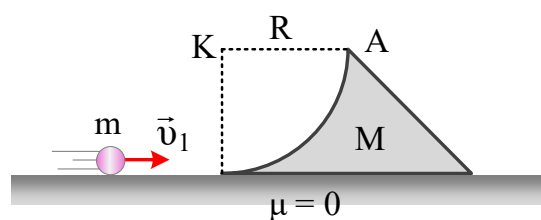


Μία σφήνα με τεταρτοκύκλιο.

Η σφήνα του σχήματος έχει μάζα M , βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ένα τμήμα της είναι τεταρτοκύκλιο ακτίνας $R = 0,6 \text{ m}$ και αρχικά είναι ακίνητη. Η μικρή σφαίρα έχει μάζα $m = M/3$ και ακτίνα $r \ll R$ και κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με οριζόντια ταχύτητα v_1 όπως στο σχήμα.



α. Να βρεθεί η ταχύτητα $\vec{v}_1$ της σφαίρας ώστε αυτή να φτάσει οριακά στο ανώτερο σημείο A της σφήνας.

β. Αν $v_1 = 8 \text{ m/s}$ η ταχύτητα της μικρής σφαίρας, να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η σφαίρα από το οριζόντιο επίπεδο. Δίνονται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ σφαίρας και σφήνας. Η σφαίρα και το κέντρο μάζας της σφήνας ανήκουν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

γ. Στην περίπτωση που η ταχύτητα της μικρής σφαίρας είναι $v_1 = 8 \text{ m/s}$ ποια θα είναι η τελική ταχύτητα της σφήνας;

Λύση

α. ΑΔΟ ($1 \rightarrow 2$):

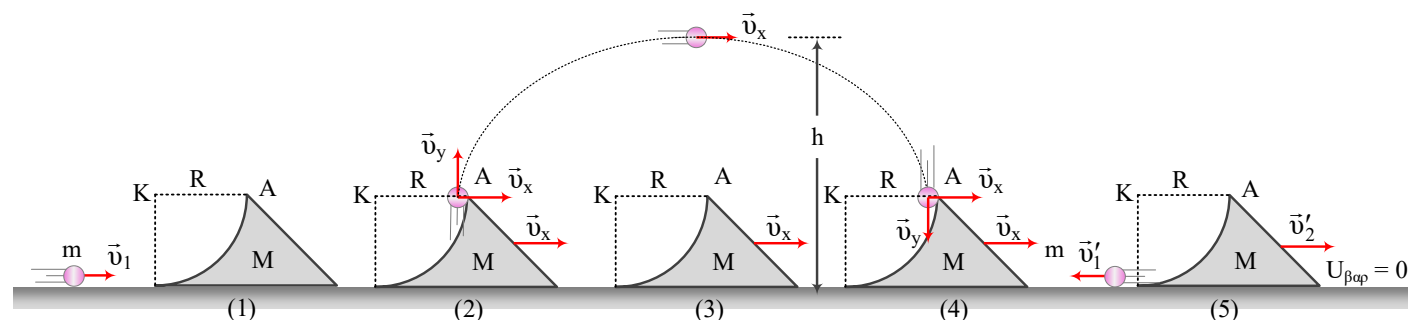
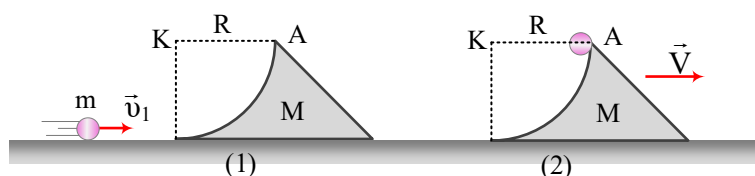
$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mv_1 = (m+M)V \Rightarrow$$

$$mv_1 = 4mV \Rightarrow V = \frac{v_1}{4} \quad (1)$$

ΑΔΜΕ ($1 \rightarrow 2$)

$$E_{\mu(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2 + mgR \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}3mV^2 + mgR \Rightarrow$$

$$v_1^2 = V^2 + 3V^2 + 2gR \Rightarrow v_1^2 = \frac{v_1^2}{16} + 3\frac{v_1^2}{16} + 2gR \Rightarrow \frac{3}{4}v_1^2 = 2gR \Rightarrow v_1^2 = \frac{8}{3}gR \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}.$$



β. Στη θέση A (σχήμα 2) που η σφαίρα εγκαταλείπει τη σφήνα, σφαίρα και σφήνα έχουν την ίδια ταχύτητα v_x (οριζόντια).

$$\text{ΑΔΟ: } (1 \rightarrow 2): \vec{p}_{\alpha\rho\chi(x)} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda(x)} \Rightarrow mv_1 = mv_x + Mv_x \Rightarrow mv_1 = mv_x + 3mv_x \Rightarrow v_1 = 4v_x \Rightarrow v_x = 2 \text{ m/s}.$$

$$\text{ΑΔΜΕ } (1 \rightarrow 3) E_{\mu(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}Mv_x^2 + mgh \Rightarrow mv_1^2 = mv_x^2 + 3mv_x^2 + 2mgh \Rightarrow$$

$$v_1^2 = 4v_x^2 + 2gh \Rightarrow v_1^2 - 4\frac{v_1^2}{16} = 2gh \Rightarrow h = \frac{3v_1^2}{8g} \Rightarrow h = 2,4 \text{ m}.$$

γ. Η σφαίρα κατά την κάθοδο της θα συναντήσει την σφήνα (σχήμα 4) και ολισθαίνοντας στο τεταρτοκύκλιο τελικά θα φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο (σχήμα 5).

$$\text{ΑΔΟ: } (1 \rightarrow 5): \vec{p}_{\alpha\rho\chi(x)} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda(x)} \Rightarrow mv_1 = -mv'_1 + Mv'_2 \Rightarrow mv_1 = -mv'_1 + 3mv'_2 \Rightarrow v_1 = -v'_1 + 3v'_2 \Rightarrow$$

$$v'_1 + v_1 = 3v'_2 \quad (2).$$

$$\text{ΑΔΜΕ } (1 \rightarrow 5): E_{\mu(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2 \Rightarrow mv_1^2 = mv_1'^2 + 3mv_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + 3v_2'^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 - v_1'^2 = 3v_2'^2 \Rightarrow (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = 3v_2'^2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} (v_1 - v'_1)3v'_2 = 3v_2'^2 \Rightarrow v_1 - v'_1 = v'_2 \quad (3)$$

$$\text{Προσθέτω (2), (3): } 2v_1 = 4v'_2 \Rightarrow 2v_1 = 4v'_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{v_1}{2} \Rightarrow \mathbf{v'_2 = 4 \text{ m/s.}}$$