

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 6 ΣΤΙΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΚΡΟΥΣΗ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ .

- Κρούση και κινήσεις
- Κρούση και ελατήρια
- Κρούση και κυκλική κίνηση
- Ελαστική κρούση και περιοδικά φαινόμενα
- Κρούση και οριζόντια βολή.
- Βλήμα το οποίο διαπερνάει σώμα σε χρόνο $\Delta t = 0$ (ακαριαία) .
- Βλήμα το οποίο διαπερνάει σώμα σε χρόνο $\Delta t \neq 0$.
- Ελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων, όταν στο ένα σώμα ασκείται δύναμη από εμπόδιο.

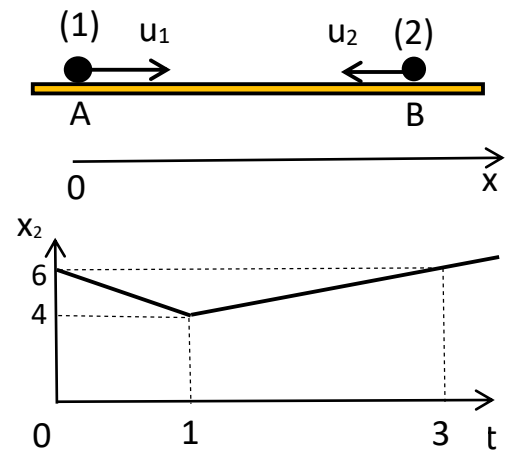
Κρούση και κινήσεις

Παράδειγμα

Οι ισομεγέθεις σφαίρες (1),(2) βρίσκονται πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο στις θέσεις Α, Β. Στις σφαίρες δίνονται ταυτόχρονα οριζόντιες ταχύτητες u_1, u_2 από τη μία προς την άλλη. Η αρχή του οριζόντιου άξονα x είναι το σημείο Α και τα θετικά του, προς τα δεξιά. Η γραφική παράσταση της θέσης της σφαίρας (2) σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται από το διπλανό διάγραμμα. Τη χρονική στιγμή $t = 1\text{s}$ οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Θεωρούμε τις σφαίρες χωρίς διαστάσεις.

Να βρεθούν

- Η ταχύτητες της σφαίρας (2) πριν και μετά την κρούση
- Η ταχύτητα της σφαίρας (1) μετά την κρούση
- Η γραφική παράσταση της ταχύτητας της σφαίρας (1) και η γραφική παράσταση της ταχύτητας της σφαίρας (2) σε συνάρτηση με το χρόνο .
- Η γραφική παράσταση της θέσης της σφαίρας (1) σε συνάρτηση με το χρόνο.



Απάντηση

α) Από το διάγραμμα η ταχύτητα της σφαίρας (2) πριν την κρούση είναι $u_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = = \frac{4-6}{1-0} = -2 \text{ m/s}$ και η

ταχύτητά της μετά την κρούση είναι $u_2' = \frac{\Delta x}{\Delta t} = = \frac{6-4}{3-1} = 1 \text{ m/s}$

Σε χρονικό διάστημα $\Delta t=1\text{s}$ η μετατόπιση της σφαίρας (1) είναι $\Delta x_1 = 4\text{m}$. Άρα η ταχύτητα της σφαίρας (1)

πριν την κρούση είναι $u_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = = \frac{4}{1-0} = 4 \text{ m/s}$.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση της ταχύτητας της Κ.Ε.Κ. για τη σφαίρα (2)

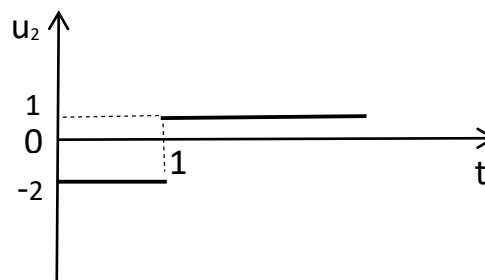
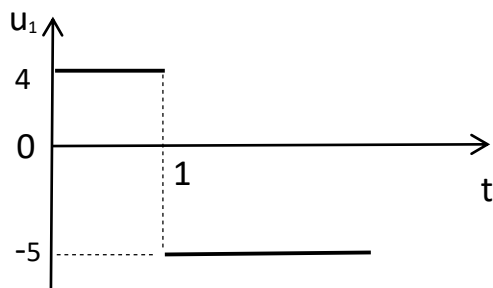
$$\text{και } u_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow 1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} (-2) + \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} 4 \Rightarrow m_1 + m_2 = (m_2 - m_1) (-2) + 8m_1$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 = -2m_2 + 2m_1 + 8m_1 \Rightarrow 3m_2 = 9m_1 \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

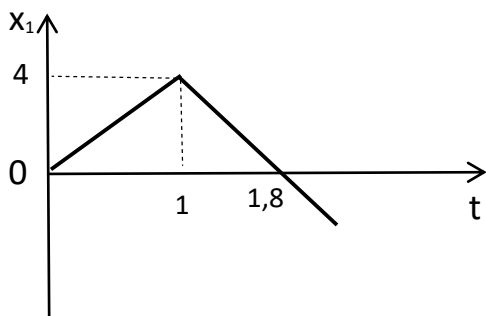
β) Εφαρμόζουμε την εξίσωση της ταχύτητας της Κ.Ε.Κ. για τη σφαίρα (1)

$$\text{και } u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} u_2 \Rightarrow u_1' = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + 3m_1} 4 + \frac{6 \cdot m_1}{m_1 + 3m_1} (-2) \Rightarrow u_1' = -2 - 3 = -5 \text{ m/s}$$

γ)

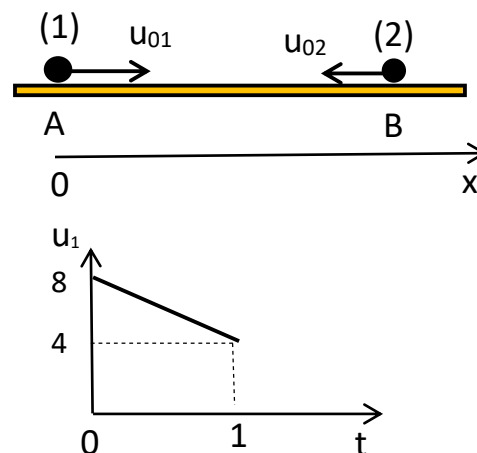


δ)



Εφαρμογή

Οι ισομεγέθεις σφαίρες (1),(2) βρίσκονται πάνω στο μη λείο οριζόντιο επίπεδο στις θέσεις Α,Β. Στις σφαίρες δίνονται ταυτόχρονα οριζόντιες ταχύτητες u_{01}, u_{02} από τη μία προς την άλλη. Η αρχή του οριζοντίου άξονα x είναι το σημείο Α τα δεξιά και τα θετικά του προς τα δεξιά. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας της σφαίρας (1) σε συνάρτηση με το χρόνο μέχρι $t=1\text{s}$ δίνεται από το διπλανό διάγραμμα. Τη χρονική στιγμή $t=1\text{s}$ οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα της



σφαίρας (2) είναι $u_2' = 1 \text{ m/s}$. Οι σφαίρες έχουν τον ίδιο συντελεστή τριβής με το επίπεδο.. Δίνεται $AB=10\text{m}$ Θεωρούμε τις σφαίρες χωρίς διαστάσεις.

Να βρεθούν

- α) Η σχέση μεταξύ των μαζών των σφαιρών
- β) Η ταχύτητα της σφαίρας (1) αμέσως μετά την κρούση
- γ) Η γραφική παράσταση της ταχύτητας της σφαίρας (1) και η γραφική παράσταση της ταχύτητας της σφαίρας (2) σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι να ακινητοποιηθούν.
- δ) Η γραφική παράσταση της θέσης της σφαίρας (1) και η γραφική παράσταση της θέσης της σφαίρας (2) σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι να ακινητοποιηθούν.

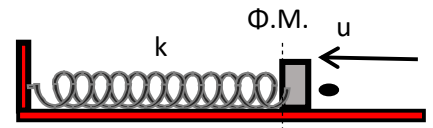
- Κρούση και ελατήρια

Παράδειγμα (Δ)

Το σώμα μάζας $M=0,95\text{Kg}$ είναι ακίνητο πάνω στο οριζόντιο επίπεδο και συνδέεται με τα δεξιά άκρο του ελατηρίου. Το αριστερό άκρο του ελατηρίου συνδέεται σε σταθερό σημείο. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Το βλήμα μάζας $m=0,05\text{ Kg}$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u=200\text{m/s}$, σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος – επιπέδου είναι $\mu=1$ και η σταθερά του ελατηρίου είναι $k=80\text{ N/m}$ Θεωρούμε τα σώματα χωρίς διαστάσεις.

Να βρεθούν

- α) Η συσπίρωση του ελατηρίου όταν η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενιστεί για πρώτη φορά.
- β) Η θέση που θα ακινητοποιηθεί το συσσωμάτωμα.
- γ) Το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα από τη στιγμή που σφηνώνεται το βλήμα στο σώμα μέχρι να ακινητοποιηθεί το συσσωμάτωμα.

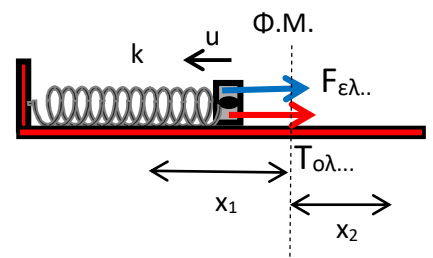


Απάντηση

- α) Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ κατά την πλαστική κρούση.

$$mu = (m+M) u_{\text{κοινό}} \Rightarrow u_{\text{κοινό}} = 10 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση του Φ.Μ, του ελατηρίου μέχρι τη θέση x_1 όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του συσσωματώματος για πρώτη φορά.



$$K_{\text{τελική}} - K_{\text{αρχική}} = W_{\text{Fελ.}} + W_{\text{Τολ.}} \Rightarrow$$



$$0 - \frac{1}{2} (m + M) u_{\text{κοινό}}^2 = \frac{1}{2} k \Delta l_{\text{αρχική}}^2 - \frac{1}{2} k \Delta l_{\text{τελική}}^2 - T_{\text{ολ.}} x_1$$

$$\Rightarrow -50 = 0 - 40x_1^2 - 10x_1 = 0 \Rightarrow 4x_1^2 + x_1 - 5 = 0 \Rightarrow$$

Αποδεκτή λύση $x_1 = 1\text{m}$

β) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση x_1 όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του συσσωματώματος για πρώτη φορά μέχρι τη θέση x_2 όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του συσσωματώματος για δεύτερη φορά.

$$0 - 0 = \frac{1}{2} k \Delta l_{\text{αρχική}}^2 - \frac{1}{2} k \Delta l_{\text{τελική}}^2 - T_{\text{ολ.}} (x_1 + x_2) \Rightarrow 0 = 40x_1^2 - 40x_2^2 - 10(x_1 + x_2) \Rightarrow$$

$$4(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 \Rightarrow 4(x_1 - x_2) = 1 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0,25 \Rightarrow x_2 = x_1 - 0,25 = 1 - 0,25 = 0,75\text{m}$$

Και από τη θέση x_2 όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του συσσωματώματος δεύτερη φορά μέχρι τη θέση x_3 όπου μηδενίζεται ταχύτητά του για τρίτη φορά. $x_3 = x_2 - 0,25 = x_1 - 2 \cdot 0,25 = 1 - 2 \cdot 0,25 = 0,5\text{m}$

Η θέση όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του συσσωματώματος νιοστή φορά είναι

$$x_v = x_1 - (v-1) \cdot 0,25 = 1 - (v-1) \cdot 0,25$$

$$\text{Για να ακινητοποιηθεί το συσσωμάτωμα θα πρέπει } T_{\text{στατική(max)}} \geq F_{\text{ελ}} \Rightarrow 10 \geq 80 x_v \Rightarrow$$

$$10 \geq 80 [1 - (v-1) \cdot 0,25] \Rightarrow 1 \geq 8 - 8(v-1) \cdot 0,25 \Rightarrow v \geq 4,5 \text{ Δηλαδή } v=5 \text{ και } x_5 = x_1 - (5-1) \cdot 0,25 = 0$$

Το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στη θέση του Φ.Μ. του ελατηρίου.

$$\gamma) \text{ Το διάστημα είναι } S = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 + 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 = 4\text{m}$$

Εφαρμογή (Δ)

Το σώμα (1) μάζας $M=1\text{Kg}$ είναι ακίνητο πάνω στο οριζόντιο επίπεδο και συνδέεται με τα δεξιά άκρο του ελατηρίου. Το αριστερό άκρο του ελατηρίου συνδέεται σε σταθερό σημείο. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Το οριζόντιο επίπεδο αριστερά από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου έχει τριβές με το σώμα M και δεξιά είναι λείο.

Το σώμα (2) μάζας $m=0,5\text{ Kg}$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u=15\text{m/s}$ κινείται προς τα αριστερά και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα (1). Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος – επιπέδου είναι $\mu=1$ και η σταθερά του ελατηρίου είναι $k=80\text{ N/m}$

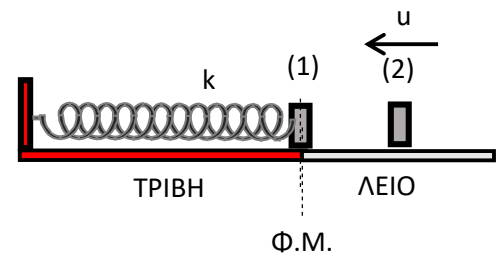
Θεωρούμε τα σώματα χωρίς διαστάσεις.

Να βρεθούν

α) Η συσπείρωση του ελατηρίου όταν η ταχύτητα του σώματος (1) μηδενιστεί για πρώτη φορά.

β) Η θέση στην οποία θα ακινητοποιηθεί το σώμα (1)

γ) Το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα στο επίπεδο με τριβή, από τη στιγμή της κρούσης μέχρι να



ακινητοποιηθεί το σώμα (1) .

- Κρούση και κυκλική κίνηση

Παράδειγμα 1

Πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ακίνητη η μικρή σφαίρα (2) στο σημείο Β. Η ίδια σφαίρα (1) κρατιέται ακίνητη και συνδεδεμένη με το άκρο οριζόντιου, αβαρούς, μη ελαστικού, τεντωμένου νήματος ΟΑ μήκους $R=0,8\text{m}$ του οποίου το άλλο άκρο συνδέεται με σταθερό σημείο στο Ο. Το σημείο Ο βρίσκεται σε ύψος $h=0,8\text{m}$ από το οριζόντιο επίπεδο. Αφήνουμε τη σφαίρα (1) και δίνουμε οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_2 στη σφαίρα (2) τις κατάλληλες χρονικές στιγμές, ώστε να συναντηθούν. Όταν συναντώνται οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Το συσσωμάτωμα εκτελεί κυκλική κίνηση και ταχύτητά μηδενίζεται σε ύψος $h=0,8\text{m}$. Η μάζα κάθε σφαίρας είναι $m=0,1\text{Kg}$. Θεωρούμε τις σφαίρες σημειακές. Να βρείτε

- Τη γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας (1) λίγο πριν συναντήσει τη σφαίρα (2)
- Το μέτρο της ταχύτητας u_2 .
- Τη θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση.
- Την τάση του νήματος λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση.

Απάντηση

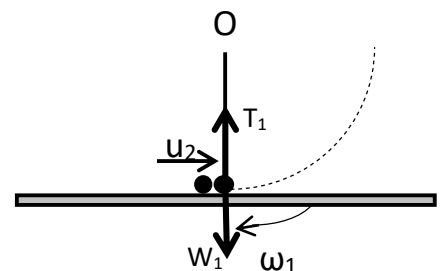
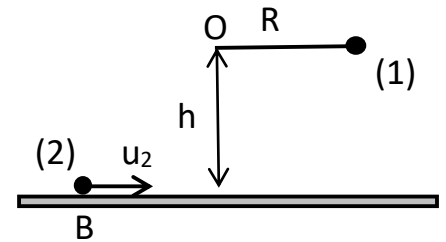
- α) Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας (1) λίγο πριν την κρούση βρίσκεται από την ΑΔΜΕ .

$$mgh = \frac{1}{2} m u_1^2 \Rightarrow u_1^2 = 2gh \Rightarrow u_1^2 = 16 \Rightarrow u_1 = 4\text{m/s}$$

$$\text{και από τη σχέση } u_1 = \omega_1 R \Rightarrow 4 = \omega_1 0,8 \Rightarrow \omega_1 = 5\text{rad/s.}$$

- β) Επειδή η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενίζεται σε ύψος $h=0,8\text{m}$, με βάση την ΑΔΜΕ το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $u_k = 4\text{m/s}$.

Έστω ότι η κατεύθυνση της u_k είναι προς τα αριστερά. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ πριν και μετά την κρούση. Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.



$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow m_2 u_2 - m_1 u_1 = - (m_1 + m_2) u_{\kappa} \Rightarrow 0,1 u_2 - 0,1 \cdot 4 = - 0,2 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$u_2 = -4\text{m/s} . \text{ Άτοπο γιατί } u_2 > 0.$$

Άρα η κατεύθυνση της ταχύτητας u_{κ} είναι προς τα δεξιά. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow m_2 u_2 - m_1 u_1 = (m_1 + m_2) u_{\kappa} \Rightarrow 0,1 u_2 - 0,1 \cdot 4 = 0,2 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$u_2 = 12\text{m/s} .$$

$$\gamma) Q = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 \Rightarrow Q = 5,6\text{J}$$

δ) Η συνισταμένη δύναμη ισούται με την κεντρομόλο δύναμη.

$$\text{Πριν την κρούση στη σφαίρα (1) : } T_1 - w = m_1 \omega_1^2 R \Rightarrow T_1 = 0,1 \cdot 4^2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow T_1 = 2,6\text{N}$$

$$\text{Μετά την κρούση : } T_{\kappa} - (w_1 + w_2) = (m_1 + m_2) \omega_{\kappa}^2 R \Rightarrow T_{\kappa} = 0,2 \cdot 4^2 \cdot 1 + 2 \Rightarrow T_{\kappa} = 5,2\text{N}$$

Εφαρμογή 1

Ημικυκλική στεφάνη AB , ακτίνας $R=0,8\text{m}$, με λεία εσωτερική επιφάνεια είναι στερεωμένη σε κατακόρυφο επίπεδο. Σε δύο ισομεγέθεις μικρές σφαίρες (1),(2) δίνουμε ταυτόχρονα από τα σημεία A,B, ίσες ταχύτητες μέτρου u_0 , προς τα κάτω. Οι σφαίρες συναντώνται στο κατώτερο σημείο της στεφάνης με ίδια μέτρα ταχυτήτων και συγκρούονται πλαστικά. Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα εκτελεί κυκλική κίνηση και η ταχύτητά του μηδενίζεται σε ύψος $h=0,8\text{m}$. Δίνονται $m_1=0,1\text{Kg}$, $m_2=0,3\text{Kg}$.

Θεωρούμε τις σφαίρες σημειακές .

Να βρείτε

α) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

(Απ. $\omega_{\kappa} = 5\text{rad/s}$)

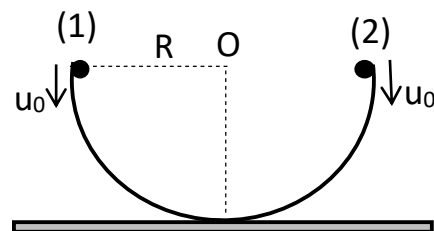
β) Τα μέτρα της γωνιακών ταχυτήτων των σφαιρών λίγο πριν την κρούση.

(Απ. $\omega_1 = 10\text{rad/s}$, $\omega_2 = 10\text{rad/s}$)

γ) Το μέτρο της ταχύτητας u_0 (Απ. $u_0 = 4\sqrt{3} \text{ m/s}$)

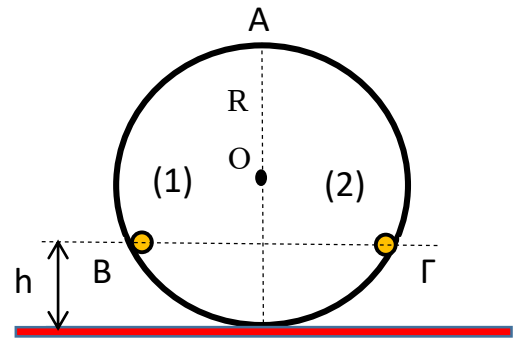
δ) Τη θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση. (Απ. $Q = 9,6\text{J}$)

ε) Η δύναμη που ασκείται από τη στεφάνη σε κάθε σώμα πριν την κρούση και στο συσσωμάτωμα μετά την κρούση. (Απ. $N_1 = 9\text{N}$, $N_2 = 27\text{N}$, $N_{\kappa} = 12\text{N}$)



Παράδειγμα 2 (Δ)

Η στεφάνη είναι λεία στο εσωτερικό της, βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο και είναι στερεωμένη σε οριζόντιο επίπεδο. Η ακτίνα της στεφάνης είναι R . Αφήνουμε ταυτόχρονα δύο ίδιου μεγέθους, μικρές σφαίρες από τα σημεία Β, Γ που βρίσκονται στο εσωτερικό της στεφάνης και σε ύψος h . Οι μάζες των σφαιρών (1), (2) είναι m , $3m$ αντίστοιχα. Οι σφαίρες συναντώνται πρώτη φορά στο κατώτερο σημείο της στεφάνης. Όταν συναντώνται οι σφαίρες οι κρούσεις τους είναι κεντρικές-ελαστικές και η σφαίρα (1) μετά την πρώτη κρούση διέρχεται από το ανώτερο σημείο της στεφάνης Α. Το ελάχιστο ύψος h για να επαναλαμβάνονται οι κρούσεις των σφαιρών είναι.



α) $h_{\min} = R/2$ β) $h_{\min} = 5R/8$

Β Το φαινόμενο είναι

α) Περιοδικό β) Μη περιοδικό

Απάντηση

Α. Βρίσκουμε τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων στο κατώτερο σημείο της στεφάνης

πριν την κρούση. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ

για τα σώματα από το h μέχρι το κατώτερο σημείο.

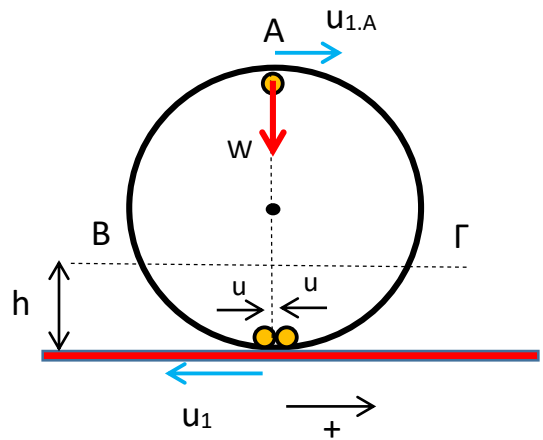
$$mgh = \frac{1}{2} m u^2 \Rightarrow u = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Οι ταχύτητες των σωμάτων είναι αντίθετες και τα μέτρα τους είναι u .

Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων μετά την κρούση είναι u_1, u_2 . Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά. Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις της κεντρικής – ελαστικής κρούσης.

$$u_1 = \frac{m-3m}{m+3m} u + \frac{2 \cdot 3m}{m+3m} (-u) = -2u \quad \text{και} \quad u_2 = \frac{3m-m}{m+3m} (-u) + \frac{2 \cdot m}{m+3m} u = 0$$

Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας (1) όταν διέρχεται από το ανώτερο σημείο της στεφάνης Α βρίσκεται με εφαρμογή της ΑΔΜΕ από το κατώτερο μέχρι το ανώτερο σημείο. Το μέτρο της ταχύτητας όταν διέρχεται από το σημείο Α είναι $u_{1,A}$.



$$8gh = u_{1A}^2 + 4gR \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) για να είναι το h ελάχιστο θα πρέπει το μέτρο $u_{1,A}$ να είναι ελάχιστο. Το μέτρο $u_{1,A}$ είναι ελάχιστο όταν η δύναμη επαφής στο σημείο A είναι μηδέν, δηλαδή για να περάσει η σφαίρα από το ανώτερο σημείο (ανακύκλωση) με την ελάχιστη ταχύτητα, μόνο η δύναμη του βάρους παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Εφαρμόζουμε την εξίσωση της κεντρομόλου στο σημείο A.

$$mg = m \frac{u_{1.A(\min)}^2}{R} \Rightarrow u_{1.A(\min)}^2 = gR \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2),(3) $\Rightarrow 8gh_{\min} = gR + 4gR \Rightarrow 8h_{\min} = 5R \Rightarrow h_{\min} = 5R/8$ (Το β)

Β. Μετά το πέρασμα της σφαίρας από το σημείο Α, η σφαίρα φτάνει στο κατώτερο σημείο της στεφάνης με ταχύτητα μέτρου $2u$, συγκρούεται με τη σφαίρα 3m κεντρικά-ελαστικά και οι σφαίρες αποκτούν αντίθετες ταχύτητες μέτρων u και ανεβαίνουν μέχρι το $h_{\min}$. Στη συνέχεια το φαινόμενο επαναλαμβάνεται ακριβώς το ίδιο. Άρα είναι περιοδικό φαινόμενο . το α)

Εφαρμογή 2 (Δ)

Οι ισομεγέθεις μικρές σφαίρες (1),(2) έχουν

μάζες $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, συνδέονται με τα άκρα των νημάτων O_1A , O_2B και μπορούν να περιστρέφονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο γύρω από τα ακλόνητα άκρα των νημάτων O_1 , O_2 , που αποτελούν τα κέντρα των κύκλων. Στα σημεία A, B των κύκλων δίνουμε στα σώματα ταυτόχρονα ταχύτητες μέτρων u_1, u_2 αντίστοιχα, κάθετα στις ακτίνες των κύκλων. Τα σώματα αφού

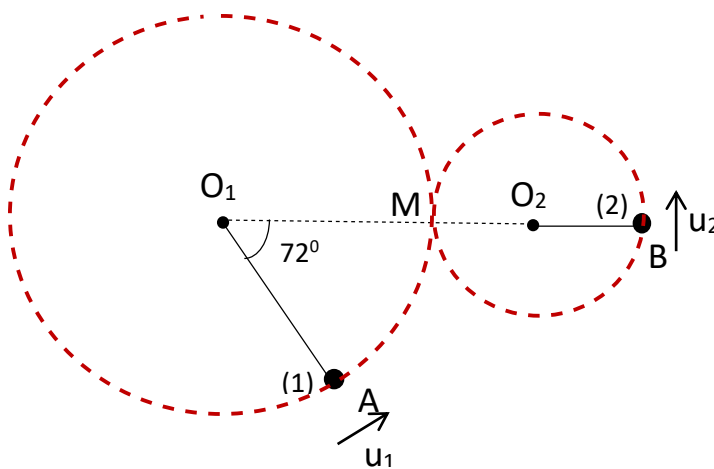
διανύσουν τα τόξα AM και BM αντίστοιχα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά στο σημείο M, που είναι το κοινό σημείο των κύκλων. Τα τόξα AM αντιστοιχεί σε γωνία 72^0 , το τόξο BM αντιστοιχεί σε γωνία 180^0 και $O_1B = 0,4 O_2A$

A. Η σχέση μεταξύ των αλγεβρικών τιμών των ταχυτήτων των σωμάτων μετά την πρώτη κρούση είναι:

$$\alpha) u'_1 = -5 u'_2 \quad \beta) \quad u'_1 = -3 u'_2$$

B . Από την πρώτη κρούση μέχρι τη δεύτερη κρούση η σφαίρα η σφαίρα (1)

α) κάνει μία περιστροφή β) κάνει δύο περιστροφές



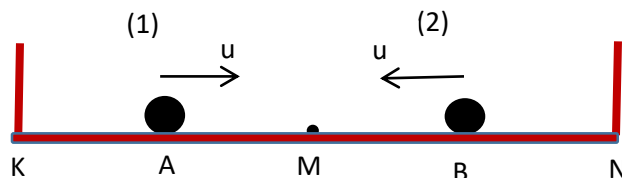
Γ. Η σχέση μεταξύ των αλγεβρικών τιμών των ταχυτήτων των σωμάτων μετά τη δεύτερη κρούση είναι:

α) $u''_1 = -u''_2$ β) $u''_1 = -2u''_2$

- Ελαστική κρούση και περιοδικά φαινόμενα

Παράδειγμα

Οι δύο ισομεγέθεις σφαίρες 1,2 με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 3m$ τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκονται στις θέσεις Α,Β και έχουν αντίθετες ταχύτητες μέτρου u . Τα σημεία Α,Β είναι τα μέσα των μηκών ΚΜ,ΜΝ και το σημείο Μ είναι το μέσο του ΚΝ. Το οριζόντιο επίπεδο ΚΛ είναι λείο και στις θέσεις Κ,Λ υπάρχουν κατακόρυφα ελαστικά τοιχώματα.



Τα σώματα συγκρούονται μεταξύ τους κεντρικά και ελαστικά και με τα τοιχώματα κάνουν ελαστική κρούση. Ισχύει $KM=MN = d$.

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

B1. Τα σώματα συγκρούονται μεταξύ τους για δεύτερη φορά:

- α) Αριστερά από το σημείο Μ β) Δεξιά από το σημείο Μ γ) Στο σημείο Μ

B2. Το χρονικό διάστημα από την πρώτη κρούση μεταξύ των σωμάτων μέχρι τη δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι Δt_1 και το χρονικό διάστημα από την δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων μέχρι τη τρίτη κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι Δt_2 . Η σχέση μεταξύ των Δt_1 , Δt_2 είναι :

- α) $\Delta t_1 = \Delta t_2$ β) $\Delta t_1 = 2 \Delta t_2$ γ) $2 \Delta t_1 = \Delta t_2$

B3. Η περίοδος του περιοδικού φαινομένου είναι:

- α) $T = 2 \frac{d}{u}$ β) $T = 3 \frac{d}{u}$ γ) $T = 4 \frac{d}{u}$

Απάντηση

B1.

Επειδή $AM=MB$ και οι ταχύτητες των σφαιρών έχουν το ίδιο μέτρο, η πρώτη κρούση τους γίνεται στο σημείο Μ. Μετά την πρώτη κρούση λόγω των μαζών τους m - $3m$ και αντιθέτων ταχυτήτων τους πριν την

κρούση, τα μέτρα των ταχυτήτων τους είναι $u_1' = 2u$ και $u_2' = 0$.

Στη συνέχεια η σφαίρα (1) ανακλάται στο τοίχιο αριστερά και συγκρούεται για δεύτερη φορά με την ακίνητη σφαίρα (2) στο σημείο M.

Σωστό το γ

B2.

Μετά την δεύτερη κρούση οι ταχύτητες των σφαιρών είναι πάλι αντίθετες με ίδιο μέτρο u .

Το χρονικό διάστημα από την πρώτη κρούση μεταξύ των σωμάτων μέχρι τη δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι $\Delta t_1 = 2KM/2u = KM/u$ και το χρονικό διάστημα από την δεύτερη κρούση μέχρι την τρίτη κρούση τους είναι $\Delta t_2 = 2KM/u$. Άρα $\Delta t_2 = 2\Delta t_1$. Σωστό το γ

B3.

Η περίοδος είναι $T = \Delta t_1 + \Delta t_2 = KM/u + 2KM/u = 3KM/u = 3d/u$ Σωστό το β

Εφαρμογή (Δ)

Γ. Στο κατώτερο σημείο του λείου πλάγιου

επιπέδου κλίσης $\theta = 30^\circ$ υπάρχει

ελαστικό τοίχωμα, κάθετο στο πλάγιο

επίπεδο. Τη στιγμή $t=0$ δίνουμε αρχική

ταχύτητα u_0 στη μικρή σφαίρα (1) και

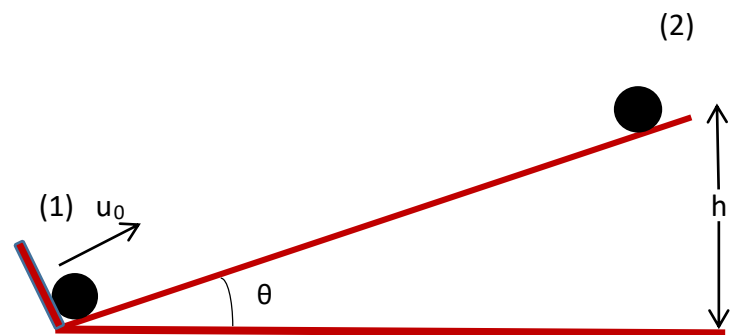
ταυτόχρονα αφήνουμε μια ίδια σφαίρα

(2) από ύψος h . Οι κρούσεις μεταξύ των

σωμάτων είναι κεντρικές-ελαστικές και μεταξύ του τοιχώματος και του σώματος (1) είναι ελαστικές.

Ισχύει $u_0^2 = 2gh$ όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας



Γ1) Από $t=0$ μέχρι την πρώτη κρούση μεταξύ των σωμάτων τα μέτρα των μετατοπίσεων είναι $|\Delta x_1|$ της σφαίρας (1) και $|\Delta x_2|$ της σφαίρας (2). Η σχέση μεταξύ τους είναι.

α) $|\Delta x_1| = |\Delta x_2|$

β) $|\Delta x_1| = 3|\Delta x_2|$

Γ2) Η χρονική στιγμή t_1 της πρώτης κρούσης μεταξύ των σφαιρών είναι:

$$t_1 = \frac{u_0}{g}$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \frac{u_0}{g}$$

$$t_1 = \frac{3}{4} \frac{u_0}{g}$$

Γ3) Η χρονική στιγμή t_2 της πρώτης κρούσης της σφαίρας (1) με το ελαστικό τοίχωμα είναι:

α) $t_2 = 2 \frac{u_0}{g}$

β) $t_2 = \frac{u_0}{g}$

γ) $t_2 = \frac{3}{2} \frac{u_0}{g}$

Γ4) Η χρονική στιγμή t_3 της 10^{ης} κρούσης μεταξύ των σφαιρών είναι:

α) $t_3 = 20 \frac{u_0}{g}$

β) $t_3 = 19 \frac{u_0}{g}$

γ) $t_3 = 21 \frac{u_0}{g}$

- Κρούση και οριζόντια βολή.

Παράδειγμα (Δ)

Τα σώματα (1) και (2) έχουν ίσες μάζες $m = 1 \text{ Kg}$ και αποτελούνται από το ίδιο υλικό. Το σώμα (2) ισορροπεί στη θέση Α του πλάγιου επιπέδου ΑΒ με γωνία κλίσης $\theta = 30^\circ$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα (1) βάλλεται οριζόντια, με αρχική ταχύτητα u_0 από το σημείο Ο. Το σώμα (1) συγκρούεται πλαστικά με το σώμα (2) τη χρονική στιγμή t_1 με ταχύτητα u_1 η οποία είναι παράλληλη στο πλάγιο επίπεδο. Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα ολισθαίνει στο πλάγιο επίπεδο και τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,8 \text{ s}$

βρίσκεται στο σημείο Β. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου είναι $\mu = \sqrt{3}/3$ και η υψομετρική διαφορά μεταξύ των σημείων Α, Β είναι $h = 0,8 \text{ m}$. Θεωρούμε ότι τα σώματα είναι σημειακά.

Να βρείτε:

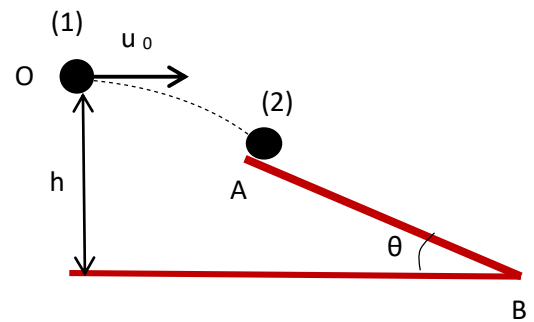
α) Τη χρονική στιγμή της κρούσης.

β) Το ύψος h του σημείου Ο

γ) Τη θερμότητα που εκλύεται από $t = 0$ μέχρι το συσσωμάτωμα να φτάσει στο σημείο Β

δ) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος (1) τη χρονική στιγμή $t = 0,2 \text{ s}$

και το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος (1) τη χρονική στιγμή $t = 0,5 \text{ s}$.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Στο σημείο A πριν την κρούση:

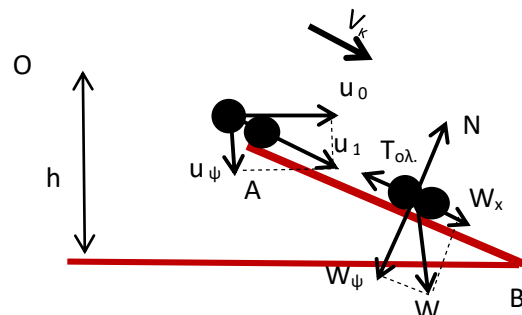
$$u_\psi = gt_1, \quad \eta\mu 30^\circ = u_\psi / u_1 \Rightarrow$$

$$u_1 = 2gt_1$$

ΑΔΟ κατά την πλαστική κρούση:

$$mu_1 = 2mV_K \Rightarrow V_K = u_1/2 \Rightarrow$$

$$V_K = gt_1$$



Β Νόμος του Νεύτωνα κατά την κίνηση από το A στο B:

$$\Sigma F_x = 2m\alpha \Rightarrow W_x - T_{ολ.} = 2m\alpha \Rightarrow 2mg\eta\mu 30^\circ - \mu 2mg\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 2m\alpha \Rightarrow$$

$$2mg\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} 2mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 2m\alpha \Rightarrow \alpha = 0. \text{ Από το A μέχρι το B το συσσωμάτωμα κάνει ΕΟΚ με } V_K = gt_1 \quad (1)$$

$$\text{Από την υψομετρική διαφορά των A,B: } \eta\mu 30^\circ = \frac{h}{AB} \Rightarrow AB = 1,6\text{m} \quad (2)$$

Η μετατόπιση AB λόγω της ΕΟΚ είναι: $AB = V_K(t_2 - t_1)$ και με τις (1), (2) γίνεται

$$1,6 = V_K(0,8 - V_K/10) \Rightarrow 16 = 8V_K - V_K^2 \Rightarrow V_K^2 - 8V_K + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (V_K - 4)^2 = 0 \Rightarrow V_K = 4 \text{ m/s και λόγω της (1) } t_1 = V_K/g = 4/10 \Rightarrow t_1 = 0,4\text{s}$$

β) Η κατακόρυφη μετατόπιση του (1) τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4\text{s}$ είναι

$$\psi_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow \psi_1 = \frac{1}{2} 10 \cdot 0,4^2 \Rightarrow \psi_1 = 0,8 \text{ m Άρα } h = 0,8 + 0,8 = 1,6\text{m}$$

$$\gamma) Q = Q_{(\kappa\rho\upsilon\sigma\eta\varsigma)} + Q_{(\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma)} = \frac{1}{2} mu_1^2 - \frac{1}{2} 2mV_K^2 + |T_{ολ.} AB| \Rightarrow Q = 32\text{J}$$

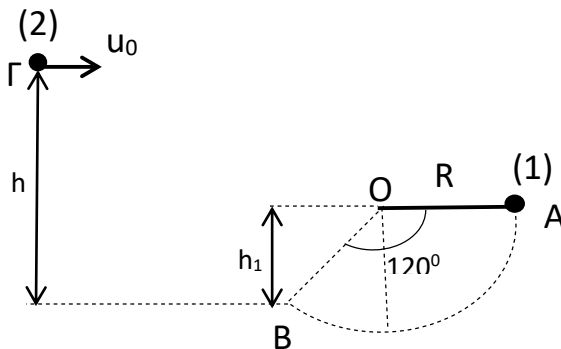
$$\delta) \text{ Τη χρονική στιγμή } t = 0,2\text{s} \quad \frac{dK}{dt} = W \cdot u_\psi = mggt \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 20 \text{ J/s}$$

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t = 0,5\text{s: } \frac{dU}{dt} = -W \cdot V_{K,\psi} = -mgV_K \sigma\upsilon\nu 60^\circ \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -20 \text{ J/s}$$

Εφαρμογή (Δ)

Η σφαίρα (1) κρατιέται ακίνητη και συνδεδεμένη με το άκρο οριζόντιου, αβαρούς, μη ελαστικού τεντωμένου νήματος ΟΑ μήκους R του οποίου το άλλο άκρο συνδέεται με σταθερό σημείο στο Ο. Το τόξο AB αντιστοιχεί σε γωνία 120° . Η διαφορά ύψους μεταξύ των σημείων A,B είναι $h_1 = 1,6 \text{ m}$ και μεταξύ των σημείων B,Γ είναι h. Αφήνουμε το σώμα (1) και δίνουμε οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_0 στο σώμα (2)

από το σημείο Γ, τις κατάλληλες στιγμές ώστε να συναντηθούν στο σημείο B, με τις ταχύτητές τους



αντίρροπες. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, το σώμα (1) εκτελεί κυκλική κίνηση ακολουθώντας την προηγούμενη τροχιά της κυκλικής κίνησής και η ταχύτητά του μηδενίζεται στο σημείο Α..

Δίνονται $m_1 = 0,2\text{Kg}$, $m_2 = 0,1\text{Kg}$.

Να βρείτε.

α) Το χρονικό διάστημα της οριζόντιας βολής από το σημείο Γ μέχρι τη στιγμή της κρούσης ($\Delta t = 0,6\text{s}$)

β) Το ύψος h ($h = 2,6\text{m}$)

γ) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας (2) $0,4\text{s}$ μετά τη στιγμή της εκτόξευσής της

$$\left(\frac{dK}{dt} = 4 \text{ J/s}\right)$$

- Βλήμα το οποίο διαπερνάει σώμα σε χρόνο $\Delta t = 0$ (ακαριαία).

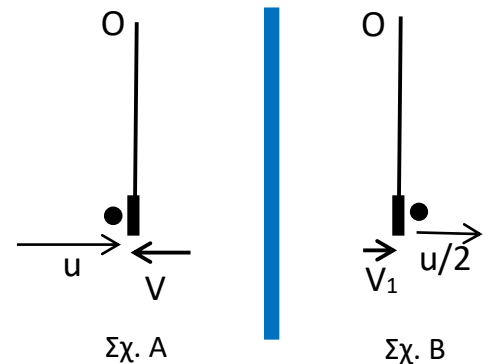
Παράδειγμα

Στο σχήμα Α το μικρό πλακίδιο μάζας $M = 1 \text{ Kg}$ συνδέεται με το άκρο του κατακόρυφου, μη ελαστικού νήματος μήκους $d = 0,4\text{m}$ και έχει οριζόντια ταχύτητα μέτρου $V = 2\text{m/s}$ προς τα αριστερά. Το άλλο άκρο του νήματος συνδέεται με σταθερό σημείο στο Ο. Το βλήμα μάζας $m = 0,2 \text{ Kg}$ και οριζόντιας ταχύτητας μέτρου u προς τα δεξιά, διαπερνάει ακαριαία το πλακίδιο. Αμέσως μετά την έξοδό του βλήματος από το πλακίδιο, το βλήμα έχει οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u/2$ και το πλακίδιο κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου V_1 . (Σχήμα Β) Θεωρούμε ότι οι διαστάσεις του πλακιδίου είναι αμελητέες.

Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας u σε δύο περιπτώσεις

α) Όταν μηδενίζεται η ταχύτητα του πλακιδίου στη θέση που το νήμα σχηματίζει γωνία θ (με $\sin\theta = 0,6$), με την κατακόρυφη θέση του στο σχήμα Α.

β) Όταν το πλακίδιο κάνει ανακύκλωση περνώντας από το ανώτερο σημείο της τροχιάς του, με την ελάχιστη ταχύτητα



Απάντηση

α) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για το Μ από τη στιγμή αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος από το πλακίδιο, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του Μ.

$$\frac{1}{2} M V_1^2 = Mgh \Rightarrow V_1^2 = 2 g h \quad (1)$$

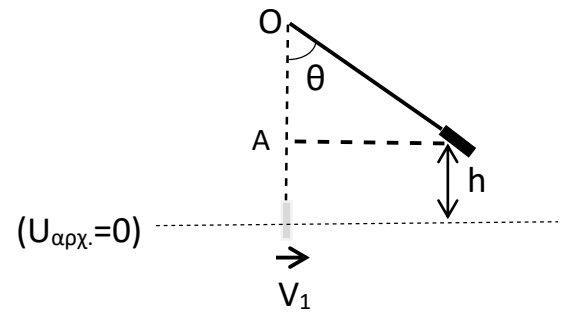
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $OA = d \sin \theta = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3m$

και $h = d - OA = 0,2m$. (2)

Από τις (1),(2) $\Rightarrow V_1^2 = 2 g h = 4 \Rightarrow V_1 = 2m/s$ (3)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το βλήμα – πλακίδιο, στο χρονικό διάστημα που το βλήμα διαπερνάει το πλακίδιο.

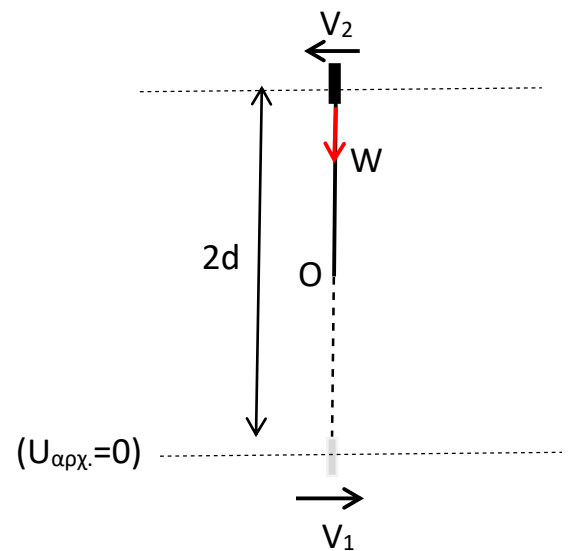
$mu - MV = mu/2 + MV_1 \Rightarrow mu/2 = MV + MV_1$ και λόγω της (3) $0,1 u = 4 \Rightarrow u = 40 m/s$



β) Για να κάνει ανακύκλωση το πλακίδιο περνώντας από ανώτερο σημείο της τροχιάς του με την ελάχιστη ταχύτητα, θα πρέπει στο ανώτερο σημείο η τάση του νήματος στο πλακίδιο να είναι μηδέν. Στο σημείο αυτό η δύναμη του βάρους ισούται την κεντρομόλο δύναμη.

$$Mg = M \frac{V_2^2}{d} \Rightarrow V_2^2 = g d \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για το Μ από τη στιγμή αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος από το πλακίδιο, μέχρι το ανώτερο σημείο της τροχιάς.



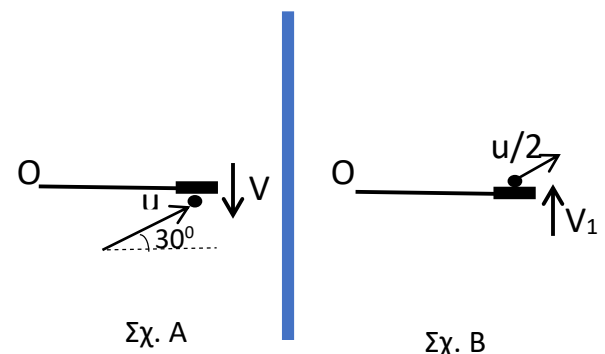
$$\frac{1}{2} M V_1^2 = Mg2d + \frac{1}{2} M V_2^2 \Rightarrow V_1^2 = 4gd + V_2^2 \text{ και λόγω της (1) } V_1^2 = 5gd \Rightarrow V_1 = 5m/s \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το βλήμα – πλακίδιο, στο χρονικό διάστημα που το βλήμα διαπερνάει το πλακίδιο.

$mu - MV = mu/2 + MV_1 \Rightarrow mu/2 = MV + MV_1$ και λόγω της (3) $0,1 u = 7 \Rightarrow u = 70 m/s$

Εφαρμογή

Στο σχήμα Α το μικρό πλακίδιο μάζας $M=1 \text{ Kg}$ συνδέεται με το άκρο του οριζώντιου, μη ελαστικού νήματος μήκους $d=0,4m$ και έχει κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $V=4m/s$ προς τα κάτω. Το άλλο άκρο του νήματος συνδέεται με σταθερό σημείο στο Ο. Το βλήμα μάζας $m=0,2 \text{ Kg}$ και ταχύτητας μέτρου u η οποία σχηματίζει γωνία 30° με το πλακίδιο, διαπερνάει ακαριαία το



πλακίδιο χωρίς να αλλάξει διεύθυνση. Αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος από το πλακίδιο, το βλήμα έχει ταχύτητα μέτρου $u/2$ και το πλακίδιο κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου V_1 . (Σχήμα Β) Το πλακίδιο κάνει ανακύκλωση περνώντας από το ανώτερο σημείο της τροχιάς του, με την ελάχιστη ταχύτητα. Θεωρούμε ότι οι διαστάσεις του πλακιδίου είναι αμελητέες.

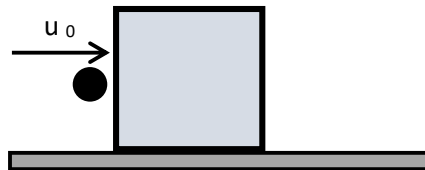
Να βρεθούν

- α) το μέτρο της ταχύτητας V_1
- β) το μέτρο της ταχύτητας u

- Βλήμα το οποίο διαπερνάει σώμα σε χρόνο $\Delta t \neq 0$.

Παράδειγμα (Δ)

Ομογενές σώμα μάζας $M=4,5\text{Kg}$ είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα έχει σχήμα κύβου πλευράς $a=0,2\text{m}$. Βλήμα όλμου μάζας $m=0,5\text{m}$ και οριζόντιας ταχύτητας μέτρου $u_0=50\text{m/s}$ διαπερνάει οριζόντια το σώμα και βγαίνει από αυτό με ταχύτητα μέτρου u , σε χρονικό διάστημα $t_1 = 6 \cdot 10^{-3}\text{s}$.



Θεωρούμε το βλήμα χωρίς διαστάσεις και το μέτρο της δύναμης μεταξύ των σωμάτων σταθερό και ίσο το μέτρο της μέσης δύναμης από τη σχέση $\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, όπου Δp η μεταβολή της ορμής του βλήματος στο χρονικό διάστημα Δt που το βλήμα διαπερνάει το σώμα.

Να βρείτε

- α) Το μέτρο της ταχύτητας V του σώματος τη στιγμή που εξέρχεται το βλήμα από το σώμα.
- β) Το μέτρο της ταχύτητας u
- γ) Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται μεταξύ των σωμάτων.
- δ) Τη θερμότητα που εκλύεται κατά τη διέλευση του βλήματος από το σώμα.

Απάντηση.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ μεταξύ των στιγμών εισόδου-εξόδου του βλήματος. Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow mu_0 = mu + MV \Rightarrow 25 = 0,5u + 4,5V \quad (1)$$

α)

Το διάστημα που διανύει το βλήμα σε χρόνο t_1 είναι.

$$S_1 = u_0 t_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow S_1 = 50t_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \quad (2)$$

Το διάστημα που διανύει το σώμα σε χρόνο t_1 είναι.

$$S_2 = \frac{1}{2} \alpha_2 t_1^2 \quad (3)$$

$$\text{Από (2),(3)} \Rightarrow S_1 - S_2 = 50t_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 t_1^2 \Rightarrow 0,2 = 50t_1 - \left(\frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 t_1^2 \right) \quad (4)$$

Έστω ότι η μέση τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται μεταξύ των σωμάτων στο χρονικό διάστημα t_1 είναι $\bar{F}$. Το μέτρο της επιτάχυνσης α_1 είναι $\alpha_1 = \frac{\bar{F}}{m} = \frac{\bar{F}}{0,5}$ και το μέτρο της επιτάχυνσης

$$\alpha_2 \text{ είναι } \alpha_2 = \frac{\bar{F}}{M} = \frac{\bar{F}}{4,5}. \text{ Άρα } \alpha_1 = 9\alpha_2 \quad (5)$$

$$\text{Από (4),(5)} \Rightarrow 0,2 = 50t_1 - \left(\frac{1}{2} \alpha_2 t_1^2 + \frac{1}{2} 9\alpha_2 t_1^2 \right) \Rightarrow 0,2 = 50t_1 - 5\alpha_2 t_1^2 \Rightarrow$$

$$0,2 = (50 - 5\alpha_2 t_1)t_1 \Rightarrow \quad (6)$$

Η μέση τιμή του μέτρου της δύναμης που ασκείται από το βλήμα στο σώμα είναι $\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow$

$$\bar{F} = \frac{MV}{t_1} \Rightarrow \frac{\bar{F}}{M} = \frac{V}{t_1} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{V}{t_1} \quad V = \alpha_2 t_1 \quad (7)$$

$$\text{Από (6),(7)} \quad 0,2 = (50 - 5V)t_1 \Rightarrow 0,2 = (50 - 5V) 6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \frac{100}{3} = 50 - 5V \Rightarrow$$

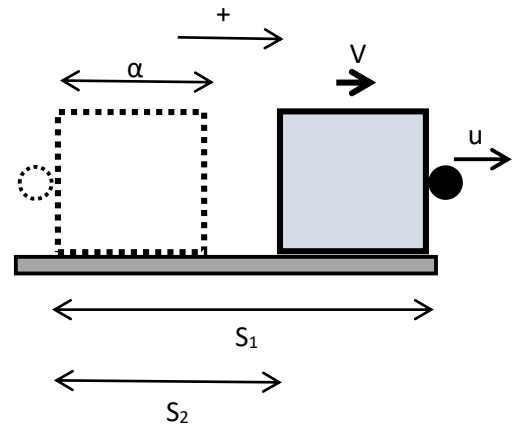
$$5V = \frac{150}{3} - \frac{100}{3} \Rightarrow 5V = \frac{50}{3} \Rightarrow V = \frac{10}{3} \text{ m/s}$$

$$\beta) \text{ Από τη σχέση (1)} \Rightarrow 25 = 0,5u + 4,5 \cdot \frac{10}{3} \Rightarrow 25 = 0,5u + 15 \Rightarrow 0,5u = 10 \Rightarrow u = 20 \text{ m/s.}$$

$$\gamma) \bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \bar{F} = \frac{MV}{t_1} \Rightarrow \bar{F} = \frac{4,5 \cdot \frac{10}{3}}{6 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \bar{F} = 2500 \text{ N}$$

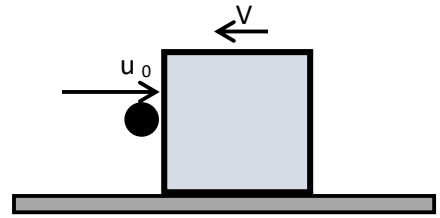
$$\delta) Q = \frac{1}{2} m u_0^2 - \frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} M V^2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 50^2 - \frac{1}{2} 0,5 \cdot 20^2 - \frac{1}{2} 4,5 \left(\frac{10}{3} \right)^2 \Rightarrow$$

$$Q = 500 \text{ J}$$



Εφαρμογή (Δ)

Ομογενές σώμα μάζας $M=4,5\text{Kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα μέτρου V προς τα αριστερά. Το σώμα έχει σχήμα κύβου πλευράς $a=0,22\text{m}$. Βλήμα όλμου μάζας $m=0,5\text{m}$ και οριζόντιας ταχύτητας μέτρου $u_0=50\text{m/s}$ προς τα δεξιά, διαπερνάει οριζόντια το σώμα και βγαίνει από αυτό με ταχύτητα μέτρου u , σε χρονικό διάστημα $t_1 = 6 \cdot 10^{-3}\text{s}$. Το σώμα ακινητοποιείται τη στιγμή που το βλήμα εξέρχεται από αυτό. Θεωρούμε το βλήμα χωρίς διαστάσεις και το μέτρο της δύναμης μεταξύ των σωμάτων σταθερό και ίσο το μέτρο της μέσης δύναμης από τη σχέση $\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ όπου Δp η μεταβολή της ορμής του βλήματος στο χρονικό διάστημα Δt που το βλήμα διαπερνάει το σώμα.



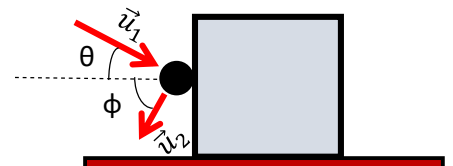
Να βρείτε

- α) Το μέτρο της ταχύτητας V του σώματος. (Απ. $V = \frac{10}{3}\text{m/s}$)
- β) Το μέτρο της ταχύτητας u (Απ. $u= 20\text{m/s}$.)
- γ) Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται μεταξύ των σωμάτων. (Απ. $\bar{F} = 2500\text{N}$)
- δ) Τη θερμότητα που εκλύεται κατά τη διέλευση του βλήματος από το σώμα.(Απ. $Q= 550\text{J}$)

- **Ελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων, όταν στο ένα σώμα ασκείται δύναμη από εμπόδιο.**

Παράδειγμα (Δ)

Ομογενής κύβος μάζας M είναι ακίνητος πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Η μικρή σφαίρα μάζας m , πέφτει στην κατακόρυφη πλευρά του κύβου με ταχύτητα $\vec{u}_1$ και ανακλάται με ταχύτητα $\vec{u}_2$. Οι γωνίες θ, ϕ που σχηματίζουν οι ταχύτητες $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ με την οριζόντια διεύθυνση είναι $\sin\theta=0,8$ ($\eta\mu\theta=0,6$) και $\sin\phi=0,6$ ($\eta\mu\phi=0,8$) αντίστοιχα. Η κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι ελαστική.



- A. Αν η μάζα της σφαίρας είναι $m=0,7\text{Kg}$ να βρεθεί η μάζα M του κύβου.
- B. Αν μετά την κρούση η ταχύτητα του κύβου έχει μέτρο $V= 7\text{m/s}$, να βρεθούν τα μέτρα των ταχυτήτων $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

Απάντηση.

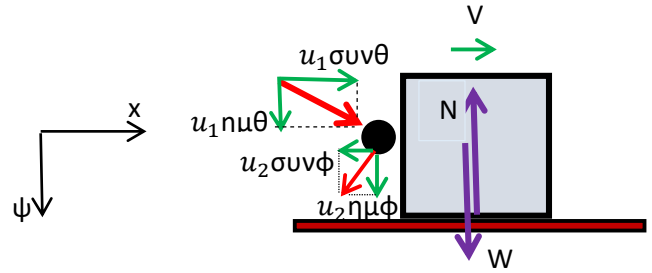
A.

Αναλύουμε τις ταχύτητες $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ στους άξονες x-ψ.

Κατά την κρούση ισχύει η ΑΔΟ για τη σφαίρα στον

άξονα ψ. $mu_1 \eta \mu \theta = mu_2 \eta \mu \phi \Rightarrow 0,6 u_1 = 0,8 u_2$

$$\Rightarrow 3u_1 = 4u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{4}{3} u_2 \quad (1)$$



Για το σύστημα κύβος – σφαίρα $\Sigma F_{(\epsilon \xi)} x = 0$ και

$\Sigma F_{(\epsilon \xi)} \psi \neq 0$ (Λόγω N και W) Ισχύει η ΑΔΟ στον άξονα x.

$$mu_1 \sin \theta = MV - mu_2 \sin \phi \Rightarrow u_1 \sin \theta + u_2 \sin \phi = \frac{M}{m} V \quad \text{και λόγω της (1)} \Rightarrow \frac{4}{3} u_2 \cdot 0,8 + u_2 \cdot 0,6 = \frac{M}{m} V$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} u_2 = \frac{M}{m} V \quad (2)$$

Και από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος : $\frac{1}{2} mu_1^2 = \frac{1}{2} mu_2^2 + \frac{1}{2} MV^2 \Rightarrow$

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{M}{m} V^2 \quad \text{και λόγω της (1)} \quad \frac{16}{9} u_2^2 - u_2^2 = \frac{M}{m} V^2 \Rightarrow \frac{7}{9} u_2^2 = \frac{M}{m} V^2 \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \frac{7}{9} \left(\frac{3}{5} \frac{M}{m} V \right)^2 = \frac{M}{m} V^2 \Rightarrow \frac{7}{9} \frac{9}{25} \frac{M^2}{m^2} V^2 = \frac{M}{m} V^2 \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{25}{7} \quad (4) \quad \text{και για } m=0,7\text{Kg} \text{ η } M=2,5\text{Kg}$$

B.

$$(2), (4) \Rightarrow \frac{5}{3} u_2 = \frac{25}{7} \cdot 7 \Rightarrow u_2 = 15\text{m/s}$$

$$(1) \Rightarrow u_1 = \frac{4}{3} \cdot 15 \Rightarrow u_1 = 20\text{m/s}$$

Εφαρμογή (Δ)

Πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ακίνητη σφήνα ABΓ κλίσης

θ με $\sin \theta = 0,8$ ($\eta \mu \theta = 0,6$), μάζας M. Από ύψος $h=0,8\text{m}$ από το μέσο

M της πλευράς AB της σφήνας, αφήνουμε σφαίρα μάζας $m=0,7\text{Kg}$.

Θεωρούμε τη σφαίρα χωρίς διαστάσεις. Η σφαίρα συγκρούεται

ελαστικά με τη σφήνα στο σημείο M. Η ταχύτητα της σφαίρας $\vec{u}_2$,

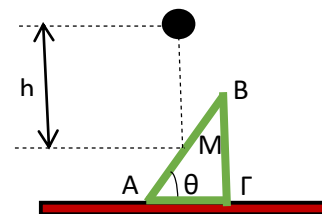
αμέσως μετά την κρούση, είναι οριζόντια.

Να βρεθούν

α) Η μάζα M της σφήνας (Απ. $M=0,9\text{Kg}$)

β) Τα μέτρα των ταχυτήτων της σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση και αμέσως μετά τη κρούση.

(Απ. $u_1 = 4\text{m/s}$, $u_2 = 3\text{m/s}$)



γ) Το μέτρο της ταχύτητας της σφήνας μετά την κρούση . (Απ. $V = 7/3 \text{ m/s}$)

pananasgiannis@yahoo.gr