

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 5 ΣΤΙΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

- Ελαστική μη κεντρική κρούση μεταξύ δυο σφαιρών, με ακίνητη τη μία σφαίρα πριν την κρούση . Δύο παραδείγματα - Δύο εφαρμογές.
- Πλάγια ελαστική κρούση δύο σφαιρών με ακινητοποίηση της μίας σφαίρας μετά την κρούση . Παράδειγμα -Εφαρμογή.

Ελαστική μη κεντρική κρούση μεταξύ δυο σφαιρών, με ακίνητη τη μία σφαίρα πριν την κρούση . Δύο παραδείγματα - Δύο εφαρμογές.

Παράδειγμα 1

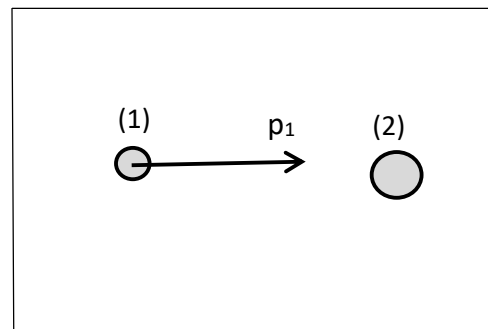
Πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται λεία σφαίρα (1) μάζας m με ορμή p_1 προς την ακίνητη λεία σφαίρα (2) μάζας $3m$.

Η κρούση των σφαιρών είναι μη κεντρική ελαστική. Η σχέση μεταξύ των μέτρων των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση είναι $u_1' = \sqrt{2} u_2'$.

.Να βρεθεί

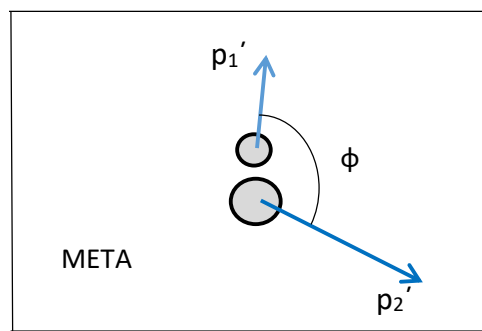
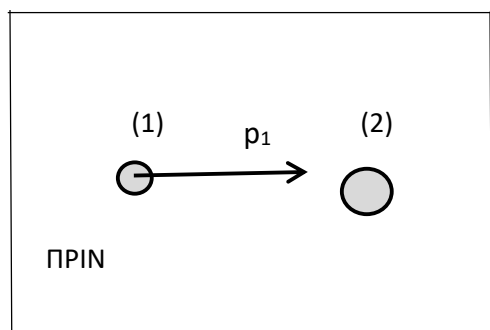
α) Η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων u_1' , u_2' .

Β) η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων u_1 , u_2' .

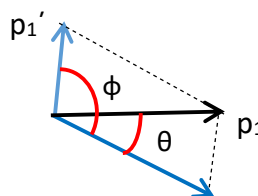


Απάντηση

α) Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ με τον κανόνα του παραλληλογράμμου , με τις ολικές ορμές του συστήματος λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση



$$\vec{p}_{1,2} = \vec{p}'_{1,2} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$



Η σχέση μεταξύ των μέτρων των $\vec{p}_1$, $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$ είναι :

p_2'

$$p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\varphi} \Rightarrow m^2u^2 = m^2u_1'^2 + 9m^2u_2'^2 + 6m^2u_1'u_2'\cos\varphi \Rightarrow$$

$$u^2 = 2u_2'^2 + 9u_2'^2 + 6\sqrt{2}u_2'^2\cos\varphi \Rightarrow u^2 = 11u_2'^2 + 6\sqrt{2}u_2'^2\cos\varphi \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΚΕ με τις ολικές κινητικές ενέργειες του συστήματος λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση:

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu_1'^2 + \frac{1}{2}3mu_2'^2 \Rightarrow u^2 = 2u_2'^2 + 3u_2'^2 \Rightarrow u^2 = 5u_2'^2 \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2)} \quad 5u_2'^2 = 11u_2'^2 + 6\sqrt{2}u_2'^2\cos\varphi \Rightarrow -6u_2'^2 = 6\sqrt{2}u_2'^2\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = -\sqrt{2}/2 \Rightarrow \varphi = 3\pi/4$$

β)

$$\text{Η γωνία } \theta \text{ μεταξύ των } \vec{p}_1', \vec{p}_2' \text{ είναι } \varepsilon\varphi\theta = \frac{p_1'\eta\mu\varphi}{p_2' + p_1'\cos\varphi} \quad \text{όμως } p_1' = mu_1' = m\sqrt{2}u_2' \text{ και } p_2' = 3mu_2'$$

$$\text{Άρα } p_2' = 3p_1'/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}p_1'/2$$

$$\text{Με αντικατάσταση } \varepsilon\varphi\theta = \frac{p_1'\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)p_1' + p_1'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 1/2$$

Εφαρμογή 1.

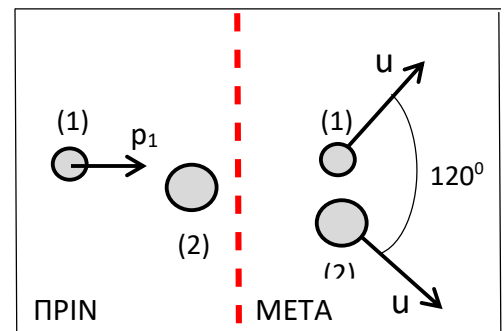
Πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται λεία σφαίρα (1) μάζας m_1 με ορμή p_1 προς την ακίνητη λεία σφαίρα (2) μάζας m_2 .

Η κρούση των σφαιρών είναι μη κεντρική ελαστική. Η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση είναι $\theta = 2\pi/3$ και τα μέτρα τους είναι ίσα.

Η σχέση μεταξύ των μαζών m_1 , m_2 είναι

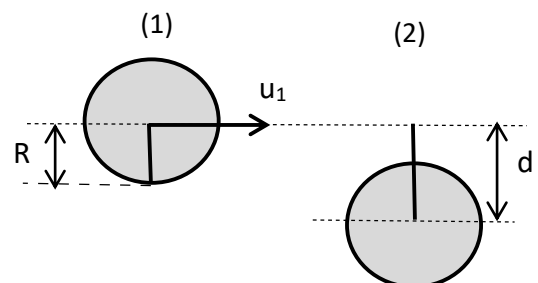
$$\alpha) m_1 = 2m_2 \quad \beta) m_2 = 2m_1 \quad \gamma) m_1 = m_2$$

Να αιτιολογήσετε.



Παράδειγμα 2

Πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται λεία σφαίρα (1) μάζας m και ακτίνας R με ταχύτητα μέτρου $u_1 = u$ προς την ίδια ακίνητη λεία σφαίρα (2). Η κρούση των σφαιρών είναι μη κεντρική ελαστική. Η κάθετη απόσταση από το κέντρο της σφαίρας



(2) στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας (1)

και έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας, είναι $d = \sqrt{3} R$

.Να βρεθούν.

α) Η γωνία θ μεταξύ των ταχυτήτων u_1, u_2' .

β) Η γωνία φ μεταξύ των ταχυτήτων u_1', u_2' .

γ) Τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση u_1', u_2' σε συνάρτηση με το μέτρο u

Απάντηση

α) Κατά την κρούση οι ωστικές δυνάμεις μεταξύ των σφαιρών

$F_{1 \rightarrow 2}, F_{2 \rightarrow 1}$ είναι κάθετες στην κοινή εφαπτομένη τους και διέρχονται από τα κέντρα τους.

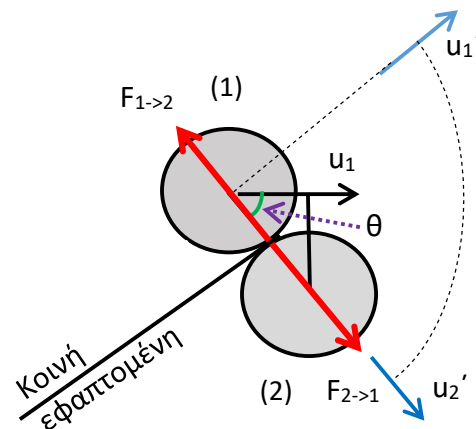
$$\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2' - \vec{p}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2'}{\Delta t}$$

Από τη σχέση $\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)} = \frac{\vec{p}_2'}{\Delta t}$ τα διανύσματα $\vec{p}_2'$ και $\vec{u}_2'$

έχουν τη διεύθυνση της $\vec{F}_{(1 \rightarrow 2)}$, δηλαδή της ευθείας που διέρχεται από τα κέντρα των σφαιρών και σχηματίζουν γωνία θ με τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}_1$. Από το

ορθογώνιο τρίγωνο $\eta \mu \theta = d / 2R \Rightarrow \eta \mu \theta = \sqrt{3} R / 2R$

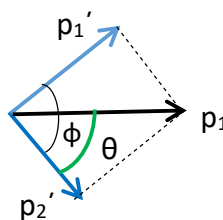
$$\Rightarrow \eta \mu \theta = \sqrt{3} / 2 \Rightarrow \theta = 60^\circ$$



β) Με βάση τη μέθοδο του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε.:

ΑΔΟ με τον κανόνα του παραλληλογράμμου με τις ολικές ορμές του συστήματος λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση :

$$\vec{p}_{1,2} = \vec{p}'_{1,2} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$



Η σχέση μεταξύ των μέτρων των $\vec{p}_1, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2$ είναι : $p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2' \cos \varphi} \Rightarrow$

$$m^2 u^2 = m^2 u_1'^2 + m^2 u_2'^2 + 2 m^2 u_1' u_2' \cos \varphi \Rightarrow u^2 = u_1'^2 + u_2'^2 + 2 u_1' u_2' \cos \varphi \quad (1)$$

ΑΔΚΕ με τις ολικές κινητικές ενέργειες του συστήματος λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση:

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m u_1'^2 + \frac{1}{2} m u_2'^2 \Rightarrow u^2 = u_1'^2 + u_2'^2 \quad (2)$$

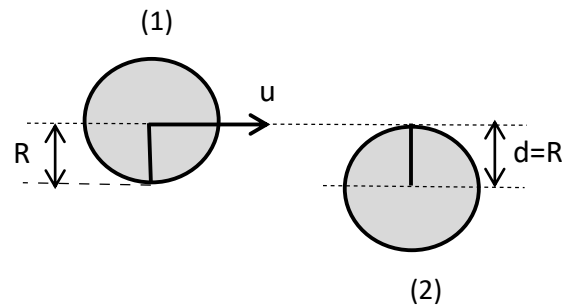
Από τις σχέσεις (1). (2) $u^2 = u^2 + 2 u_1' u_2' \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$

γ) Η γωνία μεταξύ των $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ είναι $\pi/3$ (από την ερώτηση α) και η γωνία μεταξύ των $\vec{p}_1, \vec{p}_1$ είναι $\pi/6$.

$$\text{Άρα } p_1' = p_1 \sin \pi/6 \Rightarrow u_1' = u \sqrt{3}/2 \quad \text{και} \quad p_2' = p_1 \sin \pi/3 \Rightarrow u_2' = u/2$$

Εφαρμογή 2

Πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται λεία σφαίρα (1) μάζας m και ακτίνας R με ταχύτητα μέτρου u , προς την ακίνητη λεία σφαίρα (2) μάζας $2m$ και ακτίνας R . Η κρούση των σφαιρών είναι ελαστική. Η κάθετη απόσταση από το κέντρο της σφαίρας (2) στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας (1) και έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας, είναι $d = R$.



.Να βρεθούν.

α) Η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων u_1, u_2' .

β) Η γωνία μεταξύ των ταχυτήτων u_1', u_2' .

γ) Τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση u_1', u_2' σε συνάρτηση με το μέτρο u

- Πλάγια ελαστική κρούση δύο σφαιρών με ακινητοποίηση της μίας σφαίρας μετά την κρούση
Παράδειγμα - Εφαρμογή.

Παράδειγμα

Τα σώματα (1), (2) ίδιας μάζας m με ταχύτητες μέτρων $u_0 \sqrt{3}, u_0$ αντίστοιχα κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα σώματα συγκρούονται ελαστικά στο σημείο Α με ταχύτητες κάθετες μεταξύ τους. Αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα του σώματος (2) μηδενίζεται.

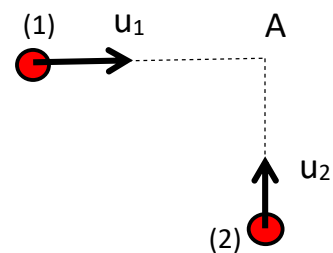
$$\Deltaίνεται \varepsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Α. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μετά την κρούση (1) είναι

$$\alpha) u_0 \sqrt{2} \quad \beta) u_0 \quad \gamma) 2u_0 \quad (2\mu) \quad + \text{ αιτιολόγηση}$$

Β. Η γωνία της ταχύτητας του σώματος (1) πριν την κρούση και της ταχύτητάς του μετά την κρούση είναι .

$$\alpha) 30^\circ \quad \beta) 60^\circ \quad \gamma) 90^\circ \quad (2\mu) \quad + \text{ αιτιολόγηση}$$



Γ. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας (1) κατά την κρούση έχει μέτρο

α) $u_0 \sqrt{2}$ β) μu_0 γ) $2\mu u_0$ (2μ) + αιτιολόγηση

Απάντηση

A.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στο επίπεδο με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1'$$

Τα μέτρα των $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ είναι $p_1 = \mu u_0 \sqrt{3}, p_2 = \mu u_0$

$$p_1' = \sqrt{(\mu u_0 \sqrt{3})^2 + (\mu u_0)^2} \Rightarrow \mu u_1' = \sqrt{4(\mu u_0)^2}$$

$$\Rightarrow u_1' = 2u_0 \text{ (το } \gamma \text{)}$$

$$[\text{ή από ΑΔΚΕ: } K_{\text{ολ(πριν)}} = K_{\text{ολ(μετά)}} \Rightarrow \frac{1}{2} \mu u_0^2 + \frac{1}{2} m 3u_0^2 = \frac{1}{2} \mu u_1'^2 \Rightarrow u_1' = 2u_0]$$

B.

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{p_2}{p_1'} = \frac{\mu u_0}{\mu u_0 \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{Άρα } \theta = 30^\circ \text{ (το } \alpha \text{)}$$

Γ.

$$\overrightarrow{\Delta p}_{(\sigma\phi\alpha\iota\rho\alpha\varsigma\ 1)} = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + (-\vec{p}_1)$$

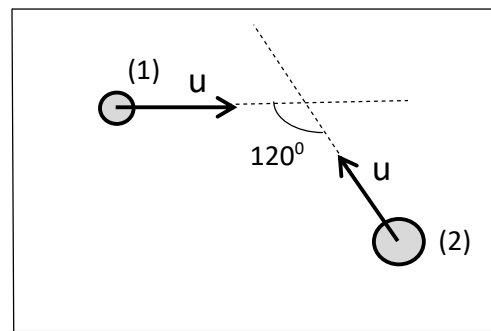
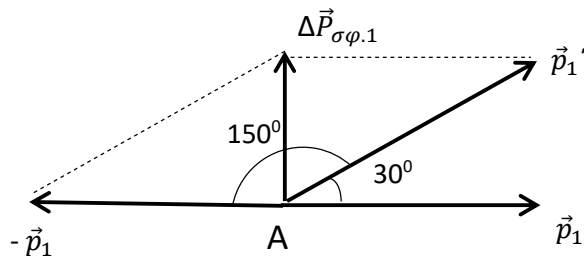
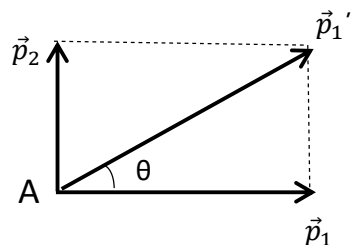
$$(\text{Μέτρο}) \Delta p_{\sigma\phi.1} = \sqrt{p_1'^2 + p_1'^2 + 2p_1 p_1' \sin 150^\circ}$$

$$\Rightarrow \Delta p_{\sigma\phi.1} = \sqrt{(\mu u_0 \sqrt{3})^2 + (2\mu u_0)^2 + 2\mu u_0 \sqrt{3} \cdot 2\mu u_0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow \Delta p_{\sigma\phi.1} = \mu u_0$$

Εφαρμογή

Πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται δύο λείες σφαίρες (1),(2) μαζών $m, 2m$ αντίστοιχα, με ταχύτητες ίδιου μέτρου u . Τα διανύσματα των ταχυτήτων των σφαιρών σχηματίζουν γωνία 120° μεταξύ τους. Τα σώματα συγκρούονται ελαστικά και αμέσως μετά την κρούση το σώμα (2) ακινητοποιείται.

A. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μετά την κρούση (1) είναι



α) $u\sqrt{3}$ β) u γ) $2u$ + αιτιολόγηση

Β. Η γωνία της ταχύτητας του σώματος (1) πριν την κρούση και της ταχύτητάς του μετά την κρούση είναι .

α) 30° β) 60° γ) 90° + αιτιολόγηση

Γ. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας (1) κατά την κρούση έχει μέτρο

α) $\mu\sqrt{2}$ β) μ γ) 2μ + αιτιολόγηση

pananasgiannis@yahoo.gr