) \Rightarrow v_4 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της μετατόπισης μέχρι τη στιγμή $t_4 = 4 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_4 = \frac{1}{2} \alpha t_4^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(16 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_4 = 16 \text{ m}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ από τη στιγμή t_4 μέχρι το σώμα να σταματήσει :

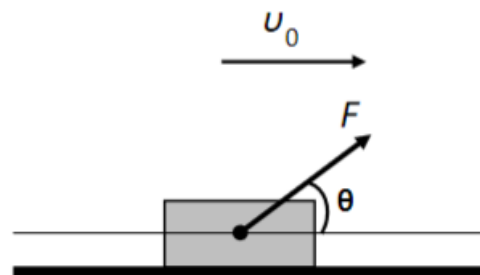
$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_{B_x} + W_T = K_{\text{τελ}} - K_4 \Leftrightarrow -B_x(\Delta x_5) - T(\Delta x_5) = 0 - \frac{1}{2} m v_4^2 \Leftrightarrow \Delta x_5 = \frac{m v_4^2}{2(B_x + T)} \Rightarrow$$

$$\Delta x_5 = \frac{10 \cdot 64}{2(50 + 50)} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_5 = 3,2 \text{ m}.$$

Τη στιγμή που σταματά το σώμα βρίσκεται στη θέση :

$$x_5 = x_0 + \Delta x_4 + \Delta x_5 = 0 + 16 \text{ m} + 3,2 \text{ m} \Rightarrow x_5 = 19,2 \text{ m}.$$

119. (14396) Το κιβώτιο του σχήματος που έχει μάζα $m = 16 \text{ Kg}$ διέρχεται από τη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ του οριζόντιου δαπέδου, την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$, που ασκείται στο κιβώτιο είναι $F = 100 \text{ N}$. Η διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία 60° με την οριζόντια διεύθυνση.



4.1 Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που δέχεται το κιβώτιο, να αποδείξετε ότι το δάπεδο, στο οποίο κινείται το σώμα, δεν μπορεί να είναι λείο και να αναλύσετε τις δυνάμεις σε δύο κάθετους μεταξύ τους άξονες, εκ των οποίων ο ένας να είναι ο άξονας της κίνησης.

Μονάδες 7

4.2 Να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή της τριβής ολίσθησης (μ).

Μονάδες 6

Την χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται.

4.3 Να υπολογίσετε το μέτρο v_2 της ταχύτητας του κιβωτίου την χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$

Μονάδες 6

4.4 Σε ποια θέση (x_3) η ταχύτητα του κιβωτίου μηδενίζεται;

Μονάδες 6

Δίνονται: $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sqrt{3} = 1,7$ $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1)

$0 \text{ s} \rightarrow t_1$

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, για τις δυνάμεις στον άξονα x πρέπει να ισχύει :

$\Sigma F_x = 0$ (1ος νόμος του Newton).

Επομένως υπάρχει τριβή ολίσθησης $\vec{T}_1$, αντίθετη από την οριζόντια συνιστώσα $\vec{F}_x$, έτσι ώστε να προκύπτει : $\Sigma F_x = F_x - T_1 = 0$.

4.2)

Υπολογίζω τα μέτρα των συνιστωσών $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$:

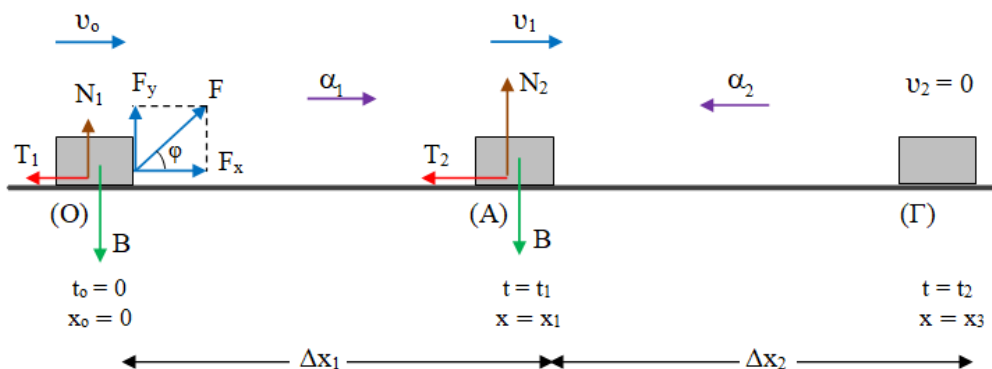
$F_x = F \sigma\upsilon\nu\varphi = 100 \cdot 0,5 \text{ N} = 50 \text{ N}$.

$F_y = F \eta\mu\varphi = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N} = 50\sqrt{3} \text{ N} \Rightarrow F_y \approx 85 \text{ N}$.

Από τον 1ο νόμο του Newton στον άξονα x : $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_x = T_1 \Rightarrow T_1 = 50 \text{ N}$.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_1 + F_y - B = 0 \Leftrightarrow N_1 = mg - F_y \Rightarrow N_1 = (160 - 85) \text{ N} = 75 \text{ N}$.



$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T_1 = \mu N_1 \Leftrightarrow \mu = \frac{T_1}{N_1} \Rightarrow \mu = \frac{50 \text{ N}}{75 \text{ N}} \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}.$$

4.3)

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t_1 = 4 \text{ s έχει ταχύτητα μέτρου : } v_1 = v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$t_1 = 4 \text{ s} \rightarrow t_3 (v_3 = 0) :$$

Από τη στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$, μεταβάλλεται το μέτρο της κάθετης δύναμης και της τριβής.

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_2 - B = 0 \Rightarrow N_2 = B = mg = 160 \text{ N}.$$

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T_2 = \mu N_2 = \frac{2}{3} \cdot 160 \text{ N} \Rightarrow T_2 = \frac{320}{3} \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x (θετική φορά της $\vec{v}_0$) :

$$\Sigma F_x = m a_2 \Leftrightarrow -T_2 = m a_2 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{T_2}{m} \Rightarrow a_2 = -\frac{\frac{320}{3} \text{ N}}{16 \text{ Kg}} \Rightarrow a_2 = -\frac{20}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Μετά τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$ έχει ταχύτητα μέτρου :

$$v_2 = v_0 + a_2(t_2 - t_1) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(\frac{20}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v_2 = \frac{20}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4)

Το μέτρο της μετατόπισης μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$, είναι :

$$\Delta x_1 = v_0 t_1 \Rightarrow \Delta x_1 = \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (4 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_1 = 80 \text{ m}.$$

Υπολογίζω την τιμή της μετατόπισης Δx_2 στη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης, μέχρι να ακινητοποιηθεί.

1ος τρόπος

$$\text{Τη στιγμή που σταματά ισχύει : } v = 0 \Rightarrow 0 = v_0 + a(\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = -\frac{v_0}{a} \Rightarrow \Delta t_2 = 3 \text{ s}.$$

Από τη στιγμή t_1 μέχρι να σταματήσει το σώμα μετατοπίζεται κατά

$$\Delta x_2 = v_0(\Delta t_2) + \frac{1}{2} a_2(\Delta t_2)^2 = \left(20 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot 3^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 30 \text{ m}.$$

Εναλλακτικά

$$\Delta x_2 = \frac{v_0(\Delta t_2)}{2} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{1}{2} \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (3 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_2 = 30 \text{ m}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση του σώματος από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι να σταματήσει :

$$\Sigma W = \Delta K \Leftrightarrow W_{T_2} = 0 - K_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow -T_2(\Delta x_2) = -\frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow \Delta x_2 = \frac{mv_0^2}{2T_2} \Rightarrow$$

$$\Delta x_2 = \frac{16 \cdot 400}{2 \cdot \frac{320}{3}} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 30 \text{ m}.$$

➤ Τη στιγμή που σταματά το κιβώτιο, βρίσκεται στη θέση :

$$x_3 = x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0 + 80 \text{ m} + 30 \text{ m} \Rightarrow x_3 = 110 \text{ m}.$$

120. (14397) Σώμα μάζας $m = 20 \text{ Kg}$ είναι ακίνητο επάνω σε ένα οριζόντιο δάπεδο, στη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$, στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 80 \text{ N}$ και αυτό αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Το σώμα την χρονική στιγμή $t_1 = 6 \text{ s}$ φθάνει στη θέση $x_1 = 45 \text{ m}$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος και την ταχύτητά του την χρονική στιγμή $t_1 = 6 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.2 Να δικαιολογήσετε, ότι μεταξύ του δαπέδου και του σώματος ασκείται δύναμη τριβής ολίσθησης, να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να υπολογίσετε την τιμή του αντίστοιχου συντελεστή (μ).

Μονάδες 10

Μετά την χρονική στιγμή $t_1 = 6 \text{ s}$ το σώμα συνεχίζει την κίνησή του επάνω στο οριζόντιο δάπεδο, ενώ εξακολουθεί να ασκείται σ' αυτό η δύναμη $\vec{F}$ και την χρονική στιγμή $t_2 = 10 \text{ s}$ φθάνει στη θέση $x_2 = 137 \text{ m}$.

4.3 Υπάρχει δύναμη τριβής ολίσθησης από τη θέση x_1 μέχρι τη θέση x_2 ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

4.4 Να υπολογίσετε τα έργα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα από την θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ μέχρι την θέση $x_2 = 137 \text{ m}$ και να σχεδιάσετε το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου από την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ μέχρι την χρονική στιγμή $t_2 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Απάντηση

4.1)

$0 \text{ s} \rightarrow 6 \text{ s}$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης :

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2(\Delta x_1)}{t_1^2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2 \cdot 45 \text{ m}}{36 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha_1 = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 6 \text{ s}$, έχει ταχύτητα μέτρου : $v_1 = \alpha_1 t_1 = \left(2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

4.2)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x : $\Sigma F_x = m \alpha_1 \Rightarrow \Sigma F_x = 50 \text{ N}.$

Αφού $\Sigma F_x < F$, άρα υπάρχει τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Ισχύει : $\Sigma F_x = F - T \Leftrightarrow T = F - \Sigma F_x \Rightarrow T = 80 \text{ N} - 50 \text{ N} \Rightarrow T = 30 \text{ N}.$

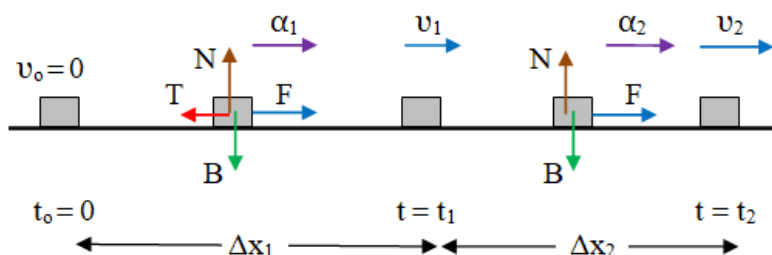
Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 200 \text{ N}.$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{30 \text{ N}}{200 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,15.$

4.3)

$6 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$



Στη χρονική διάρκεια $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 4 \text{ s}$ το σώμα μετατοπίζεται κατά $\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 92 \text{ m}$.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης α_2 :

$$\Delta x_2 = v_1(\Delta t_2) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t_2)^2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{2[\Delta x_2 - v_1(\Delta t_2)]}{(\Delta t_2)^2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2 \cdot (92 - 15 \cdot 4)}{4^2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x' = m\alpha_2 = 20 \cdot 4 \text{ N} \Rightarrow \Sigma F_x' = 80 \text{ N}.$$

Αφού $\Sigma F_x' = F$, άρα δεν υπάρχει τριβή ολίσθησης μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$.

4.4)

Η ολική μετατόπιση του σώματος έχει μέτρο : $\Delta x_{ολ} = x_2 - x_0 = 137 \text{ m}$.

Υπολογίζω το έργο κάθε δύναμης, για τη χρονική διάρκεια που ασκείται στο σώμα.

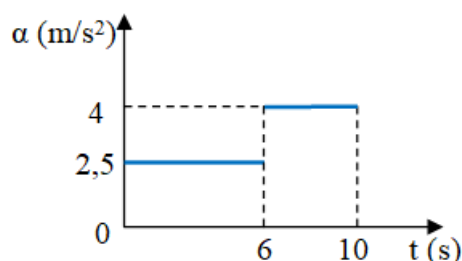
$$W_F = F(\Delta x_{ολ}) = (80 \text{ N})(137 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 10960 \text{ J}.$$

$$W_T = -T(\Delta x_1) = -(30 \text{ N})(45 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -1350 \text{ J}.$$

$$W_B = B(\Delta x_{ολ})\sin 90^\circ = 0.$$

$$W_N = N(\Delta x_{ολ})\sin 90^\circ = 0.$$

Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχόλιο : Η εκφώνηση αναφέρει ότι «μετά τη χρονική στιγμή $t_1 = 6 \text{ s}$ το σώμα συνεχίζει την κίνησή του πάνω στο οριζόντιο δάπεδο», δηλαδή το σώμα συνεχίζει να κινείται στην ίδια επιφάνεια.

Από τα δεδομένα όμως προκύπτει ότι στο σώμα **δεν ασκείται πλέον τριβή ολίσθησης**.

Για να συμβεί αυτό **πρέπει να αλλάξει η επιφάνεια επαφής**.

Επομένως, η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «μετά τη χρονική στιγμή $t_1 = 6 \text{ s}$ το σώμα συνεχίζει την κίνησή του πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, **διαφορετικής υφής από το αρχικό**».

121. (14525) Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα μάζας $m = 10 \text{ Kg}$ που κινείται ευθύγραμμα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

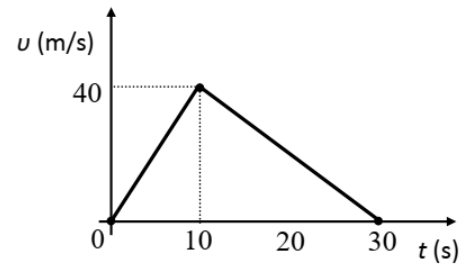
4.1 Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος για το χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου ($a-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:



Χρονικό διάστημα (s)	Μέτρο συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα (N)	Διανύσματα της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης και της ταχύτητας της σώματος (ομόρροπα ή αντίρροπα)	Να χαρακτηρίσετε τη κίνηση του σώματος (π.χ. ευθύγραμμη ομαλή, ευθύγραμμη επιταχυνόμενη...)
0 - 10			
10 - 30			

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης τα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} - 10 \text{ s}$ και $10 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Σε ποιο χρονικό διάστημα προσφέρεται ενέργεια στο σώμα και σε ποιο χρονικό διάστημα αφαιρείται ενέργεια από το σώμα;

Με ποιο γνωστό θεώρημα είναι συμβατά τα αποτελέσματά σας;

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου.

$0 \text{ s} - 10 \text{ s}$

$$\Delta x_1 = E_{\text{τριγ}(1)} = \frac{40 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 200 \text{ m}.$$

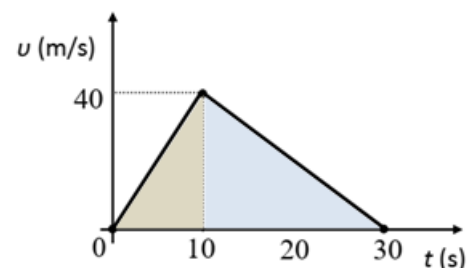
$10 \text{ s} - 30 \text{ s}$

$$\Delta x_2 = E_{\text{τριγ}(2)} = \frac{40 \cdot 20}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 400 \text{ m}.$$

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σώμα, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 200 \text{ m} + 400 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 600 \text{ m}.$$

Η μέση ταχύτητα για τη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$, έχει μέτρο : $v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{600 \text{ m}}{30 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$



4.2)

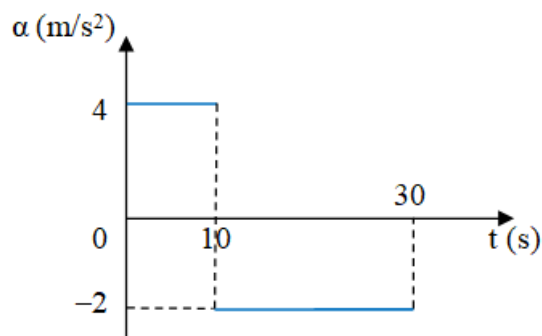
Από τις τιμές του διαγράμματος, υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης σε κάθε χρονική διάρκεια.

0 s – 10 s

$$\alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{(40 - 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(10 - 0) \text{s}} \Rightarrow \alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

10 s – 30 s

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0 - 40) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(30 - 10) \text{s}} \Rightarrow \alpha_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Το διάγραμμα της αλγεβρικής τιμής της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για τη χρονική διάρκεια 0 s – 30 s, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

4.3)

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x, υπολογίζω την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης σε κάθε χρονική διάρκεια.

0 s – 10 s : $\Sigma F_1 = m\alpha_1 = 40 \text{ N}$.

Η συνισταμένη δύναμη είναι **ομόρροπη** με την ταχύτητα, άρα η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη**.

10 s – 30 s : $\Sigma F_2 = m\alpha_2 = -20 \text{ N}$.

Η συνισταμένη δύναμη είναι **αντίρροπη** με την ταχύτητα, άρα η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη**.

4.4)

0 s – 10 s

$$W_{\Sigma F(1)} = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) = (40 \text{ N})(200 \text{ m}) \Rightarrow W_{\Sigma F(1)} = 8000 \text{ J}.$$

Στο χρονικό διάστημα (0 s – 10 s) το έργο της συνισταμένης είναι θετικό, άρα προσφέρεται ενέργεια στο σώμα.

Στο διάστημα αυτό, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι :

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1600 \text{ J} \Rightarrow \Delta K_1 = 8000 \text{ J}.$$

Επομένως ισχύει : $W_{\Sigma F(1)} = \Delta K_1$.

10 s – 30 s

$$W_{\Sigma F(2)} = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (-20 \text{ N})(400 \text{ m}) \Rightarrow W_{\Sigma F(2)} = -8000 \text{ J}.$$

Στο χρονικό διάστημα (10 s – 30 s) το έργο της συνισταμένης είναι αρνητικό, άρα αφαιρείται ενέργεια από το σώμα.

Στο διάστημα αυτό, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι :

$$\Delta K_2 = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1600 \text{ J} \Rightarrow \Delta K_2 = -8000 \text{ J}.$$

Επομένως ισχύει : $W_{\Sigma F(2)} = \Delta K_2$.

Συμπέρασμα : Σε κάθε χρονικό διάστημα το έργο της συνισταμένης είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος, δηλαδή τα αποτελέσματα συμφωνούν με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ).

Σχόλιο :

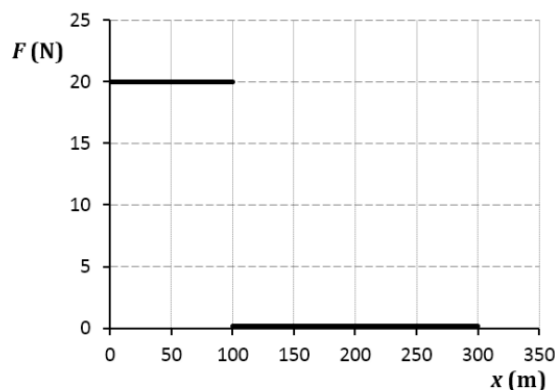
Η διατύπωση «Με ποιο γνωστό θεώρημα είναι συμβατά τα αποτελέσματά σας;» είναι ασαφής.

Μία πιο σαφής διατύπωση θα ήταν η εξής : «Να εξετάσετε αν τα αποτελέσματά σας συμφωνούν με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ)».

Επίσης, η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν ζητείται η επαλήθευση του ΘΜΚΕ σε κάθε χρονική διάρκεια ή συνολικά.

122. (14526) Σώμα μάζας $m = 10 \text{ Kg}$ είναι ακίνητο στη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ στο σώμα αρχίζει ν' ασκείται οριζόντια δύναμη, της οποίας η αλγεβρική τιμή μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη θέση του σώματος, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



4.1 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις με έναν από τους όρους:

“ευθύγραμμη ομαλή”, “ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη”, “ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη”

Μεταξύ των θέσεων $0 \text{ m} - 100 \text{ m}$ η κίνηση είναι

Μεταξύ των θέσεων $100 \text{ m} - 300 \text{ m}$ η κίνηση είναι

Μονάδες 4

4.2 Να υπολογίσετε το έργο της οριζόντιας δύναμης όταν το σώμα μετατοπίζεται από τη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ έως τη θέση $x = 300 \text{ m}$.

Μονάδες 6

4.3 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό διέρχεται από τη θέση $x = +300 \text{ m}$.

Μονάδες 7

4.4 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$) για το χρονικό διάστημα που απαιτήθηκε για να φτάσει το σώμα στη θέση $x = +300 \text{ m}$.

Μονάδες 8

Απάντηση

4.1)

Αφού το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο και η δύναμη $\vec{F}$ είναι οριζόντια, άρα ισχύει : $\Sigma F_x = F$.

$0 \text{ m} - 100 \text{ m}$

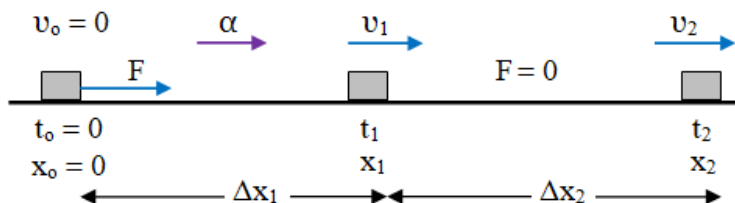
Η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή, άρα το σώμα αποκτά σταθερή επιτάχυνση.

Αφού ήταν ακίνητο αρχικά, θα εκτελέσει **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση.

$100 \text{ m} - 300 \text{ m}$

Η δύναμη $\vec{F}$ είναι μηδενική άρα και η επιτάχυνση είναι μηδενική.

Επομένως το σώμα εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλή** κίνηση.



4.2)

Στο σώμα ασκείται δύναμη για μετατόπιση $\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 100 \text{ m}$.

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζεται από τη σχέση : $W_F = F(\Delta x_1) = (20 \text{ N})(100 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 2000 \text{ J}$.

4.3)

$0 \text{ m} - 100 \text{ m}$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης :

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{20 \text{ N}}{10 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1 = 100 \text{ m}$. Ισχύει :

$$x_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2x_1}{\alpha} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{\alpha}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{2}} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 10 \text{ s}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου : $v_1 = \alpha t_1 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

100 m – 300 m

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή, άρα η ταχύτητα είναι σταθερή.

Επομένως, στη θέση $x_2 = 300 \text{ m}$ η ταχύτητα έχει μέτρο : $v_2 = v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.4)

100 m – 300 m

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζω τη χρονική διάρκεια Δt_2 της ομαλής κίνησης :

$$\Delta x_2 = v_1 (\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_1} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{200 \text{ m}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow \Delta t_2 = 10 \text{ s}.$$

Το σώμα φτάνει στη θέση $x_2 = 300 \text{ m}$ τη χρονική στιγμή :

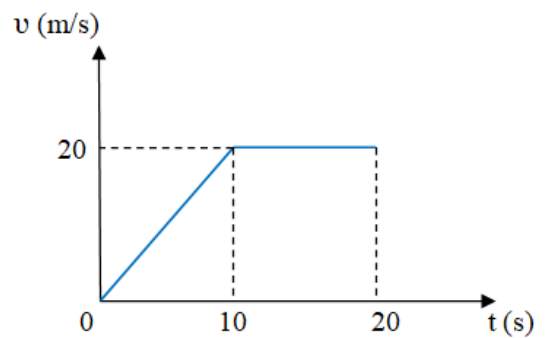
$$t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 10 \text{ s} + 10 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 20 \text{ s}.$$

0 s – 10 s

$$v = \alpha t \Rightarrow v = 2t. \text{ (S.I.)}$$

10 s – 20 s

$$v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{σταθερή}.$$



Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

123. (14527) Ένα σώμα μάζας $m = 10 \text{ Kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$ φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

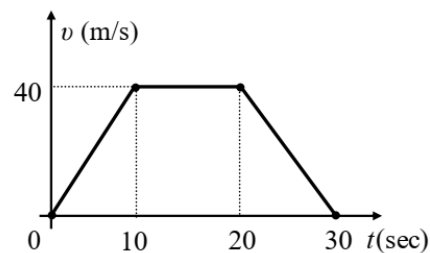
4.1 Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος κατά το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου ($a-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:



Χρονικό διάστημα (s)	Μέτρο συνισταμένης οριζόντια δύναμης που ασκείται στο σώμα (N)	Διανύσματα της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης και της ταχύτητας της σώματος (ομόρροπα ή αντίρροπα)	Να χαρακτηρίσετε τη κίνηση του σώματος (π.χ. ευθύγραμμη ομαλή, ευθύγραμμη επιταχυνόμενη...)
0-10			
10-20			
20-30			

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης κατά τα τρία χρονικά διαστήματα: $0 \text{ s} - 10 \text{ s}$, $10 \text{ s} - 20 \text{ s}$ και $20 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Σε ποιο χρονικό διάστημα προσφέρεται ενέργεια στο σώμα και σε ποιο χρονικό διάστημα αφαιρείται ενέργεια από το σώμα;

Με ποιο γνωστό θεώρημα είναι συμβατά τα αποτελέσματά σας;

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου.

$0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$

$$\Delta x_1 = E_{\text{τριγ}(1)} = \frac{40 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 200 \text{ m}.$$

$10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$

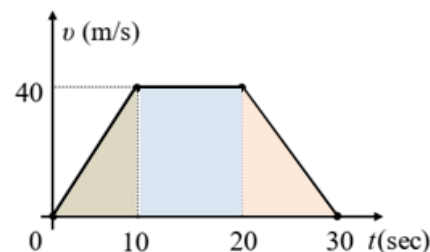
$$\Delta x_2 = E_{\text{ορθ}} = 40 \cdot 10 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 400 \text{ m}.$$

$20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$

$$\Delta x_3 = E_{\text{τριγ}(2)} = \frac{40 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_3 = 200 \text{ m}.$$

$0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 200 \text{ m} + 400 \text{ m} + 200 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 800 \text{ m}.$$



4.2)

0 s → 10 s

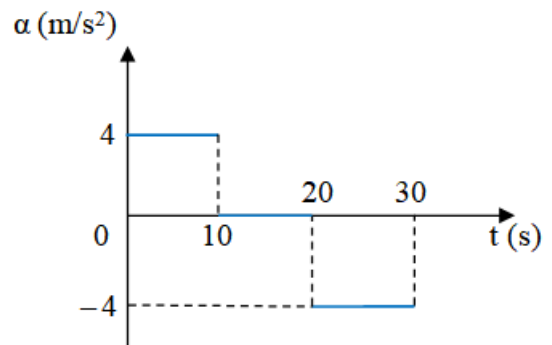
$$\alpha_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{(40 - 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(10 - 0) \text{s}} \Rightarrow \alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

10 s – 20 s

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(40 - 40) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(20 - 10) \text{s}} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

20 s – 30 s

$$\alpha_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{(0 - 40) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(30 - 20) \text{s}} \Rightarrow \alpha_3 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



4.3)

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής σε κάθε χρονική διάρκεια.

0 s → 10 s

$$\Sigma F_1 = m\alpha_1 = 40 \text{ N}.$$

Η συνισταμένη δύναμη είναι **ομόρροπη** με την ταχύτητα, άρα η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη**.

10 s – 20 s :

$$\Sigma F_2 = m\alpha_2 = 0 \text{ N}.$$

Η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική, άρα η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλή**.

20 s – 30 s :

$$\Sigma F_3 = m\alpha_3 = -40 \text{ N}.$$

Η συνισταμένη δύναμη είναι **αντίρροπη** με την ταχύτητα, άρα η κίνηση είναι **ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη**.

4.4)

0 s – 10 s

$$W_{\Sigma F(1)} = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) = (40 \text{ N})(200 \text{ m}) \Rightarrow W_{\Sigma F(1)} = 8000 \text{ J}.$$

Στο χρονικό διάστημα (0 s – 10 s) το έργο της συνισταμένης είναι θετικό, άρα προσφέρεται ενέργεια στο σώμα.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας στο διάστημα αυτό είναι :

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1600 \text{ J} \Rightarrow \Delta K_1 = 8000 \text{ J}.$$

$$\text{Επομένως ισχύει : } W_{\Sigma F(1)} = \Delta K_1.$$

10 s – 20 s

$$W_{\Sigma F(2)} = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (0 \text{ N})(400 \text{ m}) \Rightarrow W_{\Sigma F(2)} = 0 \text{ J}.$$

Στο χρονικό διάστημα (10 s – 30 s) το έργο της συνισταμένης είναι μηδενικό, άρα δεν προσφέρεται ούτε αφαιρείται ενέργεια από το σώμα.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας στο διάστημα αυτό είναι :

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow \Delta K_2 = 0 \text{ J.}$$

Επομένως ισχύει : $W_{\Sigma F(2)} = \Delta K_2$.

20 s – 30 s

$$W_{\Sigma F(3)} = (\Sigma F_3)(\Delta x_3) = (-40 \text{ N})(200 \text{ m}) \Rightarrow W_{\Sigma F(3)} = -8000 \text{ J.}$$

Στο χρονικό διάστημα (20 s – 30 s) το έργο της συνισταμένης είναι αρνητικό, άρα αφαιρείται ενέργεια από το σώμα.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας στο διάστημα αυτό είναι :

$$\Delta K_3 = 0 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1600 \text{ J} \Rightarrow \Delta K_3 = -8000 \text{ J.}$$

Επομένως ισχύει : $W_{\Sigma F(3)} = \Delta K_3$.

Συμπέρασμα : Σε κάθε χρονικό διάστημα το έργο της συνισταμένης είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος, δηλαδή τα αποτελέσματα συμφωνούν με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ).

Σχόλιο : Η διατύπωση «Με ποιο γνωστό θεώρημα είναι συμβατά τα αποτελέσματά σας;» είναι ασαφής. Μία πιο σαφής διατύπωση θα ήταν η εξής : «Να εξετάσετε αν τα αποτελέσματά σας συμφωνούν με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ)».

Επίσης, η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν ζητείται η επαλήθευση του ΘΜΚΕ σε κάθε χρονική διάρκεια ή συνολικά.

124. (14528) Μικρό σφαιρίδιο μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ αφήνεται από ύψος $h = 10 \text{ m}$, από το έδαφος, να εκτελέσει ελεύθερη πτώση.

4.1 Σε ποιο ύψος από το έδαφος, η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου (U) είναι ίση με την κινητική του ενέργεια (K);

Μονάδες 6

4.2 Ποια είναι η ταχύτητα του σφαιριδίου τη στιγμή που η δυναμική του ενέργεια (U) είναι ίση με την κινητική του ενέργεια (K);

Μονάδες 6

4.3 Έστω $t_{ολ}$ η συνολική χρονική διάρκεια για να φτάσει το σφαιρίδιο στο έδαφος και t_E η χρονική διάρκεια μέχρις ότου, η δυναμική του ενέργεια να γίνει ίση με την κινητική.

Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{t_{ολ}}{t_E}$.

(Η χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ είναι η στιγμή που αφήνουμε το σώμα να πέσει προς το έδαφος).

Μονάδες 6

4.4 Να γίνουν στο ίδιο διάγραμμα σε βαθμονομημένους άξονες, οι γραφικές παραστάσεις $U = U(y)$, $K = K(y)$ και $E_{MHX} = E_{MHX}(y)$, όπου y η απόσταση του σφαιριδίου από το έδαφος και E_{MHX} η μηχανική ενέργεια του σφαιριδίου.

Μονάδες 7

Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

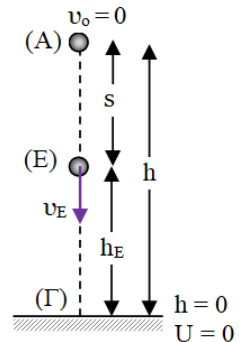
4.1)

Αφού το σφαιρίδιο εκτελεί ελεύθερη πτώση, κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Ορίζω επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζω το ΘΔΜΕ για τις θέσεις Α, Ε :

$$K_E + U_E = K_A + U_A \xrightarrow{K_E = U_E} 2U_E = U_A \Leftrightarrow 2mgh_E = mgh \Leftrightarrow$$

$$2h_E = h \Leftrightarrow h_E = \frac{h}{2} \Rightarrow h_E = 5 \text{ m}.$$



4.2)

Στο σημείο Ε ισχύει :

$$K_E = U_E \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_E^2 = mgh_E \Leftrightarrow v_E^2 = 2gh_E \Leftrightarrow v_E = \sqrt{2gh_E} \Rightarrow v_E = \sqrt{2 \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5\text{m})} \Rightarrow$$

$$v_E = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3)

Η απόσταση του Α από το Ε είναι : $s = h - h_E \Rightarrow s = 5 \text{ m}$.

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2}gt_{ολ}^2 \\ s = \frac{1}{2}gt_E^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{h}{s} = \frac{t_{ολ}^2}{t_E^2} \Leftrightarrow \frac{t_{ολ}}{t_E} = \sqrt{\frac{h}{s}} \Rightarrow \frac{t_{ολ}}{t_E} = \sqrt{2}.$$

4.4)

Αν συμβολίσουμε y την απόσταση από το έδαφος, η δυναμική ενέργεια της σφαίρας υπολογίζεται από τη σχέση : $U = mgy \Rightarrow \boxed{U = 20y}$. (S.I.) (1)

Σύμφωνα με τη σχέση (1) η δυναμική ενέργεια U είναι ανάλογη με το ύψος y , άρα το διάγραμμα της σχέσης $U = f(y)$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η μηχανική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή.

Ισχύει η σχέση : $E_{\text{μηχ}} = K + U$. (2)

Σε ύψος $y = h$: $K = 0 \Rightarrow E_{\text{μηχ}} = mgh \Rightarrow E_{\text{μηχ}} = 200 \text{ J}$. (3)

Από τη σχέση (2) προκύπτει η συνάρτηση κινητικής ενέργειας – ύψους :

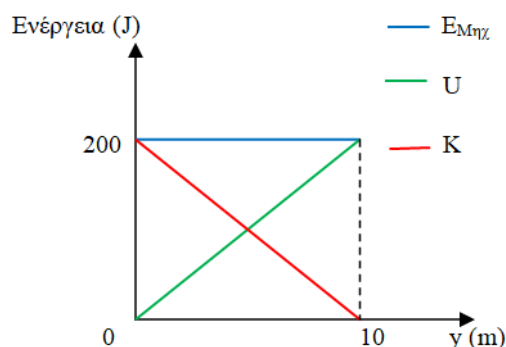
(2) $\Rightarrow K = E_{\text{μηχ}} - U \xrightarrow{(1), (3)} K = 200 - 20y$. (S.I.) (4)

Σύμφωνα με τη σχέση (4), το διάγραμμα κινητικής ενέργειας – ύψους $K = f(y)$ είναι ευθεία με αρνητική κλίση.

Στο έδαφος ($y = 0$) : $U = 0$, $K = E_{\text{μηχ}} = 200 \text{ J}$.

Στο ψηλότερο σημείο ($y = h$) : $K = 0$, $U = E_{\text{μηχ}} = 200 \text{ J}$.

Το διάγραμμα που ικανοποιεί τα προηγούμενα συμπεράσματα φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το οριζόντιο έδαφος.

125. (14529) Ένα άδριο κιβώτιο, μάζας $m = 10 \text{ Kg}$, βρίσκεται ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Ένας εργάτης ασκεί στο κιβώτιο οριζόντια δύναμη $F = 60 \text{ N}$ για χρονικό διάστημα Δt και το μετατοπίζει κατά $\Delta x = 25 \text{ m}$.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου είναι $\mu = 0,4$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα Δt .

Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε τα έργα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο κιβώτιο κατά το χρονικό διάστημα Δt .

Μονάδες 7

4.3 Να υπολογίσετε τη ταχύτητα του κιβωτίου όταν αυτό έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 25 \text{ m}$.

Μονάδες 5

Ένα ίδιο κιβώτιο είναι γεμάτο με άμμο μάζας $m_1 = 40 \text{ Kg}$ και βρίσκεται ακίνητο πάνω στο ίδιο οριζόντιο δάπεδο.

4.4 Να υπολογίσετε το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που πρέπει να ασκήσει ο εργάτης στο γεμάτο κιβώτιο ώστε κατά το ίδιο χρονικό διάστημα Δt να το μετατοπίσει κατά $\Delta x = 25 \text{ m}$.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Στον άξονα y το κιβώτιο ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = mg \Rightarrow N = 100 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 0,4 \cdot 100 \text{ N} \Rightarrow T = 40 \text{ N}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m\alpha \Leftrightarrow F - T = m\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{F - T}{m} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{(60 - 40) \text{ N}}{10 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Για το μέτρο της μετατόπισης σε χρονική διάρκεια Δt , ισχύει :

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 \Leftrightarrow (\Delta t)^2 = \frac{2(\Delta x)}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2(\Delta x)}{\alpha}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{2}} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 5 \text{ s}.$$

4.2)

Εφαρμόζω τη σχέση υπολογισμού του έργου σταθερής δύναμης :

$$W_F = F(\Delta x) = (60 \text{ N})(25 \text{ m}) \Rightarrow W_F = 1500 \text{ J}.$$

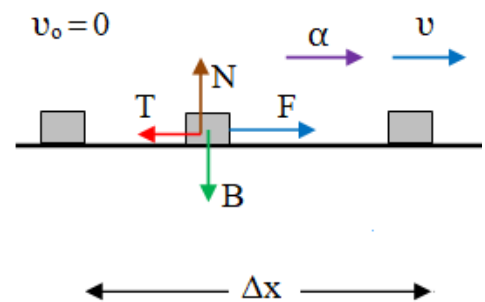
$$W_T = -T(\Delta x) = -(40 \text{ N})(25 \text{ m}) \Rightarrow W_T = -1000 \text{ J}.$$

$$W_B = B(\Delta x) \sin 90^\circ = 0.$$

$$W_N = N(\Delta x) \sin 90^\circ = 0.$$

4.3)

Τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$, το κιβώτιο έχει ταχύτητα μέτρου : $v = \alpha t = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(5 \text{ s}) \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$



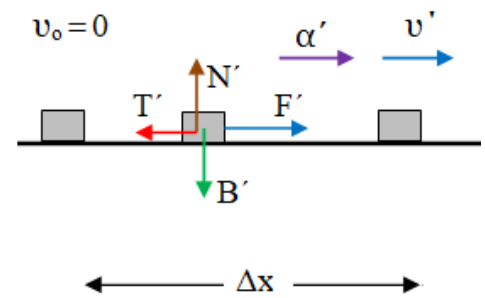
4.4)

Η μάζα του νέου κιβωτίου με την άμμο είναι :

$$m' = m + m_1 = 10 \text{ Kg} + 40 \text{ Kg} \Rightarrow m' = 50 \text{ Kg}.$$

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' = m'g \Rightarrow N' = 500 \text{ N}.$$



Το 2ο κιβώτιο είναι ίδιο με το 1ο και κινείται στο ίδιο οριζόντιο

δάπεδο, άρα δεν αλλάζει ο συντελεστής τριβής ολίσθησης : $\mu' = \mu = 0,4$.

$$\text{Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : } T' = \mu N' \Rightarrow T' = 0,4 \cdot 500 \text{ N} \Rightarrow T' = 200 \text{ N}.$$

Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου α' ($v_0 = 0$).

Ισχύει :

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha' (\Delta t)^2 \Leftrightarrow \alpha' = \frac{2(\Delta x)}{(\Delta t)^2} \Rightarrow \alpha' = \frac{2 \cdot 25 \text{ m}}{25 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha' = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x' = m' \alpha' \Leftrightarrow F' - T' = m' \alpha' \Leftrightarrow F' = T' + m' \alpha' \Rightarrow F' = 200 \text{ N} + 100 \text{ N} \Rightarrow F' = 300 \text{ N}.$$

126. (14530) Μικρή σφαίρα, μάζας $m = 1 \text{ Kg}$, εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος (h) που θα φτάσει η σφαίρα και το χρονικό διάστημα (Δt_{av}) μέχρι να φτάσει στο ύψος αυτό (χρονικό διάστημα ανόδου).

Μονάδες 6

Στη συνέχεια η σφαίρα αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς την επιφάνεια της Γης.

4.2 Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα ($\Delta t_{καθ}$) μέχρις ότου η σφαίρα επιστρέψει στην επιφάνεια της Γης (χρονικό διάστημα καθόδου), καθώς και την ταχύτητα (v_0') με την οποία αυτή επιστρέφει.

Μονάδες 6

4.3 Να συγκρίνετε:

(α) το μέτρο της αρχικής ταχύτητας (v_0) εκτόξευσης της σφαίρας με το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φτάνει στην επιφάνεια της Γης (v_0').

(β) το χρονικό διάστημα ανόδου (Δt_{av}) με αυτό της καθόδου της σφαίρας ($\Delta t_{καθ}$).

(γ) Αν η μάζα της σφαίρας ήταν τετραπλάσια της αρχικής τα συμπεράσματα των δυο προηγούμενων ερωτημάτων θα ήταν τα ίδια ή διαφορετικά και γιατί;

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε το έργο του βάρους της σφαίρας:

(α) κατά την άνοδο της σφαίρας και (β) κατά την κάθοδο της σφαίρας.

Τι συμπεραίνετε;

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Η σφαίρα κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, με επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha = \frac{B}{m} = \frac{mg}{m} \Rightarrow \alpha = g.$$

Στη διάρκεια της ανόδου η επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα, άρα η σφαίρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από την εξίσωση της ταχύτητας προκύπτει :

$$v = v_0 - g(\Delta t) \xrightarrow{v=0} 0 = v_0 - g(\Delta t_\alpha) \Leftrightarrow \Delta t_\alpha = \frac{v_0}{g} \Rightarrow \Delta t_\alpha = 2\text{s}.$$

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζω το μέγιστο ύψος h :

$$\Delta y = v_0(\Delta t) - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \xrightarrow{\Delta y=h} h = \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2\text{s}) - \frac{1}{2}\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4\text{s}^2) \Rightarrow$$

$$h = 20\text{m}.$$

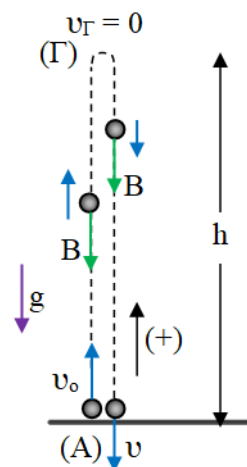
4.2)

Στη διάρκεια της καθόδου η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h . Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2}g(\Delta t_\kappa)^2 \Leftrightarrow (\Delta t_\kappa)^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow \Delta t_\kappa = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \Delta t_\kappa = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}}\text{s} \Rightarrow \Delta t_\kappa = 2\text{s}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος είναι :

$$v = g(\Delta t_\kappa) = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2\text{s}) \Rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3)

- α) Η σφαίρα φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα ίσου μέτρου με την αρχική : $v = v_0$.
β) Η χρονική διάρκεια της ανόδου είναι ίση με τη χρονική διάρκεια της καθόδου : $\Delta t_a = \Delta t_k$.
γ) Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ανεξάρτητο από τη μάζα της σφαίρας ($|a| = g$) .
Άρα τα αποτελέσματα θα είναι ίδια και για τη σφαίρα τετραπλάσιας μάζας.

4.4)

Το μέτρο του βάρους της σφαίρας είναι: $B = mg = (1\text{Kg})\left(10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow B = 10\text{ N}$.

Εφαρμόζω τη σχέση ορισμού του έργου σταθερής δύναμης.

α) άνοδος

$$W_B = B \cdot h \cdot \sin 180^\circ = (10\text{ N})(20\text{ m})(-1) \Rightarrow W_B = -200\text{ J}.$$

β) κάθοδος

$$W_B = B \cdot h \cdot \sin 0^\circ = (10\text{ N})(20\text{ m})(+1) \Rightarrow W_B = +200\text{ J}.$$

Παρατηρώ ότι το έργο του βάρους κατά τη διάρκεια της ανόδου είναι αντίθετο από το έργο κατά τη διάρκεια της καθόδου.

Επομένως, **το έργο του βάρους για την κλειστή διαδρομή $A \rightarrow \Gamma \rightarrow A$ είναι μηδενικό.**

Δηλαδή το βάρος είναι συντηρητική (διατηρητική) δύναμη.

127. (14531) Μικρή σφαίρα μάζας, $m = 2 \text{ Kg}$, αφήνεται από ύψος $h = 20 \text{ m}$ να πέσει προς την επιφάνεια της Γης. Η σφαίρα φτάνει στην επιφάνεια με ταχύτητα $v_{\Gamma\kappa\alpha\theta}$. Μία ίδια σφαίρα αν αφεθεί από το ίδιο ύψος σε έναν πλανήτη Α θα φτάσει στην επιφάνειά του με ταχύτητα $v_{Α\kappa\alpha\theta} = v_{\Gamma\kappa\alpha\theta}/2$. Η αντίσταση του αέρα είναι και στις δύο περιπτώσεις αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη είναι $g_{\Gamma} = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα $\Delta t_{\Gamma\kappa\alpha\theta}$ μέχρις ότου, η σφαίρα να φτάσει στην επιφάνεια της Γης, καθώς και την ταχύτητα $v_{\Gamma\kappa\alpha\theta}$ που έχει εκείνη την στιγμή.

Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας του πλανήτη Α (g_A).

Μονάδες 6

4.3 Αν $\Delta t_{Α\kappa\alpha\theta}$ είναι το χρονικό διάστημα μέχρις ότου, η σφαίρα να φτάσει στην επιφάνεια του πλανήτη Α, να βρεθεί ο λόγος $\frac{\Delta t_{Α\kappa\alpha\theta}}{\Delta t_{\Gamma\kappa\alpha\theta}}$.

Μονάδες 6

4.4 Να γίνουν στο ίδιο διάγραμμα σε βαθμονομημένους άξονες, οι γραφικές παραστάσεις $U = U(y)$, $K = K(y)$ και $E_{MHX} = E_{MHX}(y)$, όπου τα U , K και E_{MHX} αντιστοιχούν στην δυναμική, την κινητική και την μηχανική ενέργεια της σφαίρας στη Γη και το y στην απόσταση του σφαίρας από την επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Στη Γη

Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h με επιτάχυνση μέτρου g_{Γ} .

Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g_{\Gamma} (\Delta t_{\Gamma})^2 \Leftrightarrow (\Delta t_{\Gamma})^2 = \frac{2h}{g_{\Gamma}} \Rightarrow \Delta t_{\Gamma} = \sqrt{\frac{2h}{g_{\Gamma}}} \Rightarrow \Delta t_{\Gamma} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} \text{ s} \Rightarrow$$

$$\Delta t_{\Gamma} = 2 \text{ s}.$$

Η σφαίρα φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου :

$$v_{\Gamma} = g_{\Gamma} (\Delta t_{\Gamma}) = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v_{\Gamma} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2)

Στον πλανήτη Α

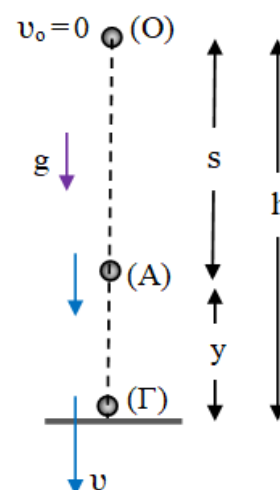
Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h με επιτάχυνση μέτρου g_A .

Η σφαίρα φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου : $v_A = \frac{v_{\Gamma}}{2} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$v_A = g_A (\Delta t_A) \Leftrightarrow \Delta t_A = \frac{v_A}{g_A}. \quad (1)$$

$$h = \frac{1}{2} g_A (\Delta t_A)^2 \xrightarrow{(1)} h = \frac{1}{2} g_A \frac{v_A^2}{g_A^2} \Leftrightarrow h = \frac{v_A^2}{2g_A} \Leftrightarrow g_A = \frac{v_A^2}{2h} \Rightarrow g_A = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



4.3)

$$(1) \Rightarrow \Delta t_A = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \Delta t_A = 4 \text{ s}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει : $\frac{\Delta t_A}{\Delta t_\Gamma} = 2.$

4.4)

Αν συμβολίσουμε y την απόσταση από το έδαφος, η δυναμική ενέργεια της σφαίρας υπολογίζεται από τη σχέση : $U = mgy \Rightarrow \boxed{U = 20y}.$ (S.I.) (2)

Από τη σχέση (2) φαίνεται ότι η δυναμική ενέργεια U είναι ανάλογη με το ύψος y , άρα το διάγραμμα της σχέσης $U = f(y)$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η μηχανική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή.

Ισχύει η σχέση : $E_{\text{μηχ}} = K + U.$ (3)

$$\text{Σε ύψος } y = h : K = 0 \Rightarrow E_{\text{μηχ}} = mgh \Rightarrow E_{\text{μηχ}} = 400 \text{ J}. \quad (4)$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει η συνάρτηση κινητικής ενέργειας – ύψους :

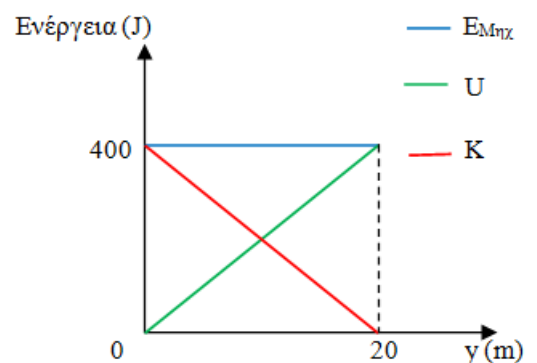
$$(3) \Rightarrow K = E_{\text{μηχ}} - U \xrightarrow{(2), (4)} \boxed{K = 400 - 20y}. \quad (\text{S.I.}) \quad (5)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (5), το διάγραμμα κινητικής ενέργειας – ύψους $K = f(y)$ είναι ευθεία με αρνητική κλίση.

Στο έδαφος ($y = 0$) : $U = 0, K = E_{\text{μηχ}} = 400 \text{ J}.$

Στο ψηλότερο σημείο ($y = h$) : $K = 0, U = E_{\text{μηχ}} = 400 \text{ J}.$

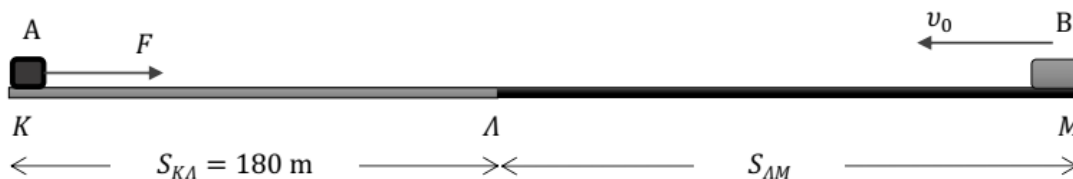
Το διάγραμμα που ικανοποιεί τα προηγούμενα συμπεράσματα φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχόλιο :

Η εκφώνηση χρησιμοποιεί πολύπλοκους συμβολισμούς ($v_{\Gamma\kappa\alpha\theta}$, $\Delta t_{\Gamma\kappa\alpha\theta}$, $v_{A\kappa\alpha\theta}$, $\Delta t_{A\kappa\alpha\theta}$) οι οποίοι δεν είναι απαραίτητοι και είναι πιθανό να δημιουργήσουν σύγχυση στους μαθητές.

128. (14532) Στο αρχικά ακίνητο σώμα A, μάζας $m_A = 2 \text{ Kg}$, ασκείται, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$, οριζόντια δύναμη $F = 20 \text{ N}$. Το σώμα A κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο KL , μήκους $S_{KL} = 180 \text{ m}$. Ένα δεύτερο σώμα B, διπλάσιας μάζας ($m_B = 2m_A$), διέρχεται, τη χρονική στιγμή t_0 , από το σημείο M του μη λείου οριζοντίου επιπέδου LM με ταχύτητα $v_0 = 42 \text{ m/s}$, κινούμενο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος B και του επιπέδου LM είναι $\mu = 0,2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα Δt_A μέχρι το σώμα A να φτάσει στο σημείο L , καθώς και τη ταχύτητα v_A με την οποία φτάνει σε αυτό.

Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε το μήκος S_{LM} , αν γνωρίζετε ότι το σώμα B φτάνει στο σημείο L ταυτόχρονα με το σώμα A.

Μονάδες 6

4.3 Αν γνωρίζετε ότι, κατά τη σύγκρουση των δύο σωμάτων στο σημείο L , ακινητοποιούνται και τα δύο, να υπολογίσετε τη μηχανική ενέργεια των δύο σωμάτων που μετατράπηκε, κατά τη σύγκρουση, σε άλλες μορφές ενέργειας.

Μονάδες 7

4.4 Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{K_B}{K_A}$, όπου K_A η κινητική ενέργεια του σώματος A, όταν αυτό έχει

διανύσει μήκος $S_{KL}/2$ και K_B η κινητική ενέργεια του σώματος B, όταν αυτό έχει διανύσει μήκος $S_{LM}/2$.

Μονάδες 6

Απάντηση

4.1)

Σώμα A

Εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου

$$\alpha_A = \frac{F}{m_A} = \frac{20 \text{ N}}{2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\text{Ισχύει: } s_{KL} = \frac{1}{2} \alpha_A (\Delta t_A)^2 \Leftrightarrow (\Delta t_A)^2 = \frac{2s_{KL}}{\alpha_A} \Rightarrow \Delta t_A = \sqrt{\frac{2s_{KL}}{\alpha_A}} \Rightarrow \Delta t_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 180}{10}} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_A = 6 \text{ s}.$$

$$\text{Τη στιγμή που φτάνει στο } L \text{ έχει ταχύτητα μέτρου: } v_A = \alpha_A (\Delta t_A) = \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(6 \text{ s}) \Rightarrow v_A = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2)

Σώμα B

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_B = m_B g \Rightarrow N_B = 40 \text{ N}$.

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης: $T_B = \mu N_B = 0,2 \cdot 40 \text{ N} \Rightarrow T_B = 8 \text{ N}$.

Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x και υπολογίζω το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_B$ (με θετική φορά προς τα δεξιά) :

$$\Sigma F_{x(B)} = m_B \alpha_B \Leftrightarrow T_B = m_B \alpha_B \Leftrightarrow \alpha_B = \frac{T_B}{m_B} \Rightarrow \alpha_B = \frac{8 \text{ N}}{4 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_B = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Επειδή η επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά από την αρχική ταχύτητα, το σώμα B εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και φτάνει στο Λ μετά από χρονικό διάστημα Δt_A . Ισχύει :

$$s_{\Lambda M} = v_o(\Delta t_A) - \frac{1}{2} \alpha_B (\Delta t_A)^2 = \left(42 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (6 \text{ s}) - \frac{1}{2} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (36 \text{ s}^2) \Rightarrow s_{\Lambda M} = 216 \text{ m}.$$

4.3)

Τη στιγμή που φτάνει το A στο σημείο Λ έχει κινητική ενέργεια

$$K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} (2 \text{ Kg}) \left(3600 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow K_A = 3600 \text{ J}.$$

Τη στιγμή που φτάνει το B στο σημείο Λ έχει ταχύτητα μέτρου

$$v_B = v_o - \alpha_B (\Delta t_A) = 42 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (6 \text{ s}) \Rightarrow v_B = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η κινητική ενέργεια του B τη στιγμή που φτάνει στο σημείο Λ είναι

$$K_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} (4 \text{ Kg}) \left(900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow K_B = 1800 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος τη στιγμή της σύγκρουσης είναι

$$K_{\text{ολ}} = K_A + K_B = 3600 \text{ J} + 1800 \text{ J} \Rightarrow K_{\text{ολ}} = 5400 \text{ J}.$$

Τα σώματα μετά τη σύγκρουση είναι ακίνητα και η βαρυτική δυναμική ενέργεια των σωμάτων δεν μεταβλήθηκε.

Επομένως, η μηχανική ενέργεια που μετατράπηκε σε άλλες μορφές ενέργειας κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης είναι ίση με τη συνολική κινητική ενέργεια των σωμάτων τη στιγμή που φτάνουν στο Λ :

$$|\Delta E_{\text{μηχ}}| = K_{\text{ολ}} = 5400 \text{ J}.$$

4.4)

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση του A από την αρχική θέση μέχρι τη στιγμή που έχει διανύσει

διάστημα $\frac{s_{\text{KL}}}{2}$:

$$\Delta K_A = \Sigma W_A \Leftrightarrow K_A - 0 = W_F \Leftrightarrow K_A = F \cdot \frac{s_{\text{KL}}}{2} \Rightarrow K_A = (20 \text{ N})(90 \text{ m}) \Rightarrow K_A = 1800 \text{ J}.$$

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση του B από την αρχική θέση μέχρι τη στιγμή που έχει διανύσει

διάστημα $\frac{s_{\Lambda M}}{2}$:

$$\Delta K_B = \Sigma W_B \Leftrightarrow K_B - K_{B(\text{αρχ})} = W_T \Leftrightarrow K_B = \frac{1}{2} m_B v_o^2 - T \cdot \frac{s_{\Lambda M}}{2} \Rightarrow$$

$$K_B = \frac{1}{2} (4 \text{ Kg}) \left(1764 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) - (8 \text{ N})(108 \text{ m}) \Rightarrow K_B = 2664 \text{ J}.$$

$$\text{Επομένως : } \frac{K_B}{K_A} = \frac{2664 \text{ J}}{1800 \text{ J}} \Rightarrow \frac{K_B}{K_A} = 1,48.$$

129. (14691) Ένα σώμα μάζας 2 Kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Το διάγραμμα της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0 s - 6 s φαίνεται στο σχήμα.

Η αρχική ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s είναι $v_0 = 0$ m/s.

4.1 Να συμπληρωθούν τα κενά στις επόμενες προτάσεις με έναν από τους όρους:

“ευθύγραμμη ομαλή”, “ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη”, “ευθύγραμμη επιταχυνόμενη”

Στο χρονικό διάστημα από 0 s – 2 s η κίνηση είναι

Στο χρονικό διάστημα από 2 s – 6 s η κίνηση είναι

Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Μονάδες 4

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$) για το χρονικό διάστημα 0 s - 6 s.

Μονάδες 6

4.3 Ποιο είναι το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα κατά το χρονικό διάστημα 0 s - 6 s και ποια η μέση ταχύτητά του το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Μονάδες 8

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα τα χρονικά διαστήματα 0 s - 2 s, και 2 s - 6 s.

Τα αποτελέσματά σας επαληθεύουν το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας;

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Στο χρονικό διάστημα 0 s – 2 s το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, προς τη θετική φορά.

Αφού είναι ακίνητο αρχικά, θα εκτελέσει **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά.

Στο χρονικό διάστημα 2 s – 6 s το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, προς τη θετική

φορά. Αφού η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια φορά, θα εκτελέσει **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά.

4.2)

Στο χρονικό διάστημα 0 s – 2 s, το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση :

$$v = \alpha_1 t \Rightarrow v = 5t. \text{ (S.I.)}$$

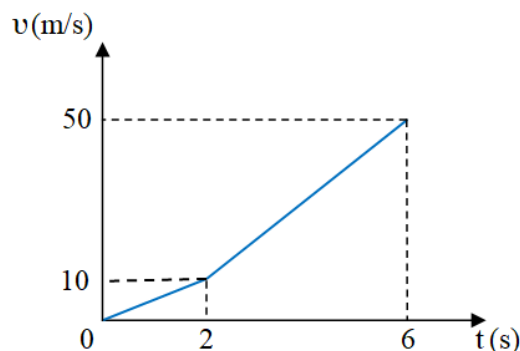
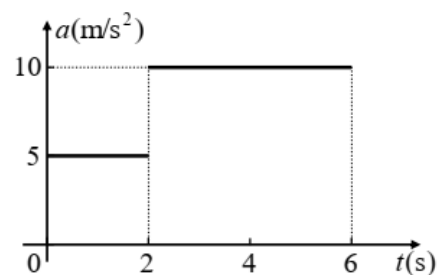
Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Στο χρονικό διάστημα 2 s – 6 s, το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση :

$$v = v_1 + \alpha_2(t - t_1) \Rightarrow v = 10 + 10(t - 2) \text{ ή } v = 10t - 10. \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 6$ s έχει ταχύτητα μέτρου $v_2 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



4.3)

$$\underline{0\text{ s} - 2\text{ s}}: \Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 10 \text{ m}.$$

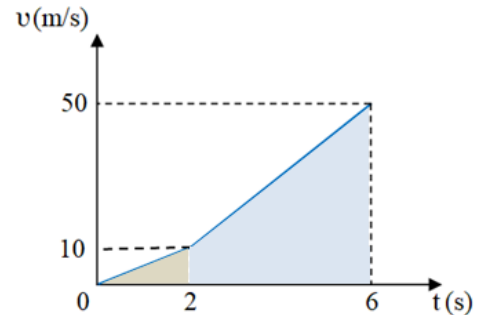
$$\underline{2\text{ s} - 6\text{ s}}: \Delta x_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot (\Delta t_2) = \frac{(10 + 50) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot (4 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_2 = 120 \text{ m}.$$

Εναλλακτικός τρόπος

Η τιμή της μετατόπισης σε κάθε χρονική διάρκεια είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

$$\underline{0\text{ s} - 2\text{ s}}: \Delta x_1 = E_{\text{τριγ}} = \frac{2 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 10 \text{ m}.$$

$$\underline{2\text{ s} - 6\text{ s}}: \Delta x_2 = E_{\text{τραπ}} = \frac{(50 + 10) \cdot 4}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 120 \text{ m}.$$



Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό στη χρονική διάρκεια 0 s – 6 s, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 10 \text{ m} + 120 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 130 \text{ m}.$$

Το μέτρο της μέσης ταχύτητας στη χρονική διάρκεια 0 s – 6 s, είναι :

$$v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{130 \text{ m}}{6 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = \frac{65 \text{ m}}{3 \text{ s}}.$$

4.4)

0 s – 2 s

$$\Sigma F_1 = m \alpha_1 = 10 \text{ N}.$$

$$W_1 = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) = (10 \text{ N})(10 \text{ m}) \Rightarrow W_1 = 100 \text{ J}.$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = \frac{1}{2} (2 \text{ Kg}) \left(100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Delta K_1 = 100 \text{ J}.$$

Δηλαδή ισχύει : $W_1 = \Delta K_1$.

0 s – 6 s

$$\Sigma F_2 = m \alpha_2 = 20 \text{ N}.$$

$$W_2 = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (20 \text{ N})(120 \text{ m}) \Rightarrow W_2 = 2400 \text{ J}.$$

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} (2 \text{ Kg}) (2500 - 100) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \Delta K_2 = 2400 \text{ J}.$$

Δηλαδή ισχύει : $W_2 = \Delta K_2$.

Επομένως τα αποτελέσματα επαληθεύουν το ΘΜΚΕ.

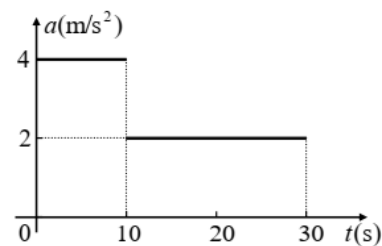
Σχόλια :

Η εκφώνηση

1) δεν αναφέρει ότι **το σώμα κινείται ευθύγραμμα**.

2) δεν διευκρινίζει αν ζητείται η επαλήθευση του ΘΜΚΕ σε κάθε χρονική διάρκεια ή για τη συνολική χρονική διάρκεια.

130. (14693) Ένα σώμα μάζας $m = 1 \text{ Kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ είναι $x_0 = +10 \text{ m}$ και $v_0 = -40 \text{ m/s}$ αντίστοιχα.



4.1 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 20 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.3 Ποια η συνολική μετατόπιση του σώματος το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$ και ποιο το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα το ίδιο χρονικό διάστημα.

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα τα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} - 10 \text{ s}$ και $10 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Τα αποτελέσματά σας επαληθεύουν το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας;

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

$0 \text{ s} - 10 \text{ s}$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση προς την αρνητική φορά ($v_0 < 0$, $a_1 > 0$).

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : $v = v_0 + a_1 t$.

Γτη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$, η ταχύτητα έχει τιμή : $v_1 = -40 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$10 \text{ s} - 30 \text{ s}$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τη θετική φορά ($v_0' = v_1 = 0$, $a_2 > 0$).

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : $v = a_2(t - t_1)$.

Για $t_2 = 20 \text{ s} \Rightarrow v_2 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ s}) \Rightarrow v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.2)

$0 \text{ s} - 10 \text{ s}$

Η τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = -40 + 4t \quad (\text{S.I.})$$

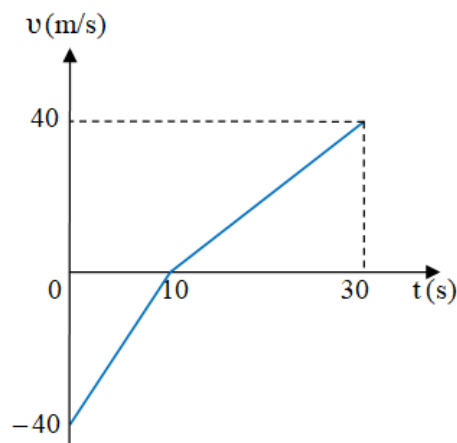
Για $t_1 = 10 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$10 \text{ s} - 30 \text{ s}$

Η τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = 2(t - 10) \quad (\text{S.I.})$$

Για $t_3 = 30 \text{ s} \Rightarrow v_3 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



4.3)

0 s – 10 s

$$\Delta x_1 = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot t_1 = \frac{(-40 + 0)}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (10 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_1 = -200 \text{ m}.$$

10 s – 30 s

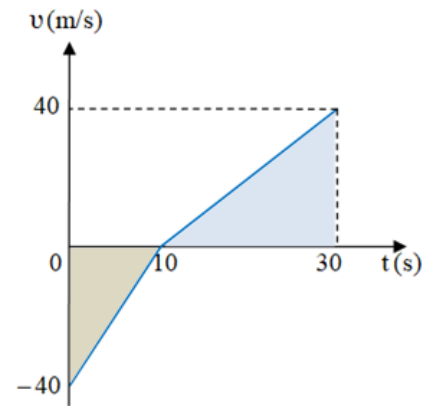
$$\Delta x_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot (\Delta t_2) = \frac{(0 + 40)}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (20 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_2 = 400 \text{ m}.$$

Εναλλακτικός τρόπος

Η τιμή της μετατόπισης σε κάθε χρονική διάρκεια είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

$$\underline{0 \text{ s} - 10 \text{ s}}: \quad \Delta x_1 = E_{\text{τριγ}(1)} = \frac{-40 \cdot 10}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = -200 \text{ m}.$$

$$\underline{10 \text{ s} - 30 \text{ s}}: \quad \Delta x_2 = E_{\text{τριγ}(2)} = \frac{40 \cdot 20}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 400 \text{ m}.$$



Η τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια 0 s – 30 s, είναι :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -200 \text{ m} + 400 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 200 \text{ m}.$$

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό στη χρονική διάρκεια 0 s – 30 s, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 200 \text{ m} + 400 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 600 \text{ m}.$$

4.4)

0 s – 10 s

$$\Sigma F_1 = m a_1 = 4 \text{ N}.$$

$$W_1 = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) = (4 \text{ N})(-200 \text{ m}) \Rightarrow W_1 = -800 \text{ J}.$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} (1 \text{ Kg})(0 - 1600) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \Delta K_1 = -800 \text{ J}.$$

$$\text{Δηλαδή ισχύει: } W_1 = \Delta K_1.$$

10 s – 30 s

$$\Sigma F_2 = m a_2 = 2 \text{ N}.$$

$$W_2 = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (2 \text{ N})(400 \text{ m}) \Rightarrow W_2 = 800 \text{ J}.$$

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2} m (v_3^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} (1 \text{ Kg})(1600 - 0) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \Delta K_2 = 800 \text{ J}.$$

$$\text{Δηλαδή ισχύει: } W_2 = \Delta K_2.$$

Επομένως τα αποτελέσματα επαληθεύουν το ΘΜΚΕ.

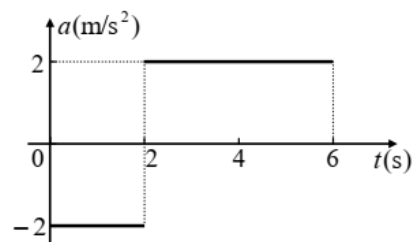
Σχόλια :

Η εκφώνηση

1) δεν αναφέρει ότι **το σώμα κινείται ευθύγραμμα**.

2) δεν διευκρινίζει αν ζητείται η επαλήθευση του ΘΜΚΕ σε κάθε χρονική διάρκεια ή για τη συνολική χρονική διάρκεια.

131. (14694) Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 6 \text{ s}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ είναι $x_0 = +10 \text{ m}$ και $v_0 = +4 \text{ m/s}$ αντίστοιχα.



4.1 Να συμπληρωθούν τα κενά στις επόμενες προτάσεις με έναν από τους όρους:

“ευθύγραμμη ομαλή”, “ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη”, “ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη”

Στο χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} - 2 \text{ s}$ η κίνηση είναι

Στο χρονικό διάστημα από $2 \text{ s} - 6 \text{ s}$ η κίνηση είναι

Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Μονάδες 6

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 6 \text{ s}$.

Μονάδες 4

4.3 Να υπολογίσετε:

(α) τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ και

(β) τη μέση ταχύτητά του το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 6 \text{ s}$.

Μονάδες 8

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα τα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} - 2 \text{ s}$ και $2 \text{ s} - 6 \text{ s}$.

Τα αποτελέσματά σας επαληθεύουν το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας;

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

$0 \text{ s} - 2 \text{ s}$

Το σώμα εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά ($v_0 > 0$, $a_1 < 0$).

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : $v = v_0 + a_1 t$.

$$\text{Για } t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$2 \text{ s} - 6 \text{ s}$

Το σώμα εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά ($v_0' = 0$, $a_2 > 0$).

4.2)

$0 \text{ s} - 2 \text{ s}$

Η τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = 4 - 2t. \quad (\text{S.I.})$$

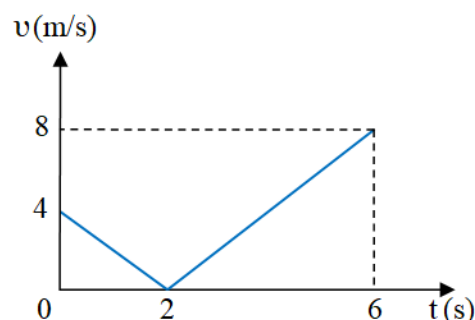
$$\text{Για } t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$2 \text{ s} - 6 \text{ s}$

Η τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = a_2(t - t_1) \Rightarrow v = 2(t - 2). \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{Για } t_2 = 6 \text{ s} \Rightarrow v_2 = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s}) \Rightarrow v_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

4.3)

α) 0 s – 2 s :

$$\Delta x_1 = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot t_1 = \frac{(4+0) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} (2 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_1 = 4 \text{ m}.$$

2 s – 6 s

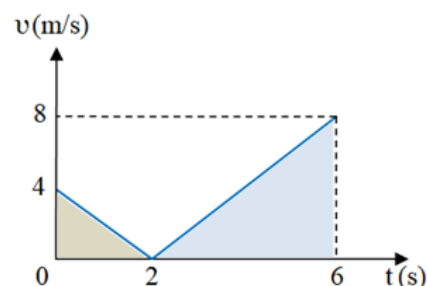
$$\Delta x_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot (\Delta t_2) = \frac{(0+8) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} (4 \text{ s}) \Rightarrow \Delta x_2 = 16 \text{ m}.$$

Εναλλακτικός τρόπος

Η τιμή της μετατόπισης σε κάθε χρονική διάρκεια είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

$$\underline{0 \text{ s} - 2 \text{ s}} : \Delta x_1 = E_{\text{τριγ}(1)} = \frac{4 \cdot 2}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 4 \text{ m}.$$

$$\underline{2 \text{ s} - 6 \text{ s}} : \Delta x_2 = E_{\text{τριγ}(2)} = \frac{4 \cdot 8}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 16 \text{ m}.$$



Η τιμή της μετατόπισης στη χρονική διάρκεια 0 s – 6 s, είναι :

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 4 \text{ m} + 16 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_{\text{ολ}} = 20 \text{ m}.$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$ βρίσκεται στη θέση : $x = x_0 + \Delta x_{\text{ολ}} = 10 \text{ m} + 20 \text{ m} \Rightarrow x = 30 \text{ m}.$

β)

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε στη χρονική διάρκεια 0 s – 6 s, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 4 \text{ m} + 16 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 20 \text{ m}.$$

Το μέτρο της μέσης ταχύτητας στη χρονική διάρκεια 0 s – 6 s, είναι :

$$v_{\mu} = \frac{s_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{20 \text{ m}}{6 \text{ s}} \Rightarrow v_{\mu} = \frac{10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4)

0 s – 2 s

$$\Sigma F_1 = m a_1 = -4 \text{ N}.$$

$$W_1 = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) = (-4 \text{ N})(4 \text{ m}) \Rightarrow W_1 = -16 \text{ J}.$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} (2 \text{ Kg})(0 - 16) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \Delta K_1 = -16 \text{ J}.$$

Δηλαδή ισχύει : $W_1 = \Delta K_1$.

2 s – 6 s

$$\Sigma F_2 = m a_2 = 4 \text{ N}.$$

$$W_2 = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (4 \text{ N})(16 \text{ m}) \Rightarrow W_2 = 64 \text{ J}.$$

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} (2 \text{ Kg})(64 - 0) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \Delta K_2 = 64 \text{ J}.$$

Δηλαδή ισχύει : $W_2 = \Delta K_2$.

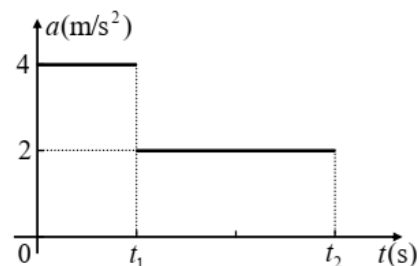
Επομένως τα αποτελέσματα επαληθεύουν το ΘΜΚΕ.

Σχόλια :

Η εκφώνηση

- 1) δεν αναφέρει ότι **το σώμα κινείται ευθύγραμμα**.
- 2) δεν διευκρινίζει αν ζητείται η επαλήθευση του ΘΜΚΕ σε κάθε χρονική διάρκεια ή για τη συνολική χρονική διάρκεια.

132. (14695) Ένα σώμα μάζας $m = 0,5 \text{ Kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_2$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η αρχική ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ είναι $v_0 = 0 \text{ m/s}$.



4.1 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις με έναν από τους όρους:

“ευθύγραμμη ομαλή”, “ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη”,

“ευθύγραμμη επιταχυνόμενη”

Στο χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} - t_1$ η κίνηση είναι

Στο χρονικό διάστημα από $t_1 - t_2$ η κίνηση είναι

Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Μονάδες 4

4.2 Να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αν γνωρίζετε ότι η ταχύτητα του σώματος τις χρονικές αυτές στιγμές είναι $v_1 = +40 \text{ m/s}$ και $v_2 = +80 \text{ m/s}$ αντίστοιχα.

Μονάδες 7

4.3 Ποιο το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_2$.

Μονάδες 7

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα τα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} - t_1$ και $t_1 - t_2$.

Τα αποτελέσματά σας επαληθεύουν το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας;

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_1$ το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, προς τη θετική φορά.

Αφού είναι ακίνητο αρχικά, θα εκτελέσει **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά.

Στο χρονικό διάστημα $t_1 - t_2$ το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, προς τη θετική φορά.

Αφού η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια φορά, θα εκτελέσει **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη** κίνηση προς τη θετική φορά.

4.2)

Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_1$, το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $v = \alpha_1 t$.

Τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ισχύει :

$$v_1 = \alpha_1 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_1}{\alpha_1} \Rightarrow t_1 = \frac{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow t_1 = 10 \text{ s}.$$

Στο χρονικό διάστημα $t_1 - t_2$, το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $v = v_1 + \alpha_2 (t - t_1)$.

Τη χρονική στιγμή t_2 έχει ταχύτητα μέτρου $v_2 = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ισχύει :

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t_2} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{v_2 - v_1}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{(80 - 40) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \Delta t_2 = 20 \text{ s}.$$

Επομένως : $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 10 \text{ s} + 20 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 30 \text{ s}.$

4.3)

0 s – 10 s

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (100 \text{ s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 200 \text{ m}.$$

10 s – 30 s

$$\Delta x_2 = v_1 (\Delta t_2) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t_2)^2 = \left(40 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 1200 \text{ m}.$$

Το συνολικό διάστημα που διάνυσε στη χρονική διάρκεια 0 s – 30 s, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 200 \text{ m} + 1200 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 1400 \text{ m}.$$

4.4)

0 s – 10 s

$$\Sigma F_1 = m \alpha_1 = 2 \text{ N}.$$

$$W_1 = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) = (2 \text{ N})(200 \text{ m}) \Rightarrow W_1 = 400 \text{ J}.$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = \frac{1}{2} (0,5 \text{ Kg}) \left(1600 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow \Delta K_1 = 400 \text{ J}.$$

$$\text{Δηλαδή ισχύει : } W_1 = \Delta K_1.$$

0 s – 6 s

$$\Sigma F_2 = m \alpha_2 = 1 \text{ N}.$$

$$W_2 = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (1 \text{ N})(1200 \text{ m}) \Rightarrow W_2 = 1200 \text{ J}.$$

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} (0,5 \text{ Kg}) (6400 - 1600) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \Delta K_2 = 1200 \text{ J}.$$

$$\text{Δηλαδή ισχύει : } W_2 = \Delta K_2.$$

Επομένως τα αποτελέσματα επαληθεύουν το ΘΜΚΕ.

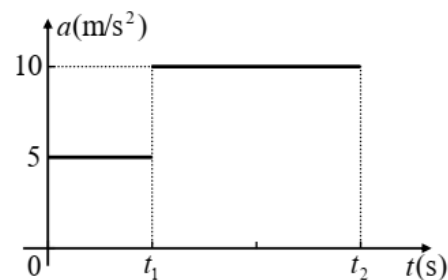
Σχόλια :

Η εκφώνηση

1) δεν αναφέρει ότι **το σώμα κινείται ευθύγραμμα.**

2) δεν διευκρινίζει αν ζητείται η επαλήθευση του ΘΜΚΕ σε κάθε χρονική διάρκεια ή για τη συνολική χρονική διάρκεια.

133. (14696) Ένα σώμα μάζας $m = 4 \text{ Kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_2$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η αρχική ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ είναι $v_0 = 0 \text{ m/s}$.



4.1 Να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , αν γνωρίζετε ότι οι ταχύτητες του σώματος τις χρονικές αυτές στιγμές είναι $v_1 = +10 \text{ m/s}$ και $v_2 = +50 \text{ m/s}$ αντίστοιχα.

Μονάδες 7

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_2$.

Μονάδες 5

4.3 Ποιο το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_2$.

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα τα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} - t_1$ και $t_1 - t_2$.

Τα αποτελέσματά σας επαληθεύουν το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας;

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1)

Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_1$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τη θετική φορά. Τη χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ισχύει :

$$v_1 = \alpha_1 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_1}{\alpha_1} \Rightarrow t_1 = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}.$$

Στο χρονικό διάστημα $t_1 - t_2$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τη θετική φορά. Τη χρονική στιγμή t_2 έχει ταχύτητα μέτρου $v_2 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ισχύει :

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t_2} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{v_2 - v_1}{\alpha_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{(50 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \Delta t_2 = 4 \text{ s}.$$

Επομένως : $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 2 \text{ s} + 4 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 6 \text{ s}.$

4.2)

$0 \text{ s} - 2 \text{ s}$

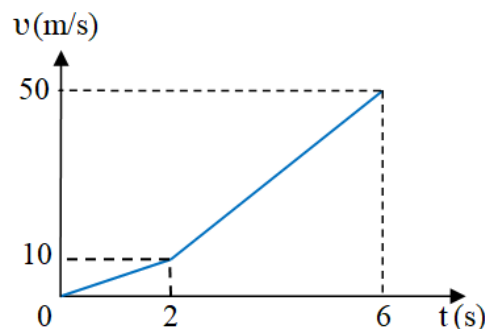
Η τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :
 $v = 5t.$ (S.I.)

Για $t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

$2 \text{ s} - 6 \text{ s}$

Η τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :
 $v = v_1 + \alpha_2(t - t_1) \Rightarrow v = 10 + 10(t - 2).$ (S.I.)

Για $t_2 = 6 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$



4.3)

0 s – 2 s

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{s}^2) \Rightarrow \Delta x_1 = 10 \text{ m}.$$

2 s – 6 s

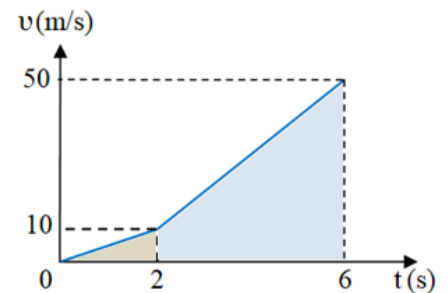
$$\Delta x_2 = v_1 (\Delta t_2) + \frac{1}{2} \alpha_2 (\Delta t_2)^2 = \left(10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 \right) \text{m} \Rightarrow \Delta x_2 = 120 \text{ m}.$$

Εναλλακτικός τρόπος

Η τιμή της μετατόπισης σε κάθε χρονική διάρκεια είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του αντίστοιχου σχήματος στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.

$$\underline{0 \text{ s} - 2 \text{ s}}: \quad \Delta x_1 = E_{\text{τρίγ}} = \frac{10 \cdot 2}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 = 10 \text{ m}.$$

$$\underline{2 \text{ s} - 6 \text{ s}}: \quad \Delta x_2 = E_{\text{τραπ}} = \frac{(50+10) \cdot 4}{2} \text{ m} \Rightarrow \Delta x_2 = 120 \text{ m}.$$



Το συνολικό διάστημα που διάνυσε στη χρονική διάρκεια 0 s – 6 s, είναι :

$$s_{\text{ολ}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 10 \text{ m} + 120 \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 130 \text{ m}.$$

4.4)

0 s – 2 s

$$\Sigma F_1 = m \alpha_1 = 20 \text{ N}.$$

$$W_1 = (\Sigma F_1)(\Delta x_1) = (20 \text{ N})(10 \text{ m}) \Rightarrow W_1 = 200 \text{ J}.$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = \frac{1}{2} (4 \text{ Kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow \Delta K_1 = 200 \text{ J}.$$

Δηλαδή ισχύει : $W_1 = \Delta K_1$.

0 s – 6 s

$$\Sigma F_2 = m \alpha_2 = 40 \text{ N}.$$

$$W_2 = (\Sigma F_2)(\Delta x_2) = (40 \text{ N})(120 \text{ m}) \Rightarrow W_2 = 4800 \text{ J}.$$

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} (4 \text{ Kg}) (2500 - 100) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \Delta K_2 = 4800 \text{ J}.$$

Δηλαδή ισχύει : $W_2 = \Delta K_2$.

Επομένως τα αποτελέσματα επαληθεύουν το ΘΜΚΕ.

Σχόλια :

Η εκφώνηση

1) δεν αναφέρει ότι **το σώμα κινείται ευθύγραμμα**.

2) δεν διευκρινίζει αν ζητείται η επαλήθευση του ΘΜΚΕ σε κάθε χρονική διάρκεια ή για τη συνολική χρονική διάρκεια.