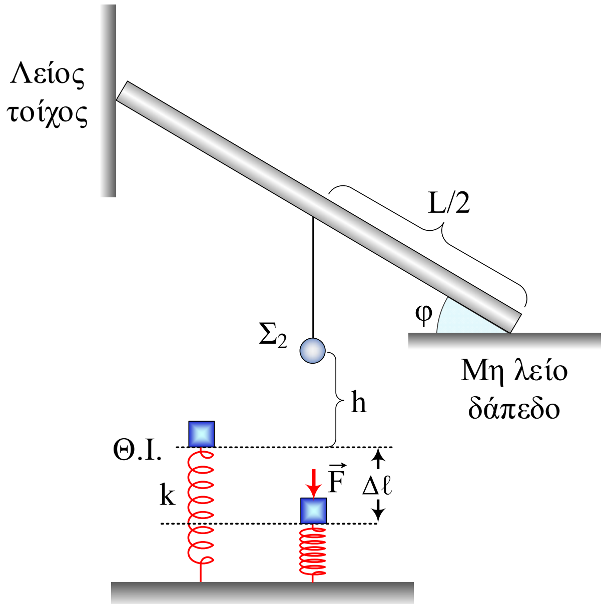
Ισορροπία στερεού – κρούση – ταλάντωση.



Όλα τα σώματα του σχήματος βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Η ομογενής δοκός ισορροπεί οριακά στηριζόμενη σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο και στον λείο κατακόρυφο τοίχο. Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ οριζοντίου επιπέδου και δοκού είναι $\mu_{ορ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Το σώμα $Σ_2$ είναι δεμένο στη μία άκρη κατακόρυφου αβαρούς νήματος η άλλη άκρη του οποίου είναι δεμένη στο μέσον της δοκού και ισορροπεί. Το κατακόρυφο ελατήριο με σταθερά k = 100 N/m έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο. Στο επάνω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 = 1 kg που ισορροπεί με την επίδραση κατακόρυφη σταθερής δύναμης $\vec{F}$ με το ελατήριο να έχει πρόσθετη συσπείρωση από τη θέση ισορροπίας $\Delta\ell$ = 0,2 m. Ο άξονας του ελατηρίου είναι στην ίδια ευθεία με το τεντωμένο νήμα. Δίνεται g = 10 m/s^2.

α. Να βρεθεί η γωνία φ που σχηματίζει η δοκός με το οριζόντιο δάπεδο

β. Την t_0 = 0 κόβεται το νήμα και ταυτόχρονα καταργούμε τη δύναμη $\vec{F}$ να βρεθεί το ύψος h ώστε τα σώματα να συγκρουστούν στη θέση ισορροπίας του $Σ_1$, όταν αυτό φτάσει εκεί για πρώτη φορά.

γ. Αν η μάζα του $Σ_2$ είναι $m_2 = \frac{4}{\pi}$ kg και η κρούση ελαστική:

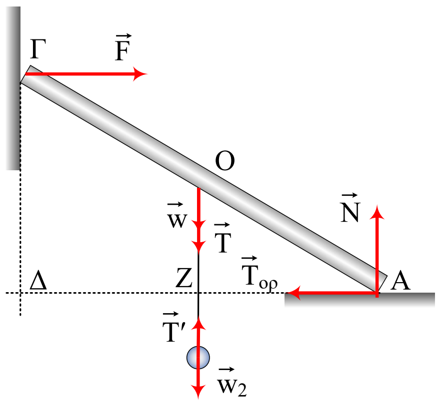
i. Να βρεθούν οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση και

ii. να δείξετε ότι τα σώματα θα συγκρούονται στη θέση ισορροπίας του $Σ_1$

iii. Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος $Σ_1$ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο.

• οι διαστάσεις των σωμάτων αμελούνται και η διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα.

Λύση



α. Για την ράβδο ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow T + w = N \ \ (1)$$

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F = T_{ορ} = \mu N \overset{(1)}{\Rightarrow} F = \mu_{ορ}(T + w) \ \ (2)$$

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F(\Gamma\Delta) = (w + T)(AZ) \Rightarrow F\ell ημφ = (T + w)\frac{\ell}{2}συνφ \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

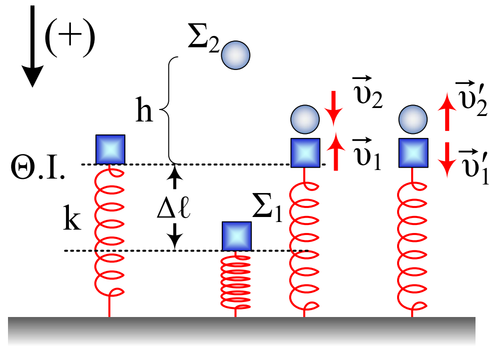
$$\mu_{ορ}(T + w)ημφ = (T + w)\frac{1}{2}συνφ \Rightarrow εφφ = \frac{1}{2\mu_{ορ}} \Rightarrow εφφ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boldsymbol{φ = 30^o}.$$

β. Για το Σ_1 πριν την κρούση:

$k = m_1\omega^2 \Rightarrow$ **$\omega = 10$ rad/s.**

$T = 2\pi/\omega \Rightarrow$ **$T = \pi/5$ s.**

Η κρούση γίνεται όταν το Σ_1 φτάνει στη ΘΙ για πρώτη φορά. Συνεπώς $\Delta t_1 = T/4 = \pi/20$ s.



Η ταχύτητα που έχει το Σ_1 εκείνη τη στιγμή είναι:

$\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega\Delta\ell \Rightarrow$ **$\upsilon_1 = 2$ m/s.**

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα θα έχει ταχύτητα πριν την κρούση μέτρου $\upsilon_2 = g\Delta t_1 \Rightarrow$ **$\upsilon_2 = 0{,}5\pi$ m/s.**

Θα έχει δε διανύσει διάστημα: $h = \frac{1}{2}g\Delta t_1^2 \Rightarrow \mathbf{h = \frac{\pi^2}{80}\,m}$

γ. i. Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα κάτω, οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων είναι: $\upsilon_2 = 0{,}5\pi$ m/s και $\upsilon_1 = -2$ m/s. Για την ελαστική κρούση ισχύουν οι τύποι:

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{1-\frac{4}{\pi}}{1+\frac{4}{\pi}}(-2) + \frac{2\frac{4}{\pi}}{1+\frac{4}{\pi}}\frac{\pi}{2} = \frac{8-2\pi}{\pi+4} + \frac{4\pi}{\pi+4} \Rightarrow \mathbf{\upsilon'_1 = 2\ m/s}.$$

$$\upsilon_1 + \upsilon'_1 = \upsilon_2 + \upsilon'_2 \Rightarrow \upsilon'_2 = \upsilon_1 + \upsilon'_1 - \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon'_2 = (-2+2-\frac{\pi}{2})\frac{m}{s} \Rightarrow \mathbf{\upsilon'_2 = -\frac{\pi}{2}\frac{m}{s}}$$

Άρα μέτρο $\pi/2$ m/s και φορά προς τα πάνω όπως στο σχήμα.

ii. Μετά την κρούση.

Το σώμα Σ_1 επιστρέφει στο σημείο κρούσης μετά από χρόνο $\Delta t_2 = T/2 = 0{,}1\pi$ s, με ταχύτητα μέτρου $V_1 = 2$ m/s.

Το σώμα Σ_2 εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω, άρα σε χρόνο Δt_2:

$$\Delta\vec{x} = \vec{\upsilon}_2\Delta t_2 + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t_2^2 \Rightarrow \Delta x = -\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}1\pi + \frac{1}{2}10(0{,}1\pi)^2 \Rightarrow \mathbf{\Delta x = 0}.\ \text{(Επιστροφή στο σημείο κρούσης)}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{\upsilon}_1 + \vec{g}\Delta t_2 \Rightarrow \mathbf{V_2 = \frac{\pi}{2}\frac{m}{s}}$$

Άρα το φαινόμενο επαναλαμβάνεται.

iii. Το Σ_1 εκτελεί ημιταλαντώσεις, άρα το διάγραμμα είναι το ακόλουθο.