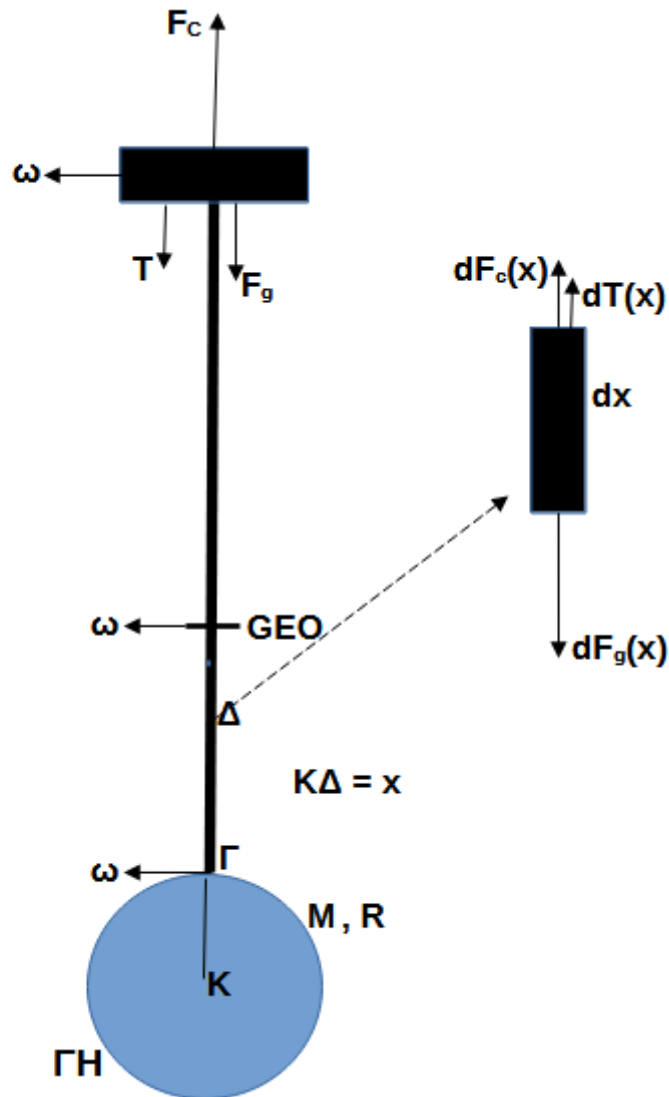


Η ΦΥΣΙΚΗ ΤΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΙΚΩΝ ΑΝΕΛΚΥΣΤΗΡΩΝ



Έστω ισοπαχές καλώδιο αγκιστρωμένο στη γη στο Γ κάπου στον ισημερινό. Το καλώδιο εκτείνεται πάνω από την γεωστατική τροχιά περίπου στα 100.000 km από το κέντρο της γης. Το καλώδιο πρέπει να αναπτυχθεί στον ισημερινό ώστε να ακολουθεί την περιστροφή της γης που πραγματοποιείται γύρω από τον ισημερινό.

Στο πάνω άκρο του καλωδίου προσδένεται αντίβαρο μάζας m που κρατάει το νήμα τεντωμένο όπως θα δούμε στη μαθηματική ανάλυση. Το καλώδιο μαζί με το αντίβαρο περιφέρονται γύρω από τη γη με γωνιακή ταχύτητα ω όση η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης. Αν επεκτείνουμε το καλώδιο στα 150.000 km από το κέντρο της γης όπως θα δούμε δεν χρειάζεται αντίβαρο καθώς το τμήμα του καλωδίου πάνω από τη γεωστατική τροχιά λειτουργεί σαν αντίβαρο.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΚΑΛΩΔΙΟΥ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Στο σημείο Δ με ΚΔ = x (Κ το κέντρο της γης) θεωρούμε στοιχειώδες μήκος σύρματος dx εμβαδού διατομής A και πυκνότητας ρ. Τότε:

$$dm = \rho dV = \rho A dx \quad (1)$$

Στο στοιχειώδες τμήμα ενεργούν η έλξη της γης $dF_g(x)$, η φυγόκεντρη δύναμη $dF_c(x)$ και η τάση από το νήμα $dT(x)$.

Επειδή το τμήμα ισορροπεί $\Sigma F = 0 \Rightarrow dF_g(x) - dF_c(x) - dT(x) = 0 \Rightarrow$

$dT(x) = \frac{GMdm}{x^2} - dm\omega^2 x = \rho A dx \left(\frac{GM}{x^2} - \omega^2 x \right) \Rightarrow$ (ολοκλήρωση από την επιφάνεια της γης έως τυχαίο ύψος $x = r$)

$$\int_R^r dT(x) = \rho A \left(\int_R^r \frac{GM}{x^2} dx - \omega^2 \int_R^r x dx \right) \Rightarrow$$

$$T(r) - T(R) = \rho A \left\{ GM \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) - \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R^2) \right\} \quad (2)$$

Η τάση του νήματος στο ελεύθερο άκρο του στην επιφάνεια της γης είναι μηδέν $T(R) = 0$. Αγκιστρώνουμε το καλώδιο στο Γ μόνο και μόνο για να μη μετακινείται από ανέμους ή από τη δύναμη Coriolis.

$$(2) \Rightarrow T(r) = \rho A \left\{ GM \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) - \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R^2) \right\} \quad (3)$$

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της $T(r)$ είναι:

$$T'(r) = \rho A \left(\frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \right), \quad T'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} \quad (4)$$

$$T''(r) = \rho A \left(-\frac{2GM}{r^3} - \omega^2 \right) < 0$$

Τρίτος νόμος του Kepler στη γεωστατική τροχιά όπου $T = 2\pi/\omega$:

$$\frac{r_G^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow r_G = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} \quad (5)$$

Από (4)(5) $r = r_G$, δηλαδή η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στη γεωστατική τροχιά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η ΤΑΣΗ ΤΟΥ ΚΑΛΩΔΙΟΥ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΥ ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ ΜΕΧΡΙ ΤΗ ΓΕΩΣΤΑΤΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ ΟΠΟΥ ΠΑΙΡΝΕΙ ΤΗΝ ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΕΛΑΤΤΩΝΕΤΑΙ ΜΕΧΡΙ ΟΤΟΥ ΣΤΟ ΑΝΩ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΑΚΡΟ ΤΟΥ ΚΑΛΩΔΙΟΥ ΓΙΝΕΙ $T = 0$ ΟΠΟΤΕ ΤΟ ΚΑΛΩΔΙΟ ΕΙΝΑΙ ΑΥΤΟΣΤΗΡΙΖΟΜΕΝΟ ΧΩΡΙΣ ΑΝΤΙΒΑΡΟ. ΑΝ ΟΜΩΣ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΚΑΛΩΔΙΟ ΑΠΟ ΑΥΤΟ ΠΟΥ ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΝΑ

ΕΙΝΑΙ $T = 0$ ΣΤΟ ΑΝΩ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΑΚΡΟ, ΤΟΤΕ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΑΝΤΙΒΑΡΟ ΓΙΑ ΝΑ ΚΡΑΤΑΕΙ ΤΟ ΚΑΛΩΔΙΟ ΤΕΝΤΩΜΕΝΟ.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΦΟΥ Η ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΕΙΝΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΗ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $T(r)$ ΕΧΕΙ ΤΑ ΚΟΙΛΑ ΣΤΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΤΩ.

$$(5) \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{r_G^3} \quad (6)$$

Στη γεωστατική τροχιά για $r = r_G$ και (3)(6) $\Rightarrow$

$$T_{\max} = GM\rho A \left(\frac{1}{R} - \frac{3}{2r_G} + \frac{R^2}{2r_G^3} \right) \Rightarrow$$

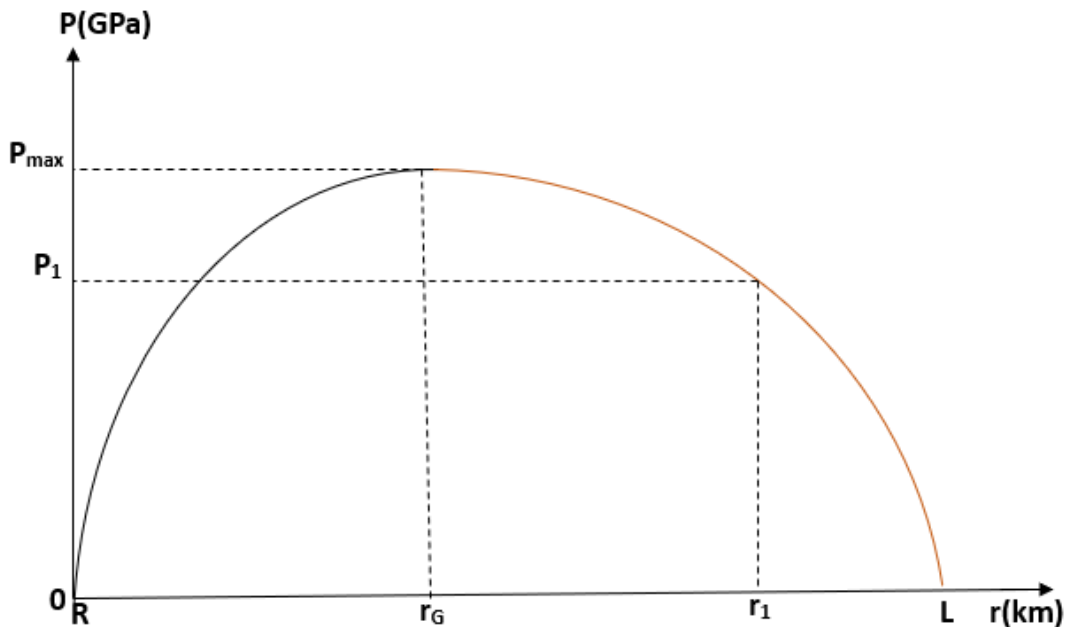
$$P_{\max} = \frac{T_{\max}}{A} = GM\rho \left(\frac{1}{R} - \frac{3}{2r_G} + \frac{R^2}{2r_G^3} \right)$$

Με αντικατάσταση για νανοσωλήνες άνθρακα με $\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$, $r_G = 42154 \text{ km}$, $M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ προκύπτει:

$$P_{\max} = 63 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \text{ ή } P_{\max} = 63 \text{ GPa}$$

Δηλαδή η μέγιστη πίεση στο καλώδιο νανοσωλήνων άνθρακα σταθερής διατομής στη GEO είναι 63 GPa.

Κάτω βλέπουμε τη γραφική παράσταση της $P(r) = T/A$



$$R = 6378 \text{ km}, r_G = 42164 \text{ km}, L = 150.000 \text{ km}, P_{\max} = 63 \text{ GPa}$$

$$r_1 = 100.000 \text{ km}, P_1 = 42 \text{ GPa}$$

Οι νανοσωλήνες άνθρακα έχουν δοκιμαστεί και αντέχουν 100 GPa σύμφωνα όμως με την παγκόσμια κοινοπραξία διαστημικών ανελκυστήρων η τάση εφελκυσμού στο καλώδιο δεν πρέπει να ξεπερνά τα 50 GPa. Αν λάβουμε υπόψη ότι το ατσάλι σπάει στα 5 GPa και το Kevlar στα 3,6 GPa, η αντοχή των νανοσωλήνων άνθρακα είναι πολύ μεγάλη και οφείλεται στους ισχυρούς ομοιοπολικούς δεσμούς άνθρακα – άνθρακα. Επιπλέον οι νανοσωλήνες άνθρακα είναι πολύ ελαφροί με πυκνότητα 1300 kg/m^3 .

Σήμερα εξετάζονται προσμίξεις νανοσωλήνων άνθρακα με άλλα υλικά που ανεβάζουν την αντοχή σε εφελκυσμό, σίγουρα όμως ο δρόμος μέχρι να κατασκευαστεί ένας διαστημικός ανελκυστήρας είναι μακρύς.

ΚΑΛΩΔΙΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Επειδή η πίεση είναι μεγαλύτερη στην GEO χρησιμοποιούμε καλώδιο μεταβλητής διατομής με μικρή διατομή στα άκρα και μεγάλη στη GEO κάτι σαν δύο κώνοι με τις κορυφές στα άκρα του καλωδίου και τη βάση στη GEO.

Σε μία τέτοια κατασκευή διατηρούμε την πίεση σταθερή σε όλο το μήκος του καλωδίου και πετυχαίνουμε μεγαλύτερη αντοχή σε εφελκυσμό και μικρότερη μάζα καλωδίου.

Παίρνουμε πάλι ένα τμήμα του καλωδίου κάτω από τη GEO

$$\text{Τώρα } dT = PdA = \rho A dx \left(\frac{GM}{x^2} - \omega^2 \chi \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{\rho}{P} \left(\frac{GM}{x^2} - \omega^2 \chi \right) dx \Rightarrow (6)$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{\rho GM}{P} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r_g^3} \chi \right) dx$$

Ολοκληρώνουμε από $A = A_s$ έως $A = A_r$

και από R έως r .

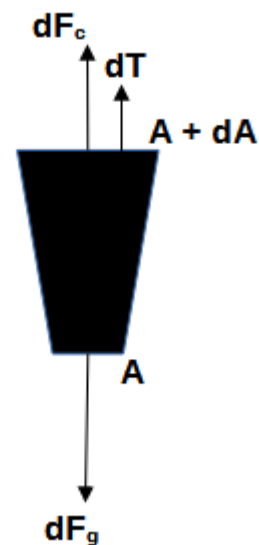
$$A_r = A_s e^{\frac{\rho \kappa}{P}}$$

$$\kappa = GM \left(\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{2r_g^3} (r^2 - R^2) \right) \text{ και}$$

για την γεωστατική τροχιά $A_r = A_g$, $r = r_g$

$$\frac{A_g}{A_s} = e^{\frac{\rho \chi 4,85 \times 10^7}{P}}$$

Παρατηρούμε ότι η διατομή του καλωδίου αυξάνεται εκθετικά μέχρι τη GEO και στη συνέχεια μειώνεται.



Αν υποθεθεί ότι θέλουμε να φτιάξουμε την κατασκευή με ατσάλι $\rho = 7900 \text{ kg}$ και αντοχή $P = 5 \text{ GPa}$ τότε $A_G = 2 \times 10^{33} \text{ A}_S$ δηλαδή αν ξεκινούσαμε από τη βάση με μία διατομή 1 nm τότε στη γεωστατική τροχιά θα έπρεπε να έχουμε διατομή $2 \times 10^{21} \text{ km}$ παραπάνω από 2 έτη φωτός.

Με νανοσωλήνες άνθρακα $P = 50 \text{ GPa}$, $\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$ προκύπτει $A_G = 3,53 A_S$

Ας δούμε τώρα πως μεταβάλλονται το στοιχειώδες βάρος dF_g και η στοιχειώδης φυγόκεντρη δύναμη dF_c κατά μήκος του καλωδίου.

$$dF_g > dF_c \Rightarrow \frac{GMdm}{x^2} > dm\omega^2 x \Rightarrow (6) \frac{GMdm}{x^2} > dm \frac{GM}{r_G^3} x \Rightarrow x^3 < r_G^3 \Rightarrow x < r_G$$

$$dF_g < dF_c \Rightarrow \frac{GMdm}{x^2} < dm\omega^2 x \Rightarrow (6) \frac{GMdm}{x^2} < dm \frac{GM}{r_G^3} x \Rightarrow x^3 > r_G^3 \Rightarrow x > r_G$$

$$dF_g = dF_c \Rightarrow \frac{GMdm}{x^2} = dm\omega^2 x \Rightarrow (6) \frac{GMdm}{x^2} = dm \frac{GM}{r_G^3} x \Rightarrow x^3 = r_G^3 \Rightarrow x = r_G$$

ΔΗΛΑΔΗ ΚΑΘΩΣ ΑΝΕΒΑΙΝΟΥΜΕ ΣΤΟ ΚΑΛΩΔΙΟ ΑΡΧΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΒΑΡΟΣ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΑΠΟ ΤΗΝ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟ, ΟΣΟ ΑΝΕΒΑΙΝΟΥΜΕ ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ ΤΟ ΒΑΡΟΣ ΚΑΙ ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ Η ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ, ΣΤΗ ΓΕΩΣΤΑΤΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΒΑΡΟΣ ΙΣΟ ΜΕ ΤΗ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟ ΚΑΙ ΠΕΡΑΝ ΤΗΣ ΓΕΩΣΤΑΤΙΚΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ Η ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΑΠΟ ΤΟ ΒΑΡΟΣ.

Εδώ βασίζεται και η αρχή λειτουργίας του διαστημικού ανελκυστήρα.

Ας ορίσουμε **φαινόμενο βάρος** του καλωδίου τη διαφορά της φυγόκεντρης δύναμης από τη βαρυτική έλξη της γης.

Μέχρι την GEO συσσωρεύεται φαινόμενο βάρος με φορά προς τη γη και ακριβώς στη GEO έχει συσσωρευτεί ένα τεράστιο φαινόμενο βάρος με φορά προς τη γη. Αν τερματίσουμε το καλώδιο εκεί προφανώς θα καταρρεύσει αμέσως.

Καθώς ανεβαίνουμε μετά τη GEO το φαινόμενο βάρος έχει φορά προς τα πάνω και σιγά – σιγά μειώνει το προς τα κάτω φαινόμενο βάρος μέχρις ότου το μηδενίσει όταν φτάσει στα 150.000 km . Δηλαδή το τμήμα του καλωδίου πάνω από τη GEO όχι μόνο δεν επιβαρύνει την κατασκευή αλλά είναι αυτό που την κρατάει όρθια. Βέβαια μπορούμε να σταματήσουμε στα 100.000 km πχ και να χρησιμοποιήσουμε αντίβαρο το φαινόμενο βάρος του οποίου θα αντικαταστήσει αυτό που μας λείπει.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ένα καλώδιο 150.000 km που αιωρείται από την επιφάνεια της γης και πάνω χωρίς να στηρίζεται πουθενά ούτε στη γη ούτε στο διάστημα.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ένα ανάποδο βαρίδι σε καλώδιο 100.000 km με το βάρος δεμένο στο πάνω μέρος στο διάστημα το δε κάτω μέρος στη γη δε στηρίζεται πουθενά.

Προφανώς πριν ανακαλυφθούν οι νανοσωλήνες άνθρακα η κατασκευή διαστημικών ανελκυστήρων ήταν προϊόν επιστημονικής φαντασίας.

Όταν ο Arthur Clarke συγγραφέας του μυθιστορήματος επιστημονικής φαντασίας ***The Fountains of Paradise (οι πηγές του παραδείσου)*** το 1979 στο οποίο περιγράφει την κατασκευή διαστημικού ανελκυστήρα ρωτήθηκε αν είναι δυνατόν ποτέ να κατασκευαστεί όντως ένας διαστημικός ανελκυστήρας απάντησε προφητικά:

«Ναι. 50 χρόνια αφ' ότου σταματήσουν όλοι να γελούν»

ΜΑΖΑ ΑΝΤΙΒΑΡΟΥ

Από το σχήμα για το αντίβαρο $F_c > F_g$ με αποτέλεσμα η τάση στο αντίβαρο να έχει φορά προς τη γη και η τάση στα καλώδια αντίθετη (3^{ος} νόμος του Νεύτωνα). Αυτή η τάση κρατάει το νήμα τεντωμένο.

Αν στην (3) θέσουμε $r = 100.000 \text{ km}$ προκύπτει πίεση $P = \frac{T}{A} = 50 \text{ GPa}$ (7)

ΓΙΑ ΤΟ ΑΝΤΙΒΑΡΟ:

Αν m η μάζα του τότε:

$$T = F_c - F_g = m\omega^2 r - \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow T = 0,5m \text{ (8)}$$

$$(7)(8) \Rightarrow m = A \times 10^{11} \text{ (9)}$$

Το A υπολογίζεται όπως είδαμε πιο πάνω από την εκθετική εξίσωση.

Η συνολική μάζα του καλωδίου υπολογίζεται από την:

$$m_K = \rho \int_R^L A_r dr$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΚΟΥΣ ΚΑΛΩΔΙΟΥ ΧΩΡΙΣ ΑΝΤΙΒΑΡΟ

$$T(r) = 0 \Rightarrow (3) \rho A \left\{ GM \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) - \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R^2) \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$GM \frac{r-R}{rR} - \frac{GM}{2r_G^3} (r-R)(r+R) = 0 \Rightarrow GM(r-R) \left(\frac{1}{rR} - \frac{1}{2r_G^3} (r+R) \right) = 0 \Rightarrow r = R \text{ που ήδη}$$

$$\text{γνωρίζουμε και } \frac{1}{rR} - \frac{1}{2r_G^3} (r+R) = 0 \Rightarrow Rr^2 + R^2r - 2r_G^3 = 0 \text{ με δεκτή ρίζα:}$$

$$r = \frac{R}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \left(\frac{r_G}{R} \right)^3} - 1 \right) \Rightarrow r = 150.000 \text{ km}$$

Ο ΑΝΑΡΡΙΧΗΤΗΣ (προδιαγραφές του Ιαπωνικού κατασκευαστικού γίγαντα Obayashi που έχει ανακοινώσει ότι θα έχει έτοιμο διαστημικό ανελκυστήρα το 2050)

Ο αναρριχητής θα έχει μάζα 7 tn και το φορτίο που θα μεταφέρει 13 tn. Ο θάλαμος επιβατών θα είναι σαν του ISS. Ο ηλεκτροκινητήρας θα τροφοδοτείται από τη γη με ισχυρή δέσμη Laser που θα κινεί τον αναρριχητή με σταθερή ταχύτητα 200 km/h στηριζόμενο στο καλώδιο με κυλινδρικούς τροχούς που αγκαλιάζουν σφικτά το καλώδιο αποτελούμενους από υλικά υψηλής τριβής. Εναλλακτικά προτείνεται μαγνητική σύσφιξη και πρόωση με ισχυρούς ηλεκτρομαγνήτες χωρίς τριβές.

Η ενέργεια που πρέπει να υπερνικήσουμε είναι η δυναμική μέχρι τη GEO αν αφαιρέσουμε το βοηθητικό έργο της φυγόκεντρης καθώς μετά τη GEO η φυγόκεντρη στον αναρριχητή γίνεται μεγαλύτερη από το βάρος του και την κινητική ενέργεια στο διαστημόπλοιο προσδίδει η περιστροφή της γης.

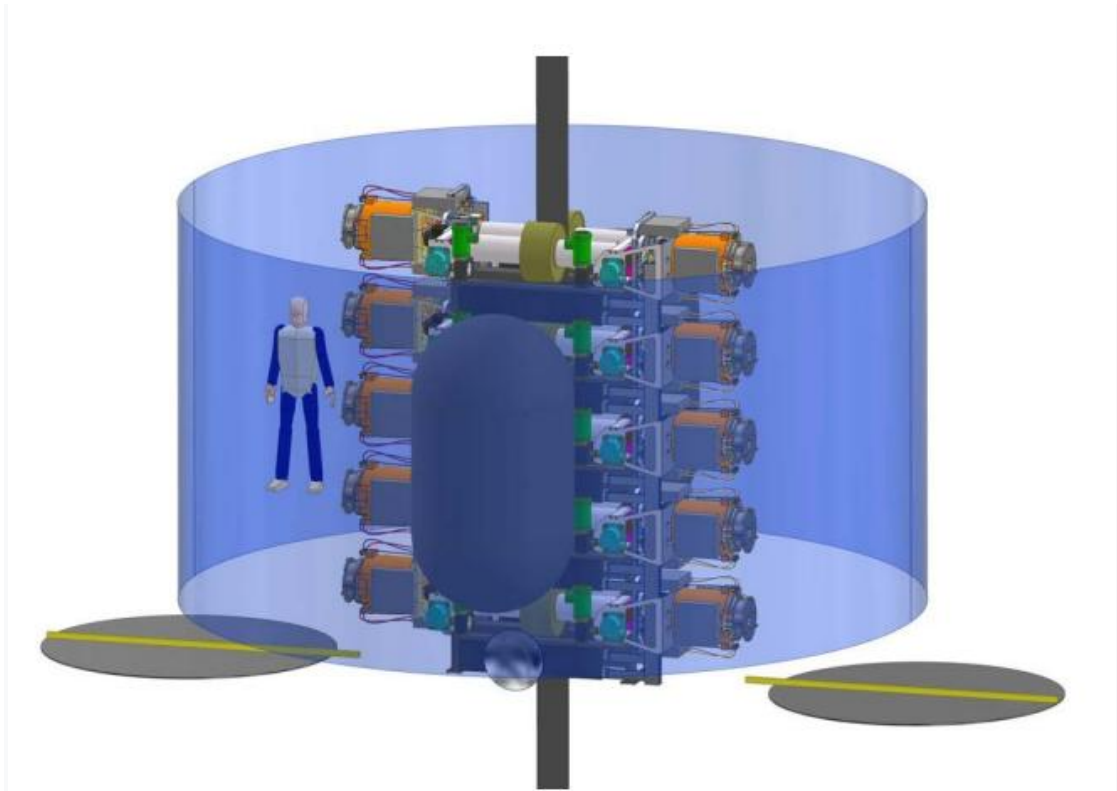
$$E = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{r_G} - \int_R^{r_G} m\omega^2 r dr = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{r_G} - m \frac{\omega^2}{2} (r_G^2 - R^2) =$$

$$\frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{r_G} - m \frac{GM}{2r_G^3} (r_G^2 - R^2) = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_G} - \frac{1}{2r_G^3} (r_G^2 - R^2) \right)$$

$$\Rightarrow E = 972.300.000.000 \text{ J} = 270.000 \text{ kwh}$$

το ταξίδι μέχρι τη GEO διαρκεί $35783/200 = 179 \text{ h}$ (περίπου 7,5 ημέρες)

Η ισχύς της δέσμης Laser θα είναι $270.000 \text{ kwh}/179 \text{ h} = 1,5 \text{ MW}$ αν όμως υπολογίσουμε και τις απώλειες στην ατμόσφαιρα η ισχύς ανέρχεται σε 3 MW.

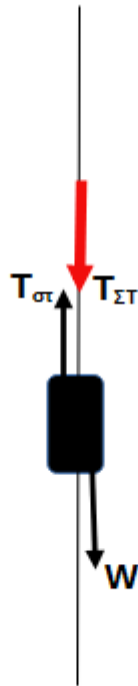


Μία σχεδιαστική προσέγγιση της διεθνούς κοινοπραξίας διαστημικών ανελκυστήρων(ISEC) για τον αναρριχητή. Προβλέπει πέντε ζεύγη τροχών που καθένα διαθέτει δικό του κινητήρα και μηχανισμό συμπίεσης για καλύτερη πρόσφυση στο καλώδιο.

Το κέντρο μάζας του συστήματος καλώδιο – αντίβαρο είναι πάνω από τη GEO καθώς η μεγαλύτερη μάζα είναι πάνω από τη GEO.

Καθώς ο αναρριχητής ανεβαίνει μετατοπίζει το κέντρο μάζας προς τα κάτω. Ποτέ όμως δεν πρέπει το κέντρο μάζας να πέσει κάτω από τη GEO καθώς θα έχουμε στο κέντρο μάζας μια συνολική μάζα που θα δέχεται μεγαλύτερη έλξη από τη γη απ' ότι η φυγόκεντρη.

ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΑΝΑΡΡΙΧΗΤΗ ΣΤΟ ΚΑΛΩΔΙΟ



Ο αναρριχητής πρέπει να είναι σε θέση να ισορροπεί σε κάθε θέση του καλωδίου. Στην κατάσταση ισορροπίας ο αναρριχητής δέχεται το βάρος του W και τη στατική τριβή $T_{στ} = W$. Έτσι το καλώδιο δέχεται δύναμη $T_{ΣΤ}$ αντίθετη και ίση κατά μέτρο με την $T_{στ}$. **$T_{ΣΤ} = T_{στ} = W = m g_r$.**

Σε πρώτη φάση προτείνεται μία μάζα $m = 20.000 \text{ kg}$.

Αν στη γη η διατομή του καλωδίου στη γη είναι $A_s = 10^{-5} \text{ m}^2$ τότε με $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ο αναρριχητής τείνει το καλώδιο προς τα κάτω με μια πίεση **$P = \frac{m g}{A_s} = 20 \text{ GPa}$ περίπου.**

Σε μία μελλοντική επέκταση της μάζας του φορτίου που θα μεταφέρει ο αναρριχητής πχ 100.000 kg τότε η πίεση ανέρχεται στα 100 GPa περίπου οπότε πρέπει να αυξήσουμε τη διατομή. Αύξηση της διατομής όμως σημαίνει αύξηση της μάζας του καλωδίου. Επομένως όταν θα έρθει αυτή η ώρα θα πρέπει να δούμε τι αντοχές έχουν τα νέα υλικά για να ρυθμίσουμε τη διατομή στη βάση.

Καθώς ο αναρριχητής ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέχρι τη GEO η δύναμη από τον κινητήρα πρέπει να εξουδετερώνει την προς τα κάτω συνισταμένη $W + \text{κινητική τριβή} - F_c$.

Στη GEO ο αναρριχητής βρίσκεται σε δορυφορική τροχιά και ισορροπεί χωρίς να χρειάζεται κάποια δύναμη.

Μετά τη GEO η φυγόκεντρη δύναμη στον αναρριχητή γίνεται μεγαλύτερη από το βάρος του και μπορεί να ανεβαίνει με επιτάχυνση χωρίς τον κινητήρα του.

ΑΣΚΗΣΗ

Δείξτε ότι αν πριν την GEO ελευθερώσουμε ένα αντικείμενο από τον ανελκυστήρα αυτό έχοντας μικρότερη ταχύτητα από αυτή που απαιτείται για να μπει σε τροχιά θα πέσει στη γη. Μετά τη GEO όμως το αντικείμενο έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτή που απαιτείται να μπει σε τροχιά. Σε αυτή τη περίπτωση βρείτε τη θέση πάνω στο καλώδιο που πρέπει να ελευθερωθεί το αντικείμενο ώστε οριακά να φύγει από το πεδίο βαρύτητας της γης(ταχύτητα διαφυγής από αυτό το ύψος). $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, μάζα γης $M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$.

ΛΥΣΗ

Η ταχύτητα ενός αντικειμένου που ελευθερώνεται από τον ανελκυστήρα σε απόσταση r από το κέντρο της γης είναι ίση με τη γραμμική του ταχύτητα λόγω περιστροφής της γης: $u = \omega r$.

Η ταχύτητα που απαιτείται για να γίνει δορυφόρος σε αυτό το ύψος

$$\text{προκύπτει από } F_g = F_c \Rightarrow u_{\Delta} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$r < r_G \Rightarrow r < \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} \Rightarrow r^3 < \frac{GM}{\omega^2} \Rightarrow \omega^2 r^2 < \frac{GM}{r} \Rightarrow u^2 < u_{\Delta}^2 \Rightarrow u < u_{\Delta}, \text{ ομοίως}$$

για $r > r_G \Rightarrow u > u_{\Delta}$.

Η ταχύτητα διαφυγής σε απόσταση r από το κέντρο της γης προκύπτει

$$\text{από: } \frac{1}{2} m v_{\delta}^2 = \frac{GMm}{r} \Rightarrow v_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (1)$$

Η γραμμική ταχύτητα του αντικειμένου σε αυτή τη θέση είναι $u = \omega r$ (2)

$$(1)(2) \Rightarrow \omega^2 r^2 = \frac{2GM}{r} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2GM}{\omega^2}} = \sqrt[3]{2} r_G = \sqrt[3]{2} \times 42164 \text{ km} \Rightarrow$$

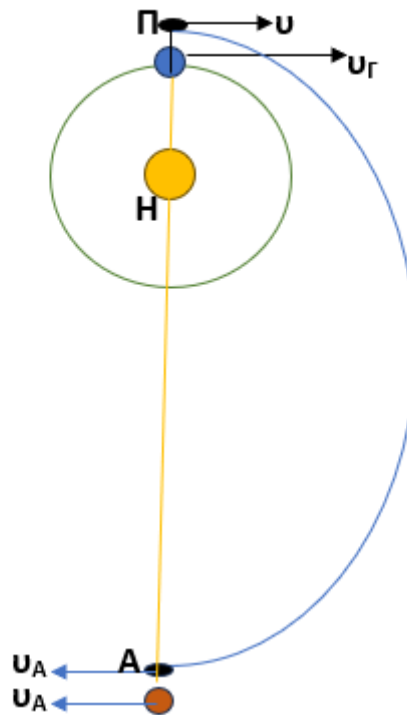
$$\mathbf{r = 53123 \text{ km}}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί η θέση πάνω στο καλώδιο που πρέπει να ελευθερωθεί ένα διαστημόπλοιο ώστε ακολουθώντας μία τροχιά Hohmann να φτάσει στον Άρη. Δίνονται: Η ταχύτητα περιφοράς της γης γύρω από τον ήλιο $u_T = 30 \text{ km/s}$ και του Άρη $u_A = 22 \text{ km/s}$ και ότι το διαστημόπλοιο ελευθερώνεται

τη στιγμή που η ταχύτητά του είναι συνεπίπεδη, παράλληλη και ομόρροπη με την ταχύτητα περιφοράς της γης γύρω από τον ήλιο. Δίνονται: Μάζα ήλιου $M_H = 2 \times 10^{30}$ kg, ταχύτητα σε μία θέση στην ελλειπτική τροχιά $u_r = \sqrt{GM_H \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha} \right)}$ όπου α ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς.

ΛΥΣΗ



Απόσταση του Άρη από τον ήλιο:

$$\frac{GM_H m}{HA^2} = \frac{mv_A^2}{HA} \Rightarrow HA = \frac{GM_H}{v_A^2} = 275.620.000 \text{ km}$$

Στην ελλειπτική τροχιά Hohmann το διαστημόπλοιο ξεκινά από το περιήλιο της τροχιάς και φτάνει στον Άρη στο αφήλιο. Έτσι:

$$\text{Μεγάλος ημιάξονας } \alpha = \frac{\Pi H + A H}{2} = 212.810.000 \text{ km}, \Pi H = 150.000.000 \text{ km}$$

$$\text{και Ταχύτητα στο περιήλιο: } u_{\Pi} = \sqrt{GM_H \left(\frac{2}{\Pi H} - \frac{1}{\alpha} \right)} = 34000 \text{ m/s}$$

Το διαστημόπλοιο εκσφενδονίζεται στο περιήλιο με $u_{\Delta} = u_{\Pi} = u + u_r \Rightarrow u = 4000 \text{ m/s} = 4 \text{ km/s} = \omega r \Rightarrow r = 55004 \text{ km από το κέντρο της γης.}$