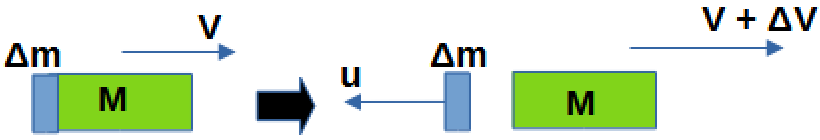
Αρχή διατήρησης ορμής σε πυραύλους



Έστω πύραυλος μάζας M + Δm μαζί με τα καυσαέρια κινούμενος εκτός πεδίου βαρύτητας με ταχύτητα V, Δm είναι μια στοιχειώδης μάζα καυσαερίων. Κάποια στιγμή ο πύραυλος εκτοξεύει τη μάζα Δm με ταχύτητα u ως προς τον πύραυλο αυξάνοντας την ταχύτητά του κατά ΔV. Το σύστημα πύραυλος – καυσαέρια είναι μονωμένο καθώς ο πύραυλος κινείται εκτός πεδίου βαρύτητας έτσι η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερη.

ΑΔΟ ως προς τον πύραυλο, οπότε η ταχύτητα της Δm είναι V – u όπου u η ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων.

$P_i = P_f$ => (M + Δm)V = Δm(V -u) + M(V + ΔV) =>

MV + ΔmV = ΔmV - Δmu + MV + MΔV => Δmu = MΔV (1)

Ρυθμός κατανάλωσης καυσίμου: μ = $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ = σταθερός

=>$M\frac{\Delta V}{\Delta t} = u\frac{\Delta m}{\Delta t}$ => **Mα = uμ => F = uμ**

Όμως η αύξηση Δm της μάζας των καυσαερίων είναι ίση με τη μείωση της μάζας M του πυραύλου: Δm = - ΔM (2)

(1)(2)=> ΔV = - $\frac{\Delta M}{M}u$ (3) και για Δt -> 0

(3) => dV = - $\frac{dM}{M}u$ => $\int_V^{V_f} dV = -u\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M}$ => (V_f – V) = -u$\ln\frac{M_f}{M_i}$ =>

$$\Delta V = u\ln\frac{M_i}{M_f} \quad (4) \quad => \quad M_i = M_f e^{\frac{\Delta V}{u}} \quad (5)$$

Mi η αρχική μάζα του πυραύλου μαζί με τα καύσιμα, M_f η τελική, u η ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων και ΔV το κρίσιμο μέγεθος της διαστημικής η αύξηση της ταχύτητας του πυραύλου.

Οι εξισώσεις (4),(5) είναι οι εξισώσεις Tsiolkovsky.

Εφαρμογές

1.Α) Αν M_0 η μάζα του πυραύλου χωρίς τα καύσιμα και M_K η μάζα των καυσίμων βρείτε την M_K από την εξίσωση (5) αν εξαντλούνται τα καύσιμα. Με δεδομένο u ποιο μέγεθος πρέπει να ελαττώσουμε για να πετύχουμε την ίδια ΔV με λιγότερα καύσιμα;

Β) Σε πύραυλο η ταχύτητα εξόδου καυσαερίων είναι u = 3 km/s αν θέλουμε αύξηση ταχύτητας κατά ΔV = 4 km/s καταναλώνουμε όλα τα καύσιμα μάζας M_K. Αν θέλουμε αύξηση ταχύτητας ΔV΄ = 8 km/s καταναλώνουμε όλα τα καύσιμα μάζας M_K'. Ποια σχέση συνδέει τα M_K' και M_K. M_0 η αρχική μάζα του πυραύλου χωρίς τα καύσιμα. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Αρχικά: $M_i = M_f e^{\frac{\Delta V}{u}}$ => $M_0 + M_K = M_0 e^{\frac{\Delta V}{u}}$ => $\mathbf{M_K = M_0\left(e^{\frac{\Delta V}{u}} - 1\right)}$ (1)

Ομοίως M_K' = $\mathbf{M_0\left(e^{\frac{2\Delta V}{u}} - 1\right)}$ (2)

(1)(2) => $\frac{M_K'}{M_K} = \frac{e^{\frac{2\Delta V}{u}}-1}{e^{\frac{\Delta V}{u}}-1}$ = $\frac{M_K'}{M_K}\frac{e^{\frac{8}{3}}-1}{e^{\frac{4}{3}}-1}$ = 4,8 => $\mathbf{M_K' = 4{,}8M_K}$

2. Ένας πύραυλος 2 σταδίων έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά: 1ο στάδιο – μάζα καυσίμων 120,000kg, μάζα δομής 9,000kg, 2ο στάδιο - μάζα καυσίμων 30,000kg, μάζα δομής 3,000kg και μάζα φορτίου 3,000 kg. Βρείτε την συνολική αύξηση της ταχύτητας του πυραύλου ΔV. Δίνονται ταχύτητες εξόδου καυσαερίων στα 2 στάδια u_1 = 2550 m/s, u_2 = 3138 m/s

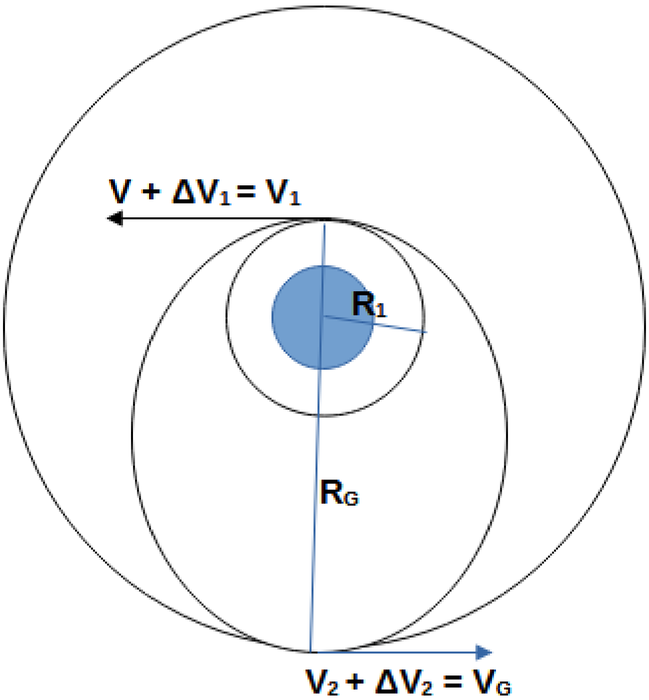
Λύση

1ο στάδιο: M_i = 120.000 + 9000 + 30.000 + 3000 + 3000 = 165000 kg , M_f = 30000 +9000+3000 + 3000 = 45000 kg (4) => $\Delta V_1 = u_1 \ln\frac{165000}{45000}$ = 3,313 km/s

2ο στάδιο: M_i = 30000 + 3000 + 3000 = 36000 kg, M_f = 3000 + 3000 = 6000 kg (4)=> $\Delta V = u_2 \ln\frac{36000}{6000}$ = 5,623 km/s

$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ => **ΔV = 8,936 km/s**

3. Πύραυλος ενός σταδίου τοποθετεί δορυφόρο σε χαμηλή κυκλική τροχιά (LEO) σε ύψος h = 200 km από την επιφάνεια της γης. Στη συνέχεια ο δορυφόρος με τους κινητήρες του οδηγείται στο ύψος της γεωστατικής τροχιάς μέσω τροχιάς μεταφοράς Hohmann όπου νέα πυροδότηση των κινητήρων του τον θέτει σε γεωστατική τροχιά(σχ. κάτω).



Δίνονται: Ακτίνα γης R = 6371 km, μ = $GM_{Γης}$ = $4χ10^{14}$ Nm^2/kg. Να βρεθούν:

Α)Η ακτίνα R_G και η ταχύτητα V_G της γεωστατικής τροχιάς.

Β)Η ταχύτητα V του δορυφόρου στη LEO.

Γ)Οι ταχύτητες V_1 και V_2 στο περιήλιο και στο αφήλιο της τροχιάς Hohmann.

Δ)Η $ΔV_1$ για να μπει ο δορυφόρος από την Leo στην τροχιά Hohmann και η $ΔV_2$ για να μπει από την τροχιά Hohmann στη γεωστατική.

Ε)Ο δορυφόρος έχει καθαρή μάζα M_0 = 1000 kg και φέρει καύσιμα μάζας M_K τα οποία εξαντλούνται με τη δεύτερη πυροδότηση. Αν η ταχύτητα εκτόξευσης καυσαερίων είναι και στις δύο πυροδοτήσεις u = 3000 m/s να βρεθεί η M_K.

Λύση

Α) Στη κυκλική γεωστατική τροχιά T = 24h = 24x3600 s

Τρίτος νόμος του Kepler $\frac{R_G^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}$ => **R_G = 42.290.480 m** , $V_G = \frac{2\pi R_G}{T}$ =>

V_G = 3075 m/s

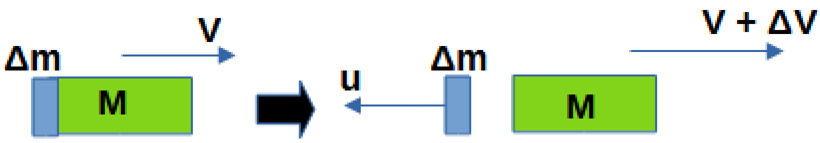
Β) Στη LEO h = 200 km R_1 = R + h = 6.371.000 + 200.000 = 6.571.000 m ,

$F_G = F_c$ => $\frac{\mu m}{R_1^2} = m\frac{V^2}{R_1}$ => $V = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}}$ => **V = 7802 m/s**

Γ) Στην τροχιά Hohmann μεγάλος ημιάξονας **$\alpha = (R_1+R_G)/2$=24.430.740 m**.
Ολική ενέργεια E = $\frac{\mu m}{2a}$, στο περίγειο : E = $\frac{1}{2}mV_1^2$ - $\frac{\mu m}{R_1}$ =>
$V_1 = \sqrt{\mu(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a})}$=> **$V_1$=10265 m/s**
Ομοίως στο απόγειο $V_2 = \sqrt{\mu(\frac{2}{R_G} - \frac{1}{a})}$ => **V_2 = 1595 m/s**
Δ) $\Delta V_1 = V_1 - V$ => **ΔV_1 = 2463 m/s**
$\Delta V_2 = V_G - V_2$ => **ΔV_2 = 1480 m/s**

Ε) Πρώτη πυροδότηση στο περίγειο: αρχική μάζα $M_i = M_0 + M_K$ τελική μάζα $M_j = M_0 + M_K - M_{K1}$ όπου M_{K1} η μάζα καυσίμου που χρησιμοποιήθηκε. **Εξίσωση Tsiolkovsky** $M_i = M_j e^{\Delta V1/u}$ =>
$M_0 + M_K = (M_0 + M_K - M_{K1})e^{\Delta V1/u}$ (1)
Ομοίως στο απόγειο $M_0 + M_K - M_{K1} = M_0 e^{\Delta V2/u} = 1000e^{1480/3000}$ =>
$1000 + M_K - M_{K1} = 1638$ => $M_K - M_{k1} = M_{K2}$ => **M_{K2} = 638 kg** (2)
(1)(2) => $1000 + M_K = 1638e^{2463/3000}$ => **M_K = 2723 kg**
(2) => **M_{K1} = 2723 -638 = 2085 kg**

4. Ο Πύραυλος Falcon 9 της SpaceX έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:
1ο Στάδιο
Μάζα δομής M_0 = 25600 kg
Μάζα καυσίμου M_K = 395700 kg
Ταχύτητα εξόδου καυσαερίων u = 3000 m/s
Χρόνος καύσης $t_{ολ}$ = 162 s
2ο στάδιο
Μάζα δομής + διαστημόπλοιο M_{01} = 3000 + 3000 = 6000 kg
Μάζα καυσίμου M_{K1} = 92670 kg
Ταχύτητα εξόδου καυσαερίων u_1 = 3500 m/s
Χρόνος καύσης $t_{ολ}$ = 397 kg
Α) Να βρεθεί η επιτάχυνση α και η μεταβολή της ταχύτητας ΔV σε συνάρτηση με το χρόνο από την έναρξη του 1ου σταδίου(t = 0) έως το τέλος του 2ου σταδίου.
Β) Να βρεθεί η επιτάχυνση α στην αρχή και το τέλος κάθε σταδίου.
Γ) Να βρεθεί η συνολική ΔV στο τέλος του 2ου σταδίου.
Σχολιάστε.
Λύση



ΑΔΟ ως προς τον πύραυλο, οπότε η ταχύτητα της Δm είναι V – u όπου u η ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων.

$P_i = P_f$ => $(M + \Delta m)V = \Delta m(V - u) + M(V + \Delta V)$ =>

$MV + \Delta mV = \Delta mV - \Delta mu + MV + M\Delta V$ => $\Delta mu = M\Delta V$ (1)

(1)=> $M\frac{\Delta V}{\Delta t} = u\frac{\Delta m}{\Delta t}$ => $M_f\alpha = u_1\mu$ (2)

Α) Πρώτο στάδιο

$M_i = 25600 + 395700 + 6000 + 92670 = 519970$ kg

Ρυθμός κατανάλωσης καυσίμου $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{395700}{162} = 2442{,}6$ kg/s

$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \mu \Rightarrow \Delta m = \mu\Delta t \Rightarrow -\Delta M = \mu\Delta t \Rightarrow -(M_f - M_i) = \mu(t - 0) \Rightarrow$

$\mathbf{M_f = M_i - \mu t} \Rightarrow$ (3) $M_f = 519970 - 2442{,}6t$ (3)

(2)(3) $\Rightarrow (519970 - 2442{,}6t)\alpha = 3000\chi 2442{,}6 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{3000}{212{,}8756 - t} \quad 0 \le t \le 162}$$

$\Delta V = u_1 \ln\frac{M_i}{M_f} \Rightarrow \Delta V = 3000\ln\frac{519970}{519970 - 2442{,}6t} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\Delta V = 3000\ln\frac{212{,}8756}{212{,}8756 - t} \quad 0 \le t \le 162}$$

Δεύτερο στάδιο

$M_i = 92670 + 6000 = 98670$ kg

$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{92670}{397} = 233{,}4$ kg/s

$M_f = M_i - \mu t \Rightarrow$ (3) $M_f = 98670 - 233{,}4\Delta t = 98670 - 233{,}4(t - 162) =$

$(98670 - 233{,}4(t - 162))\alpha = 3500\chi 233{,}4 \Rightarrow$

$\alpha = \frac{3500}{422,75-t+162}$, 162 ≤ t ≤ 162 + 397 =>

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{3500}{584,75-t} \qquad 162 \leq t \leq 559}$$

$\Delta V = u_2 \ln\frac{M_i}{M_f} \Rightarrow \Delta V = 3500\ln\frac{98670}{98670-233,4(t-162)} = 3500\ln\frac{422,75}{584,75-t} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\Delta V = 3500\ln\frac{422,75}{584,75-t} \quad 162 \leq t \leq 559}$$

B) Πρώτο στάδιο

t =0   α = 14 m/s^2 ΔV = 0

t = 162 s => α = 59 m/s^2 , ΔV = 4294 m/s

Δεύτερο στάδιο

t = 162s α = 6 m/s^2 ΔV = 0

t = 559 s α = 136 m/s^2 ΔV = 9794 m/s

$\Delta V_{ολ}$ = 4294 + 9794 = 14088 m/s

Παρατηρούμε ότι και στα δύο στάδια τόσο η επιτάχυνση όσο και η μεταβολή της ταχύτητας αυξάνονται καθόσον ο παρονομαστής του κλάσματος συνεχώς μειώνεται. Στην τιμή t = 162 s η α πέφτει απότομα από 59 s σε 6 s καθώς η δομή είναι πλήρης σε καύσιμα. Κατά τη διάρκεια όμως του δεύτερου σταδίου που ο πύραυλος έχει απαλλαγεί από το μεγάλο φορτίο του 1^{ου} σταδίου τόσο η επιτάχυνση όσο και η μεταβολή της ταχύτητας αυξάνονται πολύ γρήγορα και καταλήγουν σε υψηλές τιμές.