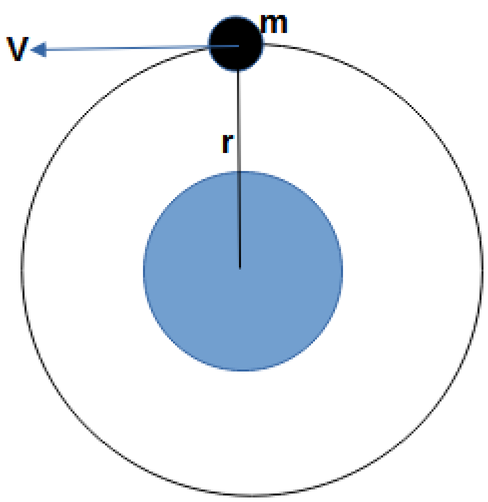
Α. Βρείτε την ταχύτητα αντικειμένου σε km/s στον ισημερινό της γης λόγω περιστροφής της γης με περίοδο T = 24h. Θεωρείστε τη γη σφαιρική ακτίνας R = 6371 km.

Β.



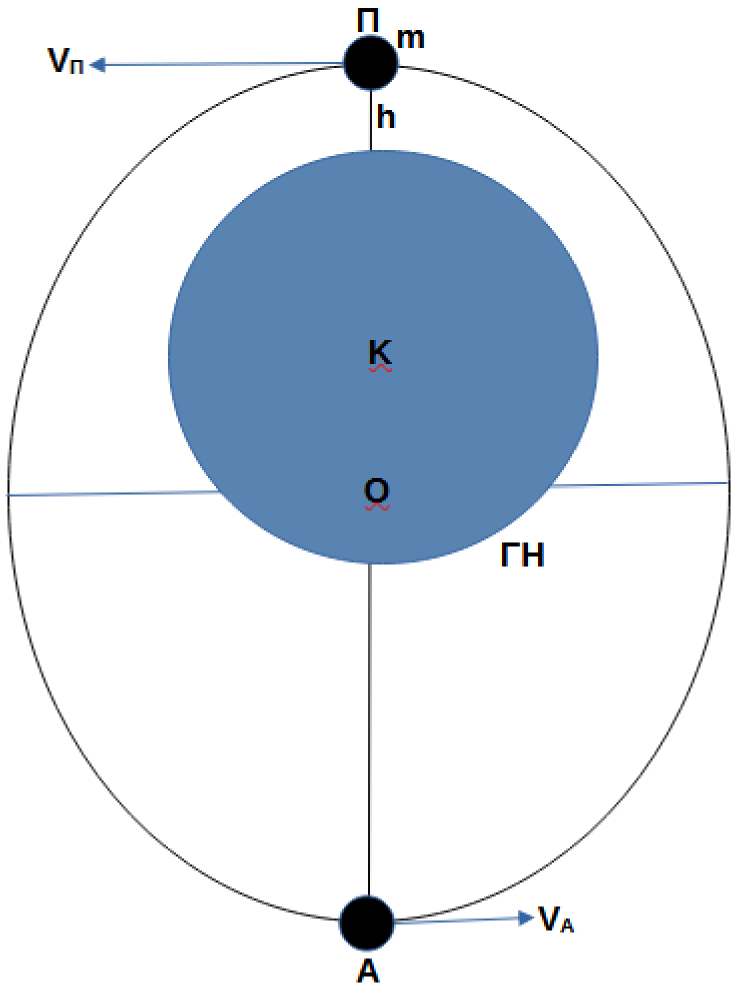
Αντικείμενο μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από τη γη δείξτε ότι:

Β$_1$) Η ολική μηχανική του ενάργεια δίνεται από τη σχέση $E = -\frac{GMm}{2r}$ όπου M η μάζα της γης.

Β$_2$) $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ που αποτελεί τον 3^o νόμο του Kepler για την κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο αλλά και των τεχνητών δορυφόρων γύρω από τη γη.
Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν και για ελλειπτικές τροχιές αν στη θέση του r θέσουμε τον μεγάλο ημιάξονα α της έλλειψης.

Γ. Πύραυλος φορέας μεταφέρει δορυφόρο στο περίγειο της τροχιάς του σε ύψος h = 437 km από τον ισημερινό της γης και τον ελευθερώνει με την κατάλληλη ταχύτητα κατά τη φορά περιστροφής της γης ώστε να κερδίσει την ταχύτητα περιστροφής της γης. Ο δορυφόρος κινείται σε ελλειπτική τροχιά εκκεντρότητας e = 0,08 (σχήμα κάτω).

Γ$_1$. Βρείτε την ταχύτητα του δορυφόρου στο περίγειο Π και στο απόγειο Α της τροχιάς του σε km/s.



Γ2. Γιατί νομίζεται ότι είναι σημαντική η εκμετάλλευση της μικρής ταχύτητας περιστροφής της γης.

Δ. Βρείτε την περίοδο περιφοράς του δορυφόρου γύρω από τη γη.

Λύση

Α) Αντικείμενο στον ισημερινό της γης γράφει κύκλο ακτίνας R σε T = 24 h έτσι V = $\frac{2\pi R}{T}$ (1) = 463 m/s = 0,463 Km/s

Β1) Βαρυτική έλξη της γης στον δορυφόρο = κεντρομόλος => $F_g = F_c$ =>

$\frac{GMm}{r^2}$ = m$\frac{V^2}{r}$ => K = $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{GMm}{2r}$(2)

E = K + U =>(2) $\frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$ => **E = -** $\boldsymbol{\frac{GMm}{2r}}$

Β2) (1),(2) => $V^2 = \frac{GM}{r}$ => $\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r}$ => $\boldsymbol{\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}$

Γ$_1$) Απόσταση περιήλιου από το κέντρο της γης:

ΚΠ = h + R = 6808 km = 6.808.000 m

ΚΠ = ΠΟ - ΚΟ = α – γ = α – αe = α(1-e) => α = $\frac{K\Pi}{1-e}$ => α = 7400 km = 7.400.000 m

Απόσταση αφήλιου από το κέντρο της γης:

ΚΑ = 2α – ΚΠ => ΚΑ = 7992 km = 7.992.000 m

ΑΔΜΕ στο Π:$\frac{1}{2}mV_\Pi^2 - \frac{GMm}{K\Pi} = - \frac{GMm}{2\alpha}$ => $V_\Pi^2 = GM(\frac{2}{K\Pi} - \frac{1}{\alpha})$ => **V$_\Pi$ = 9756 m/s = 9,756 km/s ,**

ΑΔΜΕ στο Α:$\frac{1}{2}mV_A^2 - \frac{GMm}{KA} = - \frac{GMm}{2\alpha}$ =>$V_A^2 = GM(\frac{2}{KA} - \frac{1}{\alpha})$ =>

V$_A$ = 6786 m/s = 6,786 km/s

Γ$_2$) Για να επιταχυνθεί το σύστημα πύραυλος- δορυφόρος κατά 0,463 km/s ακόμα(μικρή σχετικά με την 9,756 km/s) απαιτείται σημαντική ενέργεια λόγω του μεγάλου βάρους που έχουν, επομένως σημαντικά περισσότερα καύσιμα.

Δ) $\frac{\alpha^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ => T = 2πα$\sqrt{\frac{\alpha}{GM}}$ = 6322,5 s => **T = 1,75625 h**