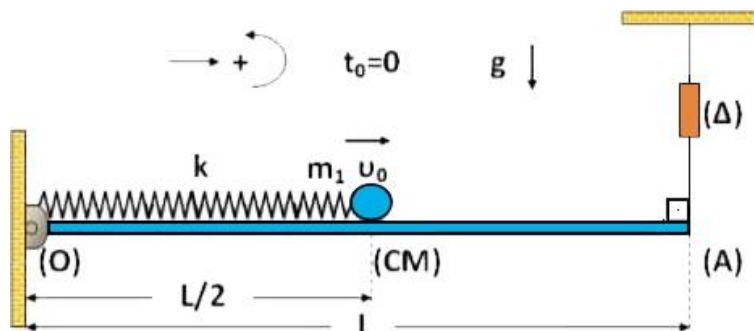


ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Λεπτή οριζόντια ομογενής ράβδος (ΟΑ) με μάζα M και μήκος $L = 0,8 \text{ m}$ είναι αρθρωμένη στο άκρο της (Ο), ενώ στο άλλο της άκρο (Α) είναι δεμένη σε κατακόρυφο αβαρές και μη εκτατό νήμα, το άλλο του οποίου έχει στερεωθεί σε οροφή. Ένα δυναμόμετρο (Δ), παρεμβάλλεται στο νήμα ώστε να μας παρέχει το μέτρο της τάσης του νήματος. Η λεία ράβδος δεν δέχεται τριβές από την άρθρωση και έχει ροπή αδράνειας ως προς τον οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται



από το (Ο), $I_O = ML^2/3$. Πάνω στη ράβδο υπάρχει αρμονικός ταλαντωτής με ιδανικό οριζόντιο ελατήριο σταθερός $k = 50 \text{ N/m}$ και φυσικού μήκους $L/2$ που στο δεξιό του άκρο έχει δεμένη μικρή ελαστική σφαίρα μάζας $m_1 = 0,5 \text{ kg}$ που ισορροπεί πάνω από το κέντρο μάζας της ράβδου. Το αριστερό άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σταθερά στον κατακόρυφο τοίχο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η σφαίρα μάζας m_1 , εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα v_0 προς τα δεξιά, φορά που θεωρούμε θετική. Η σφαίρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και χρονική εξίσωση απομάκρυνσης $x = A\sin(\omega t + \phi_0)$ με $A < L/2$, ενώ η ράβδος παραμένει οριζόντια και ακίνητη. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$. Να βρεθούν:

Δ1. Η αρχική φάση ϕ_0 και το πλήθος N των ταλαντώσεων που το σώμα εκτελεί σε χρόνο $\Delta t = \pi \text{ s}$.

Δ2. Η ροπή αδράνειας I_O και η ταχύτητα v_0 αν για την ένδειξη T του δυναμόμετρου (Δ) καθώς η σφαίρα εκτελεί ταλαντώσεις ισχύει $2,75 \text{ N} < T < 5,25 \text{ N}$.

Δ3. Το μέγιστο πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης της σφαίρας αν ξέρουμε ότι το νήμα κόβεται όταν το μέτρο της τάσης του νήματος υπερβεί τα $6,25 \text{ N}$.

Δ4. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση όταν η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης.

Κάποια στιγμή που η σφαίρα κινείται στον αρνητικό ημιάξονα αφήνουμε στη θέση ισορροπίας της δεύτερη μικρή ελαστική σφαίρα μάζας m_2 . Φτάνοντας η σφαίρα μάζας m_1 στη θέση ισορροπίας συγκρούεται ακαριαία, κεντρικά και ελαστικά με την ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 , με αποτέλεσμα η ενέργεια της ταλάντωσης της σφαίρας μάζας m_1 να μειωθεί κατά 75% .

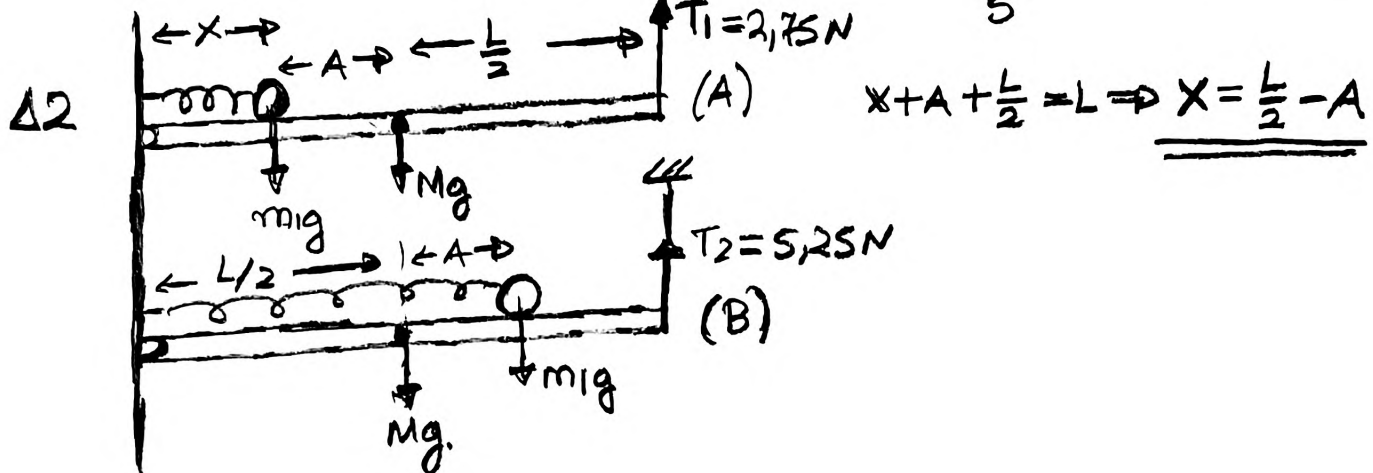
Δ5. Να βρεθεί η μάζα m_2 .

Δ1) Την χρονική στιγμή $t_0=0$ το σώμα βρίσκεται στη θ.γ. και κινείται προς τα δεξιά, οπότε $\boxed{\varphi_0=0 \text{ rad}}$

$$D=m_1 \omega^2 \Rightarrow K=m_1 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m_1}} = \sqrt{\frac{50}{0,5}} = \sqrt{100} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

$$f = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \boxed{N=5 \text{ ταλαντώσεις}}$$



$$x + A + \frac{L}{2} = L \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{L}{2} - A}}$$

Περίπτωση (A): $\sum \tau(0) = 0 \Rightarrow T_1 \cdot L - Mg \frac{L}{2} - m_1 g \left(\frac{L}{2} - A \right) = 0$
 $\Rightarrow T_1 \cdot L - Mg \frac{L}{2} - m_1 g \frac{L}{2} + m_1 g A = 0 \quad (1)$

Περίπτωση (B): $\sum \tau(0) = 0 \Rightarrow T_2 \cdot L - Mg \frac{L}{2} - m_1 g \left(\frac{L}{2} + A \right) = 0$
 $\Rightarrow T_2 \cdot L - Mg \frac{L}{2} - m_1 g \frac{L}{2} - m_1 g A = 0 \quad (2)$

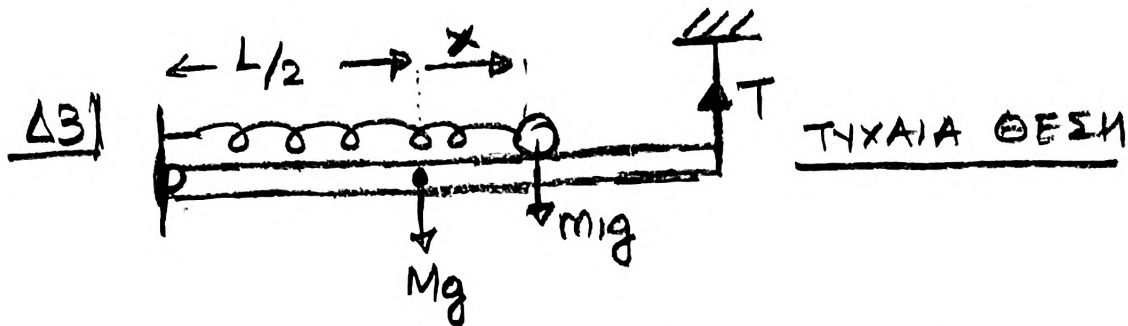
$(2) - (1) \Rightarrow (T_2 - T_1) \cdot L - 2 m_1 g A = 0 \Rightarrow A = \frac{(T_2 - T_1) \cdot L}{2 m_1 \cdot g}$
 $\Rightarrow A = \frac{(5,25 - 2,75) \cdot 0,8}{2 \cdot 0,5 \cdot 10} = \frac{2,5 \cdot 0,8}{10} = \frac{2}{10} \Rightarrow \underline{\underline{A = 0,2 \text{ m}}}$

$v_0 = v_{\max} = \omega \cdot A = 10 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{v_0 = 2 \text{ m/s}}$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 2,75 \cdot 0,8 - M \cdot 10 \cdot \frac{0,8}{2} - 0,5 \cdot 10 \cdot \frac{0,8}{2} + 0,5 \cdot 10 \cdot 0,2 = 0$$

$$\Rightarrow 2,2 - 4M - 2 + 1 = 0 \Rightarrow 4M = 1,2 \Rightarrow M = 0,3 \text{ kg}$$

$$I_0 = \frac{1}{3} M \cdot L^2 = \frac{1}{3} \cdot 0,3 \cdot 0,8^2 = 0,1 \cdot 0,64 \Rightarrow \boxed{I_0 = 0,064 \text{ kgm}^2}$$



$$\Sigma \tau_{\text{net}} \text{ τυχαία θέση: } \Sigma \tau(0) = 0 \Rightarrow T \cdot L - m g \left(\frac{L}{2} + x \right) - M g \frac{L}{2} = 0$$

$$\Rightarrow T \cdot 0,8 - 0,5 \cdot 10 \left(\frac{0,8}{2} + x \right) - 0,3 \cdot 10 \cdot \frac{0,8}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,8T - 2 - 5x - 1,2 = 0 \Rightarrow 0,8T = 5x + 3,2$$

$$\Rightarrow T = 6,25 \cdot x + 4$$

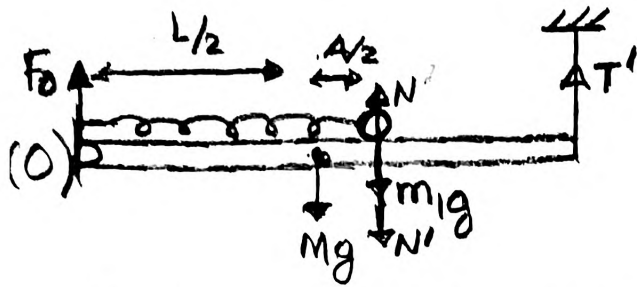
$$\text{Πρόσθ: } T \leq T_{\text{op}} \Rightarrow 6,25x + 4 \leq 6,25$$

$$\Rightarrow 6,25x \leq 6,25 - 4 \Rightarrow x \leq \frac{2,25}{6,25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq 0,36 \Rightarrow \boxed{A_{\text{max}} = 0,36 \text{ m}}$$

Δ4) A. Δ. E. T. : $K + U = E \xrightarrow{K=3U} 4U = E \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{A}{2} = \pm 0,2 \text{ m}$$



ΣQαipα: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = m_1 g = 0,5 \cdot 10 \Rightarrow N = 5 \text{ N}$.

$N' = N = 5 \text{ N}$ (Δpōm - Avtīδpōm).

$\Sigma \tau(0) = 0 \Rightarrow T' \cdot L - m_1 g \left(\frac{L}{2} + \frac{A}{2} \right) - Mg \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$

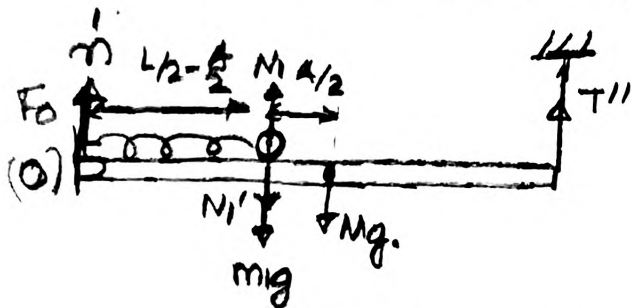
$$\Rightarrow T' \cdot 0,8 - 0,5 \cdot 10 \left(\frac{0,8}{2} + \frac{0,2}{2} \right) - 0,3 \cdot 10 \frac{0,8}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 0,8 T' - 2 - 0,5 - 1,2 = 0 \Rightarrow 0,8 T' = 3,7 \Rightarrow T' = \frac{3,7}{0,8}$$

$$\Rightarrow \underline{T' = 4,625 \text{ N}}$$

Πάβδoς: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_0 + T' - Mg - N' = 0 \Rightarrow F_0 = Mg + N' - T'$

$$\Rightarrow F_0 = 0,3 \cdot 10 + 5 - 4,625 = 8 - 4,625 \Rightarrow \boxed{F_0 = 3,375 \text{ N}}$$



ΣQαipα: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g = 5 \text{ N}$

$N_1' = N_1 = 5 \text{ N}$ (Δpōm - Avtīδpōm).

$\Sigma \tau(0) = 0 \Rightarrow T'' \cdot L - Mg \frac{L}{2} - m_1 g \left(\frac{L}{2} - \frac{A}{2} \right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0,8 T'' - 0,3 \cdot 10 \cdot \frac{0,8}{2} - 0,5 \cdot 10 \left(\frac{0,8}{2} - \frac{0,2}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,8 T'' - 1,2 - 1,5 = 0 \Rightarrow T'' = \frac{2,7}{0,8} \Rightarrow \underline{T'' = 3,375 \text{ N}}$$

Πάβδoς: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_0 + T'' - Mg - N_1' = 0 \Rightarrow F_0 + 3,375 - 0,3 \cdot 10 - 5 = 0$

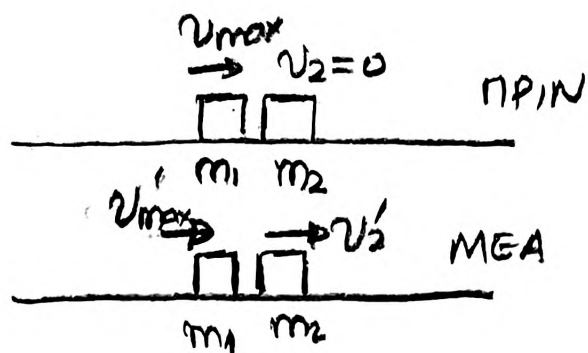
$$\Rightarrow F_0 = 8 - 3,375 \Rightarrow \boxed{F_0 = 4,625 \text{ N}}$$

$$\underline{\Delta 5} \quad E' = \frac{25}{100} \cdot E \Rightarrow E' = \frac{1}{4} E \Rightarrow \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} k A^2$$

$$\Rightarrow A'^2 = \frac{A^2}{4} \Rightarrow A' = \frac{A}{2} = \frac{0,2}{2} \Rightarrow \underline{A' = 0,1 \text{ m}}$$

$$v_{\max}' = \omega \cdot A' = 10 \cdot 0,1 \Rightarrow v_{\max}' = 1 \text{ m/sec}$$

$$v_{\max} = \omega A = 10 \cdot 0,2 \Rightarrow v_{\max} = 2 \text{ m/sec.}$$



Κεντρική ελαστική κρούση με $v_2 = 0$ (ακίνητο m_2)

και $v_1 = v_{\max}$ και $v_1' = v_{\max}'$

$$|v_1'| = \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right| |v_1| \Rightarrow |v_{\max}'| = \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right| \cdot |v_{\max}|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right| \cdot 2 = 1 \Rightarrow \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2m_1 - 2m_2 = m_1 + m_2 \Rightarrow m_1 = 3m_2 \Rightarrow$$

$\hat{m}$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{m_1}{3} = \frac{0,5}{3} \Rightarrow \boxed{m_2 = \frac{1}{6} \text{ kg}}$$

$$\bullet \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2m_1 - 2m_2 = -m_1 - m_2 \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_2 = 1,5 \text{ kg}}$$