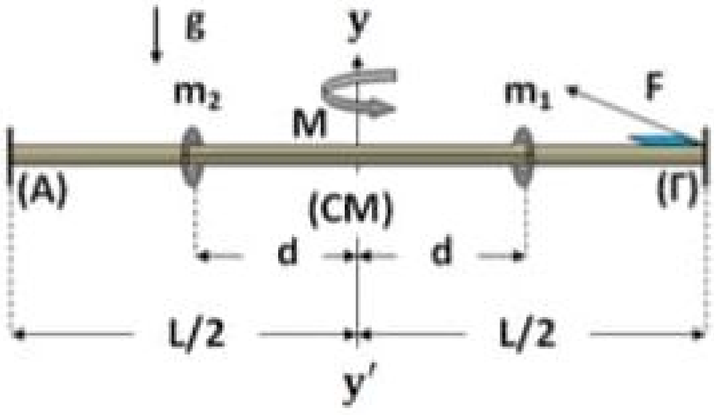
Επιτάχυνση μέχρι να σπάσει το νήμα!



Μία λεπτή ομογενής ράβδος (ΑΓ), έχει μάζα M = 6 kg, μήκος L = 2 m, είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό, κατακόρυφο άξονα y′y που διέρχεται από το μέσον της. Δύο όμοιοι μικροί δακτύλιοι ($Δ_1$) και ($Δ_2$) που έχουν μάζες $m_1 = m_2 = m = 1$ kg αντίστοιχα, είναι περασμένοι στη ράβδο και απέχουν από τον άξονα περιστροφής y′y απόσταση d = 0,5 m ο καθένας. Οι δακτύλιοι ($Δ_1$) και ($Δ_2$) συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Ασκούμε στο άκρο (Γ) κάθετα στη ράβδο οριζόντια δύναμη, σταθερού μέτρου $F = \frac{100}{\pi}$ N, οπότε το σύστημα αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y′y. Η δύναμη είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο και οι δακτύλιοι δεν δέχονται τριβές από αυτήν.

Όταν το σύστημα έχει εκτελέσει N = 10 περιστροφές, το νήμα κόβεται και η δύναμη $\vec{F}$ παύει να ασκείται στη ράβδο.

Δ1. Να βρεθεί το έργο της δύναμης $\vec{F}$ και η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο θραύσης του νήματος και το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο κάθε δακτύλιος από την ράβδο για όσο χρόνο ασκούνταν σε αυτήν η δύναμη $\vec{F}$.

Μετά το κόψιμο του νήματος, οι μικροί δακτύλιοι μετακινούνται και προσκολλώνται στα άκρα της ράβδου. Να υπολογιστούν:

Δ3. Η γραμμική ταχύτητα του άκρου (Α) της ράβδου, μετά την προσκόλληση των δακτυλίων.

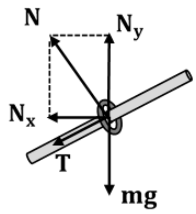
Δ4. Το ποσοστό % της προσφερόμενης στο σύστημα ενέργειας από τη δύναμη $\vec{F}$ που μετατράπηκε σε θερμότητα λόγω της προσκόλλησης των δακτυλίων στα άκρα της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σ' αυτήν $I = \frac{1}{12}ML^2$ και $\pi^2 = 10$.

Λύση

Δ1. Το έργο της δύναμης F υπολογίζεται από την σχέση $W = \tau\Delta\theta \Rightarrow W = F\frac{L}{2}\Delta\theta$, όπου $\Delta\theta = N2\pi \Rightarrow \Delta\theta = 20\pi\, rad$, άρα $W = \frac{100}{\pi}\cdot 1 \cdot 20\pi \Rightarrow W = 2000J$. Για να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος βρίσκουμε αρχικά την ροπή αδράνειας του $I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}$ και μετά εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. $I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = I + I_{\Delta 1} + I_{\Delta 2} \Rightarrow I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{12}ML^2 + 2md^2 \Rightarrow I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 2{,}5kgm^2$. $\Sigma W = \Delta K \Rightarrow W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2W_F}{I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}} \Rightarrow \omega = 40rad/s$.

Δ2. Η τάση T του νήματος παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Άρα $T = F_\kappa \Rightarrow T = m\omega^2 d$. Όταν το νήμα κόβεται $\omega = 40rad/s$ και $T_{\theta\rho} = 800N$.



Η δύναμη N_x που η ράβδος ασκεί σε κάθε δακτύλιο παίζει ρόλο επιτρόχιας δύναμης. Άρα $N_x = F_\varepsilon \Rightarrow N_x = m\alpha_\varepsilon \Rightarrow N_x = m\alpha_\gamma d$, όπου α_γ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος για όσο χρόνο ασκούνται σε αυτό η δύναμη F.

$\Sigma\tau = I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}\alpha_\gamma \Rightarrow F\frac{L}{2} = I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{40}{\pi}\ rad/s^2$.Άρα $N_x = \frac{20}{\pi}N$ ή $N_x = 2\sqrt{10}N$, επίσης $N_y = mg \Rightarrow N_y = 10N$. Άρα η συνολική δύναμη που δέχεται κάθε δακτύλιος από τη ράβδο έχει μέτρο: $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} \Rightarrow N = 2\sqrt{35}\ N$.

Δ3. Μετά το κόψιμο του νήματος και μέχρι λίγο πριν οι δακτύλιοι χτυπήσουν στα άκρα της ράβδου διατηρείται τόσο η στροφορμή όσο και η μηχανική ενέργεια του συστήματος ράβδος–δακτύλιοι, διότι το σύστημα είναι μονωμένο από εξωτερικές ροπές και δεν υπάρχουν τριβές αντίστοιχα.

$I'_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{12}ML^2 + 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow\ I'_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 4\ kgm^2$.

$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}\omega = I'_{\sigma\upsilon\sigma\tau}\omega'$ Άρα $\omega' = \frac{I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{I'_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}\omega \Rightarrow \omega' = 25\ rad/s$.

Η γωνιακή ταχύτητα δεν μεταβάλλεται λόγω της κρούσης των δακτυλίων με τα άκρα της ράβδου γιατί το σύστημα είναι μονωμένο από εξωτερικές ροπές κατά τη διάρκεια της κρούσης. Άρα η γραμμική ταχύτητα κάθε δακτυλίου θα είναι: $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \omega'\frac{L}{2} \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2 = 25m/s$.

Δ4. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$\pi\% = \frac{|\Delta K_{\sigma\upsilon\sigma\tau}|}{W_F} = \frac{K_{\sigma\upsilon\sigma,\alpha\rho\chi} - K_{\sigma\upsilon\sigma,\tau\varepsilon\lambda}}{W_F} = \frac{\frac{1}{2}I_{\sigma\upsilon\sigma}\omega^2 - \frac{1}{2}I'_{\sigma\upsilon\sigma}\omega'^2}{W_F} \Rightarrow \pi\% = 37{,}5\%$.