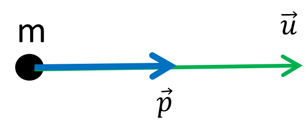
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΟΡΜΗ

Ορμή σώματος μάζας m και ταχύτητας $\vec{u}$ είναι το διανυσματικό μέγεθος που ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα του σώματος.



$\vec{p}$ = m $\vec{u}$

Η ορμή $\vec{p}$ και η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι ομόρροπα διανύσματα.

Μονάδες ορμής στο S.I. : Kg m / s

ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

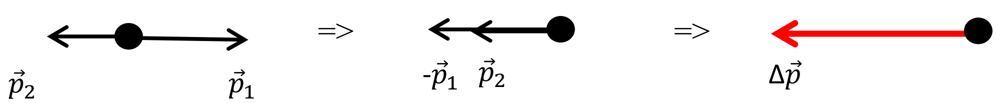
Έστω $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ οι ορμές σώματος πριν και μετά τη μεταβολή της ορμής του.

Η μεταβολή της ορμής του είναι $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ => $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$

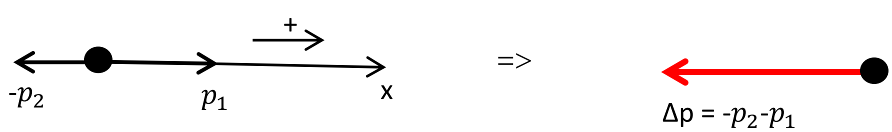
Για να βρούμε την $\Delta\vec{p}$, αντί να αφαιρέσουμε τα διανύσματα $\vec{p}_2$, $\vec{p}_1$ προσθέτουμε τα διανύσματα $\vec{p}_2$, $(-\vec{p}_1)$ όπου $(-\vec{p}_1)$ το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{p}_1$.

Α. Όταν οι ορμές πριν και μετά η μεταβολή, έχουν την ίδια διεύθυνση.

Π.χ.



Για να βρούμε την αλγεβρική τιμή της $\Delta\vec{p}$ θεωρούμε άξονα έστω 0x , στη διεύθυνση των ορμών με θετική φορά προς τα δεξιά . Τα μέτρα των $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, είναι p_1 ,p_2 αντίστοιχα.



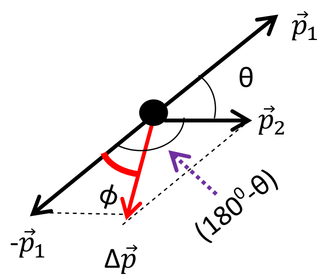
Η Αλγεβρική τιμή $\Delta p = -p_2 - p_1$

Β. Όταν οι ορμές πριν και μετά η μεταβολή, δεν έχουν την ίδια διεύθυνση.

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου. $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$.

Τα μέτρα των $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, είναι p_1 ,p_2 αντίστοιχα.

Π. χ. 1



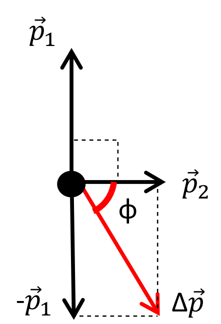
Μέτρο $\Delta p = \sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2 + 2p_1p_2\sigma\upsilon\nu(180^0 - \theta)}$

Διεύθυνση εφφ $= \frac{p_2\eta\mu(180^0-\theta)}{p_1+p_2\sigma\upsilon\nu(180^0-\theta)}$

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι οι ορμές $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ να είναι κάθετες μεταξύ τους.

Τα μέτρα των $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, είναι p_1 ,p_2 αντίστοιχα.

Π. χ. 2



Μέτρο $\Delta p = \sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2}$

Διεύθυνση εφφ $= \frac{p_1}{p_2}$

Παρατήρηση : Μπορούμε επίσης στο Π.χ. 1, να βρούμε τη συνισταμένη $\Delta\vec{p}$ των διανυσμάτων $\vec{p}_2$, $(-\vec{p}_1)$, με τη μέθοδο της ανάλυσής τους σε κάθετους άξονες 0x – 0ψ κ.λ.π.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $\vec{F}_{ολ} = m\ \vec{\alpha}$ => $\vec{F}_{ολ} = m\ \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$ => $\vec{F}_{ολ} = m\ \frac{\vec{u}_2-\vec{u}_1}{\Delta t}$ =>

$\vec{F}_{ολ} = \frac{m\vec{u}_2-m\vec{u}_1}{\Delta t}$ => $\vec{F}_{ολ} = \frac{\vec{p}_2-\vec{p}_1}{\Delta t}$ => $\vec{F}_{ολ} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

Διατύπωση 1

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε σώμα, ισούται με το πηλίκο της μεταβολής της ορμής του σε απειροελάχιστο χρονικό διάστημα Δt προς το χρονικό αυτό διάστημα Δt. Στο απειροελάχιστο αντί Δt μπορούμε να χρησιμοποιούμε το dt και αντί Δp το dp ($\vec{F}_{ολ} = \frac{d\vec{p}}{dt}$)

Διατύπωση 2

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε σώμα μια χρονική στιγμή , ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του τη χρονική αυτή στιγμή.

Αν η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή, το πηλίκο $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ είναι σταθερό για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα Δt ενώ αν η συνισταμένη δύναμη δεν είναι σταθερή το πηλίκο $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ εκφράζει τη μέση συνισταμένη δύναμη, στο μη απειροελάχιστο χρονικό διάστημα Δt .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΝΟΜΟΥ ΣΕ ΕΝΑ ΣΩΜΑ.

Α. Όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και οι ορμές του σώματος διαφορετικών χρονικών στιγμών έχουν την ίδια διεύθυνση, θεωρούμε άξονα στη διεύθυνση αυτή με θετική φορά που μας βολεύει για τις πράξεις και παίρνουμε στην εξίσωση του νόμου αντί των διανυσμάτων, τις αλγεβρικές τους τιμές.

$F_{ολ.} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ή $F_1 + F_2 + \ldots = \frac{p_2 - p_1}{\Delta t}$.

Β. Όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και οι ορμές του σώματος διαφορετικών χρονικών στιγμών δεν έχουν την ίδια διεύθυνση

B_1 Εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για τα διανύσματα $\vec{F}_{ολ}\,\Delta t$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$.

ή

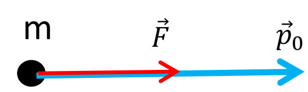
B_2 αναλύουμε τα διανύσματα των δυνάμεων και των ορμών σε κάθετους άξονες x-ψ και παίρνουμε στην εξίσωση του νόμου σε κάθε άξονα αντί των διανυσμάτων, τις αλγεβρικές τους τιμές.

$F_{ολ.x} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t}$ ή $F_{1x} + F_{2x} + \ldots = \frac{p_{2x} - p_{1x}}{\Delta t}$ και $F_{ολψ.} = \frac{\Delta p_\psi}{\Delta t}$ ή $F_{1\psi} + F_{2\psi} + \ldots = \frac{p_{2\psi} - p_{1\psi}}{\Delta t}$

Τα παραδείγματα – εφαρμογές της ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ αφορούν την περίπτωση Α. Την περίπτωση Β θα τη συναντήσουμε στην ύλη της Γ Λυκείου.

Παράδειγμα 1

Σε σώμα μάζας m=1Kg το οποίο έχει ορμή p_0 = 20 Kg m/s ασκείται σταθερή δύναμη F μέτρου F=10N, στην κατεύθυνση της αρχικής



ορμής , τη χρονική στιγμή t=0. Τη χρονική στιγμή t=2s η δύναμη καταργείται.

Να βρείτε

α) Την ορμή του σώματος τη χρονική στιγμή t=3s

β) Τη χρονική στιγμή που η ορμή του σώματος είναι p=30 Kg m/s

γ) Το έργο της δύναμης από t=1s μέχρι t=2s.

δ) Το διάστημα που διανύει το σώμα από t=0 μέχρι t=3s.

ε) Τη μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος.

Απάντηση

α) Από τη σχέση $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ => $\Delta p = F\Delta t$ => $p - p_0 = F(t-0)$ => $p = p_0 + F\,t$ και για t=2s

=> $p = 20 + 10 \cdot 2 = 40$ Kg m/s Από t=2s μέχρι t=3s η κίνηση είναι ΕΟΚ άρα p = 40 Kg m/s

β) Από τη σχέση $p = p_0 + F\,t$ => $30 = 20 + 10\,t$ => t=1s

γ) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από t=1s μέχρι t=2s $W_F = \frac{1}{2} m u_2^2 - \frac{1}{2} m u_1^2$

όμως $p_2 = m u_2$ => $u_2 = 40$m/s και $p_1 = p_0 + F \cdot 1$ => $p_1 = 20 + 10 \cdot 1 = 30$ Kg m/s και από

$p_1 = m u_1$ η $u_1 = 30$m/s

Επομένως $W_F = \frac{1}{2} m\, 40^2 - \frac{1}{2} m\, 30^2 = 800 - 450 = 350$J

δ) Το διάστημα από t=0 μέχρι t=2s βρίσκεται (και) από το ΘΜΚΕ $W_F = 350$ => $F\,S_{0\to2} = 350$

=> $10\,S_{0\to2} = 350$ => $S_{0\to2} = 35$m και από t=2s μέχρι t=3s από την ΕΟΚ $S_{2\to3} = ut = 40 \cdot 1 = 40$m

Άρα $S_{0\to3} = S_{0\to2} + S_{2\to3} = 35 + 40 = 75$m

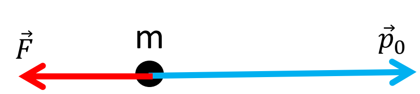
ε) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι $\frac{dK}{dt} = F\,u$.

Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος είναι $u_2 = 40$m/s

Άρα $\frac{dK}{dt}_{(max)} = 10 \cdot 40 = 400$ J/s

Εφαρμογή 1

Σε σώμα μάζας m=1Kg το οποίο έχει ορμή $p_0 = 20$ Kg m/s ασκείται σταθερή δύναμη F μέτρου F=10N, αντίρροπη της αρχικής ορμής , τη χρονική στιγμή t=0. Τη χρονική στιγμή t=4s η δύναμη καταργείται. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές, είναι φορά



της αρχικής ορμής.

Να βρείτε

α) Την αλγεβρική τιμή της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή t=5s (Απ. p_5 = -20 Kg m/s)

β) Τις χρονικές στιγμές που η ορμή του σώματος έχει μέτρο p=10 Kg m/s (Απ. t_1=1s, t_2=3s)

γ) Το έργο της δύναμης από t=0 μέχρι t=3s. (Απ. W_F = - 150J)

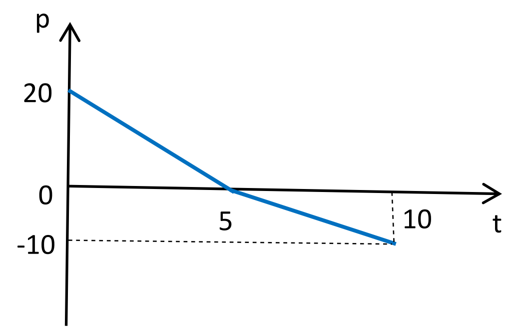
δ) Το διάστημα που διανύει το σώμα από t=0 μέχρι t=5s. (Απ. $S_{0->5}$ = 60m)

ε) Τη μέγιστη τιμή της απόλυτης τιμής του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος.

(Απ.$\left|\frac{dK}{dt}\right|_{(max)}$ = 200 J/s)

Παράδειγμα 2

Σώμα μάζας m=1Kg κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης F. Η γραφική παράσταση της ορμής του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται δίνεται από το διπλανό διάγραμμα. Να βρεθούν.



α) Το διάγραμμα της αλγεβρικής τιμής του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

β) Η ορμή του σώματος τις χρονικές στιγμές t_1 =2s και t_2 =8s

γ) Το διάγραμμα της κινητικής ενέργειας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

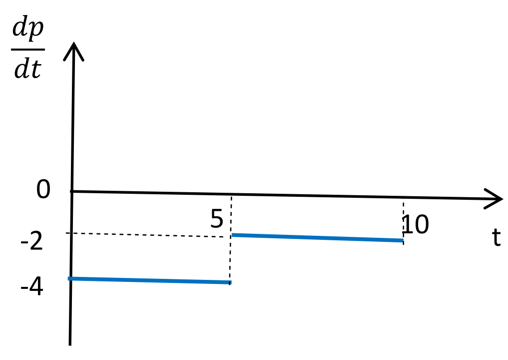
δ) Η ισχύς της δύναμης F τις χρονικές στιγμές t_1 =2s και t_2 =8s

Απάντηση

α)

Απο t=0 μέχρι t=5s $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2-p_1}{t_2-t_1} = \frac{0-20}{5-0} =$ -4 N

απο t=5s μέχρι t=10s $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2-p_1}{t_2-t_1} = \frac{-10-0}{10-5} =$ -2 N



β) Εφαρμόζουμε τη σχέση $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2-p_1}{t_2-t_1}$ απο t=0 μέχρι t=2s .

-4 = $\frac{p_2-p_1}{t_2-t_1}$ => -4 = $\frac{p_2-20}{2-0}$ => -8 = p_2 – 20 => p_2 = 12 Kg m/s

Εφαρμόζουμε τη σχέση $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2-p_1}{t_2-t_1}$ απο t=5 μέχρι t=8s .

$-2 = \frac{p_2-p_1}{t_2-t_1}$ => $-2 = \frac{p_8-0}{8-5}$ => $-6 = p_8$ => $p_8 = -6$ Kg m/s

γ) Η κινητική ενέργεια είναι $K= \frac{1}{2}$ m u^2 => $K = \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2}$ => $K = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$

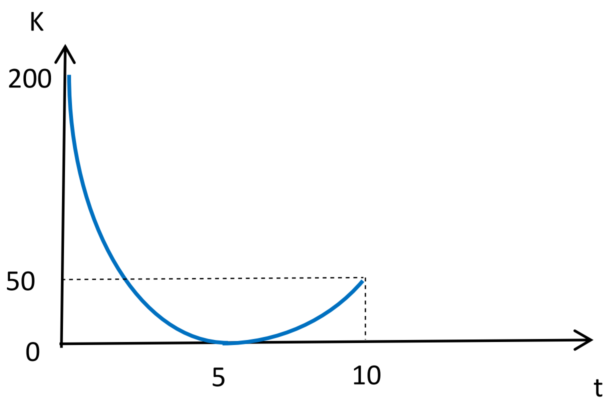
Από t=0 μέχρι t=5s η εξίσωση της ορμής p(t) είναι $p= p_0 + \frac{\Delta p}{\Delta t} t$ => $p = 20 - 4t$

Άρα $K = \frac{1}{2} \frac{(20-4t)^2}{m}$ => $K = \frac{1}{2} (20^2 – 2 \cdot 20 \cdot 4t + 4^2 t^2)$ => $K = \frac{1}{2} (400 - 160t + 16 t^2)$ =>

$K = 200 - 80t + 8 t^2$

Από t=5s μέχρι t=10s η εξίσωση της ορμής p(t) είναι $p= p_0 + \frac{\Delta p}{\Delta t} (t -5)$ => $p = -2(t -5)$

Άρα $K = \frac{1}{2} \frac{4(t-5)^2}{m}$ => $K =2 (t-5)^2$



δ) Η αλγεβρική τιμή της δύναμης από t=0 μέχρι t=5s είναι $F= \frac{\Delta p}{\Delta t} = -4N$ και η ισχύς της, την t=2s

είναι $P_{F(2s)} = F\, u_{(2s)}$ όμως $p_{(2s)} = m\, u_{(2s)}$ => $12 = 1 \cdot u_{(2s)}$ => $u_{(2s)} = 12$ m/s

Άρα $P_{F(2s)} = -4 \cdot 12$ => $P_{F(2s)} = -48W$

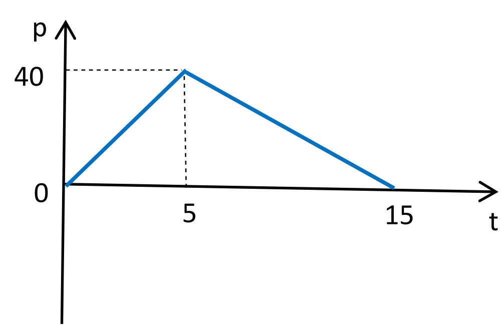
Η αλγεβρική τιμή της δύναμης από t=5 μέχρι t=10s είναι $F= \frac{\Delta p}{\Delta t} = -2N$ και η ισχύς της, την t=8s

είναι $P_{F(8s)} = F\, u_{(8s)}$ όμως $p_{(8s)} = m\, u_{(8s)}$ => $-6 = 1 \cdot u_{(8s)}$ => $u_{(8s)} = -6$ m/s

Άρα $P_{F(8s)} = -2 \cdot (-6)$ => $P_{F(8s)} = 12W$

Εφαρμογή 2

Σώμα μάζας m=1Kg κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση δύο οριζοντίων δυνάμεων F_1, F_2. Η γραφική παράσταση της ορμής του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από το διπλανό διάγραμμα. Η δύναμη F_2 είναι σταθερή στο χρονικό διάστημα 0-15s

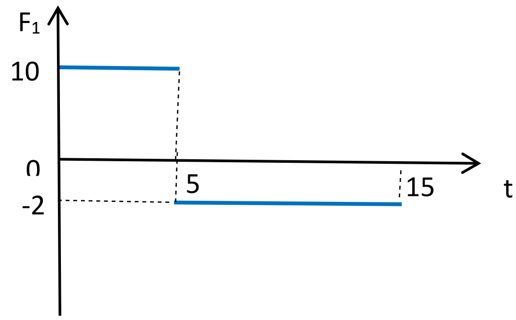


και έχει αλγεβρική τιμή $F_2 = -2N$

Να βρεθούν.

α) Το διάγραμμα της αλγεβρικής τιμής της δύναμης F_1 σε συνάρτηση με το χρόνο

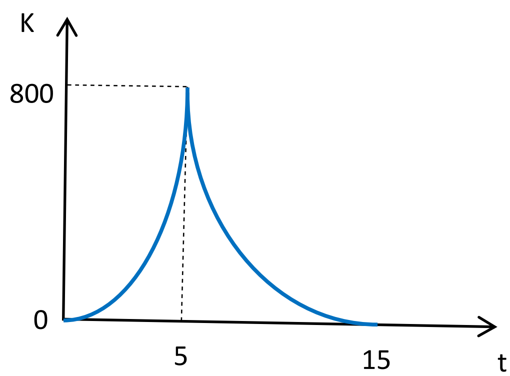
Απ.



β) Η ορμή του σώματος τις χρονικές στιγμές t_1 =3s και t_2 =12s ($p_{(3s)}$ =24Kg m/s , $p_{(12s)}$ =12Kg m/s)

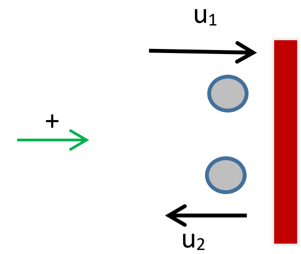
γ) Το διάγραμμα της κινητικής ενέργειας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απ.



δ) Την ισχύ κάθε δύναμης τις χρονικές στιγμές t_1 =3s και t_2 =12s (Απ. t_1 =3s : P_{F1}=240W, P_{F2}=-48W - t_2 =12s : P_{F1}= -24W, P_{F2}=-24W)

Παράδειγμα 3



Η μπάλα στο διπλανό σχήμα κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_1 =10m/s προς τα δεξιά, ελάχιστα πριν πέσει στον κατακόρυφο τοίχο. Η ταχύτητα της μπάλας αμέσως μετά την ανάκλασή της στον τοίχο είναι οριζόντια προς τα αριστερά και έχει μέτρο u_2 = 8m/s. Η μάζα της μπάλας είναι m=0,5 Kg. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς τα δεξιά.

Να βρεθούν.

α) Η μεταβολή της ταχύτητας (διάνυσμα)

β) Η μεταβολή της ορμής (διάνυσμα)

γ) Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ταχύτητας.

δ) Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής .

ε) Η μέση συνισταμένη δύναμη (διάνυσμα) που ασκείται στη μπάλα στο χρονικό διάστημα $\Delta t=0,1s$ της επαφής της με τον τοίχο.

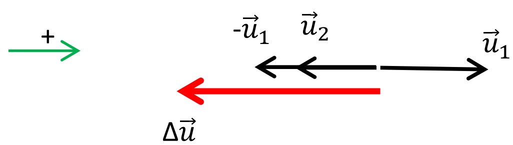
ζ) Η αλγεβρική τιμή της μέσης συνισταμένης δύναμης που ασκείται στην μπάλα στο $\Delta t=0,1s$.

η) Το έργο της συνισταμένης δύναμης στο χρονικό διάστημα της επαφής της μπάλας με τον τοίχο.

Απάντηση

α) Η μεταβολή της ταχύτητας $\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 \Rightarrow \Delta\vec{u} = \vec{u}_2 + (-\vec{u}_1)$

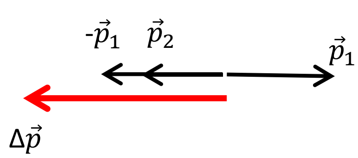
Αντί να αφαιρέσουμε τα διανύσματα $\vec{u}_2$, $\vec{u}_1$ προσθέτουμε τα διανύσματα $\vec{u}_2$, ($-\vec{u}_1$) όπου ($-\vec{u}_1$) το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{u}_1$.



Τα διανύσματα $\vec{u}_2$, ($-\vec{u}_1$) είναι ομόρροπα . Το μέτρο της μεταβολής $\Delta\vec{u}$ είναι $\Delta u = 10+8 = 18$ m/s.

β) Η μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$

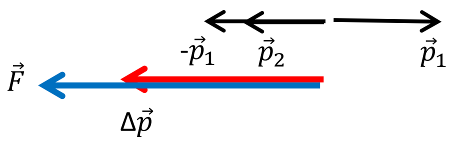
Αντί να αφαιρέσουμε τα διανύσματα $\vec{p}_2$, $\vec{p}_1$ προσθέτουμε τα διανύσματα $\vec{p}_2$, ($-\vec{p}_1$) όπου ($-\vec{p}_1$) το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{p}_1$.



Τα διανύσματα $\vec{p}_2$,($-\vec{p}_1$) είναι ομόρροπα . Το μέτρο της μεταβολής $\Delta\vec{p}$ είναι $\Delta p = p_2 + p_1 = mu_2 + mu_1 = 0,5 \cdot 8 + 0,5 \cdot 10 = 9$ Kg m/s γ) $\Delta u = u_2 - u_1 = -8 - 10 = -18$ m/s

δ) $\Delta p = p_2 - p_1 = -4 - 5 = -9$Kg m/s

ε)



Το μέτρο της (μέσης) δύναμης είναι $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{9}{0,1} = 90$N

ζ) Η αλγεβρική τιμή της (μέσης) δύναμης είναι $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-9}{0,1} = -90$N

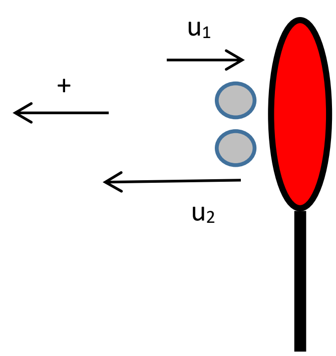
η) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ στο χρ. διάστημα της επαφής.

$W_F = \Delta K \Rightarrow W_F = K_2 - K_1 \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}0,5\, 8^2 - \frac{1}{2}0,5\, 10^2 \Rightarrow$

$W_F = \frac{1}{2}0,5\, 8^2 - \frac{1}{2}0,5\, 10^2 \Rightarrow W_F = 16 - 25 \Rightarrow W_F = -9$ J

Εφαρμογή 3

Το μπαλάκι στο διπλανό σχήμα κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_1 =10m/s προς τα δεξιά, ελάχιστα πριν πέσει στη ρακέτα. Η ταχύτητα που έχει το μπαλάκι αμέσως μετά το χτύπημα που δέχεται από τη ρακέτα, έχει μέτρο u_2 = 20m/s προς τα αριστερά . Η μάζα του σώματος είναι m=50 g. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς τα αριστερά.



Να βρεθούν.

α) Η μεταβολή της ταχύτητας (διάνυσμα) (Απ. Κατεύθυνση προς τα αριστερά. Μέτρο Δu= 30m/s)

β) Η μεταβολή της ορμής (διάνυσμα) (Απ. Κατεύθυνση προς τα αριστερά. Μέτρο Δp= 1,5 Kgm/s)

γ) Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ταχύτητας. (Απ.Δu = 30m/s)

δ) Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής . (Απ.Δp = 1,5 Kg m/s)

ε) Η μέση συνισταμένη δύναμη (διάνυσμα) που ασκείται στο μπαλάκι στο χρονικό διάστημα Δt=0,1s

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

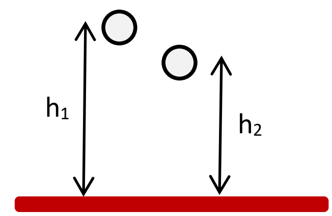
της επαφής της με τη ρακέτα. (Απ. Κατεύθυνση προς τα αριστερά. Μέτρο $F_{ολ.}$ = 15N)

ζ) Η αλγεβρική τιμή της μέσης συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο μπαλάκι. (Απ. F=15 N)

η) Το έργο της συνισταμένης δύναμης στο χρονικό διάστημα της επαφής. (Απ. W=7,5J)

Παράδειγμα 4

Από ύψος h_1 = 1,25 m από το δάπεδο αφήνουμε μπάλα μάζας m=1Kg . Η μπάλα χτυπάει στο δάπεδο και ανεβαίνει σε ύψος h_2 =0,8m. Θεωρούμε ότι η δύναμη από το αέρα στην μπάλα είναι μηδέν. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς τα κάτω. Στο χρονικό διάστημα Δt=0,1s , της επαφής της μπάλας με το δάπεδο να βρεθούν:



α) Η μεταβολή της ορμής (διάνυσμα) της μπάλας

β) Η μέση συνισταμένη δύναμη (διάνυσμα)

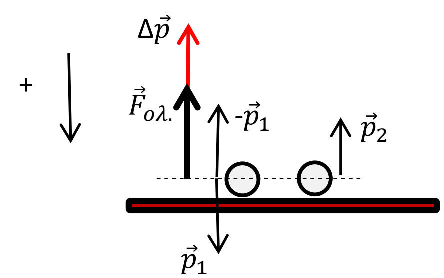
γ) Η αλγεβρική τιμή της μέσης συνισταμένης δύναμης .

δ) Η αλγεβρική τιμή της μέσης δύναμης που ασκείται από το δάπεδο στη μπάλα.

Απάντηση

α)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για να βρούμε τα μέτρα των ταχυτήτων του σώματος λίγο πριν και αμέσως μετά την πτώση στο δάπεδο.



$mgh_1 = \frac{1}{2} m u_1^2 \quad => \quad u_1 = \sqrt{2gh_1} = 5m/s$

$mgh_2 = \frac{1}{2} m u_2^2 \quad => \quad u_2 = \sqrt{2gh_2} = 4m/s$

Τα μέτρα των ορμών είναι p_1 = 5 Kg m/s , p_2 = 4 Kg m/s και τα διανύσματά τους φαίνονται στο σχήμα.

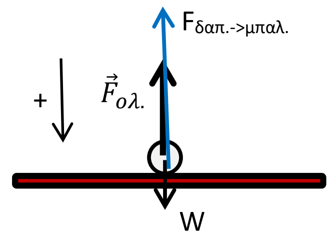
Η μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad => \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$ και το μέτρο $\Delta p = p_2 + p_1$ =9Kg m/s

β) Η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}_{ολ.}$ είναι ομόρροπη της μεταβολής της ορμής (σχήμα)

Το μέτρο της είναι $F_{ολ.} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{9}{0,1} = 90N$

γ) Η αλγεβρική τιμή είναι $F_{ολ.} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{\Delta t} = \frac{-4-5}{0,1} = -90N$

δ)



Από την αλγεβρική τιμή $F_{ολ.}$ = -90N αντικαθιστώντας την $F_{ολ.}$ με τις συνιστώσες της έχουμε:

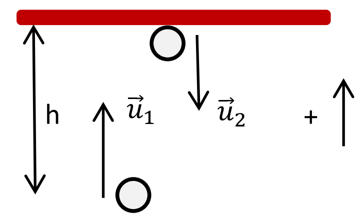
$W+F_{δαπ.->μπαλα}$ = -90

Η αλγεβρική τιμή του βάρους είναι W =+10N

Θέτουμε την αλγεβρική τιμή της $F_{δαπ.->μπαλα}$ θετική γιατί δεν την ξέρουμε. Θα μας τη βγάλει η εξίσωση.

10 $+F_{δαπ.->μπαλα}$ = -90 => $F_{δαπ.->μπαλα}$ = -90 – 10 => $F_{δαπ.->μπαλα}$ = -100 N

Εφαρμογή 4



Στη μπάλα μάζας m=1Kg που βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση h=0,55m από το ταβάνι, δίνουμε κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου u_1 = 6m/s , προς τα πάνω. Κατά την επαφή της μπάλας με το ταβάνι, η μπάλα χάνει το 36% της κινητικής της ενέργειας. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς τα πάνω . Στο χρονικό διάστημα Δt=0,1s της επαφής της μπάλας με το ταβάνι να βρεθούν:

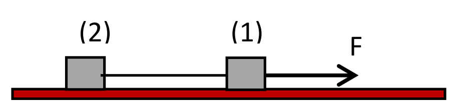
α) Η μεταβολή της ορμής (διάνυσμα) της μπάλας. (Απ. Κατεύθυνση προς τα κάτω. Μέτρο Δp =9Kg m/s)

β) Η μέση συνισταμένη δύναμη (διάνυσμα) (Απ. Κατεύθυνση προς τα κάτω. Μέτρο $F_{ολ.}$=90N)

γ) Η αλγεβρική τιμή της μέσης συνισταμένης δύναμης (Απ. $F_{ολ.}$= - 90N)

δ) Η αλγεβρική τιμή της μέσης δύναμης που ασκείται από το ταβάνι στη μπάλα.(Απ. F= - 80N)

Παράδειγμα 5



Τα σώματα (1),(2) συνδέονται με οριζόντιο, αβαρές, μη ελαστικό, τεντωμένο νήμα και κινούνται πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση της οριζόντιας δύναμης F στο σώμα (1). Ισχύει $p_1=2p_2$, όπου p_1,p_2 τα μέτρα των ορμών των σωμάτων (1),(2).

Α. Η σχέση μεταξύ των ρυθμών μεταβολής της ορμής των σωμάτων είναι

α) $2\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{\Delta p_2}{\Delta t}$ β) $\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = 2\frac{\Delta p_2}{\Delta t}$ (+ αιτιολόγηση)

Β. Η σχέση μεταξύ του μέτρου της τάσης του νήματος Τ και του μέτρου της δύναμης F είναι

α) $T = F/2$ β) $T = F/3$ (+ αιτιολόγηση)

Γ. Η σχέση μεταξύ των ρυθμών μεταβολής της κινητικής ενέργειας των σωμάτων είναι

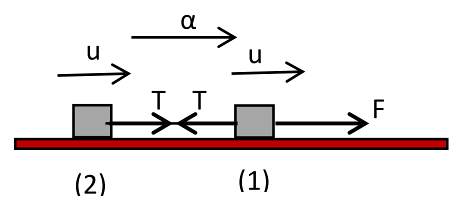
α) $2\,\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \frac{\Delta K_2}{\Delta t}$ β) $\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = 2\,\frac{\Delta K_2}{\Delta t}$ (+ αιτιολόγηση)

Δ. Η ισχύς της δύναμης F και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος (2) συνδέονται με τη σχέση.

α) $P_F = 2\,\frac{\Delta K_2}{\Delta t}$ β) $P_F = 3\,\frac{\Delta K_2}{\Delta t}$ (+ αιτιολόγηση)

Απάντηση.

Τα σώματα και το νήμα έχουν κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα u και σε κάθε απειροελάχιστο Δt την ίδια μεταβολή ταχύτητας, Δu άρα την ίδια επιτάχυνση $\alpha = \frac{\Delta u}{\Delta t}$



Από τη σχέση $p_1 = 2p_2 \Rightarrow m_1 u = 2m_2 u \Rightarrow m_1 = 2m_2$

Α.

$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = F_{ολ.(1)} = m_1\alpha \Rightarrow \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = 2\,m_2\alpha$ (1)

$\frac{\Delta p_2}{\Delta t} = F_{ολ.(2)} = m_2\alpha$ και με αντικατάσταση στην (1) $\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = 2\,\frac{\Delta p_2}{\Delta t}$ (Το β))

Β.

Τα μέτρα των τάσεων του νήματος στα σώματα είναι ίσα Τ-Τ.

(Επειδή το νήμα είναι αβαρές $m_{νημ.} = 0$ και από το Β Νόμο στο νήμα $\Sigma F = m_{νημ.}\alpha = 0 \Rightarrow$ $T_{σώμα1\to νήμα} - T_{σώμα2\to νήμα} = 0 \Rightarrow T_{σώμα1\to νήμα} = T_{σώμα2\to νήμα}$ και λόγω Δ-Α $T_{νήμα\to σώμα1} = T_{νήμα\to σώμα2} = T$)

Εφαρμόζουμε τον Β Νόμο σε κάθε σώμα

Σώμα (1) : $\Sigma F_{x(1)} = m_1\alpha \Rightarrow F - T = m_1\alpha \Rightarrow F - T = 2m_2\alpha$ (2)

Σώμα (2) : $\Sigma F_{x(2)} = m_2\alpha \Rightarrow T = m_2\alpha$ και με αντικατάσταση στη (2) $F - T = 2T \Rightarrow$ $F = 3T \Rightarrow T = F/3$ (Το β))

Γ.

$\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \Sigma F_{(1)}\,u \Rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta t} = m_1\,\alpha\,u \Rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta t} = 2m_2\,\alpha\,u$ (3)

$\frac{\Delta K_2}{\Delta t} = \Sigma F_{(2)}\,u \Rightarrow \frac{\Delta K_2}{\Delta t} = m_2\,\alpha\,u$ και με αντικατάσταση στην (3) $\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = 2\,\frac{\Delta K_2}{\Delta t}$ (Το β))

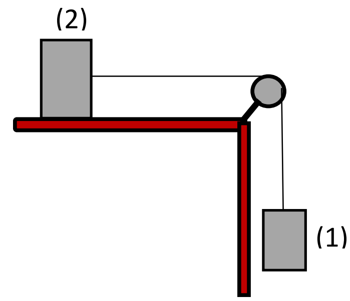
Δ.

$P_F = Fu$ όμως $F=3T$ άρα $P_F = 3T\,u$ (4)

$\frac{\Delta K_2}{\Delta t} = \Sigma F_{(2)}\,u$ όμως $\Sigma F_{(2)}=T$ άρα $\frac{\Delta K_2}{\Delta t} = T\,u$ (5)

(3), (4) => $P_F = 3\frac{\Delta K_2}{\Delta t}$ (Το β))

Εφαρμογή 5



Το σώμα (2) συνδέεται με το οριζόντιο τμήμα αβαρούς , μη ελαστικού, τεντωμένου νήματος και κινείται πάνω στο λείο, οριζόντιο επίπεδο. Το νήμα περνάει από τη λεία επιφάνεια της περιφέρειας ακίνητης τροχαλίας και το κατακόρυφο τμήμα του συνδέεται με σώμα (1). Η σχέση μεταξύ των μέτρων των ρυθμών μεταβολής της ορμής των σωμάτων είναι $\frac{\Delta p_2}{\Delta t} = 2\,\frac{\Delta p_1}{\Delta t}$

Α. Η σχέση μεταξύ των μέτρων των ορμών είναι.

α) $p_1=2p_2$ β.) $p_2=2p_1$ (+ αιτιολόγηση)

Β. Η σχέση μεταξύ του μέτρου της τάσης του νήματος Τ και του μέτρου της δύναμης του βάρους του σώματος (1) W_2 είναι

α) $T = W_2/3$ β.) $T = 2W_2/3$ (+ αιτιολόγηση)

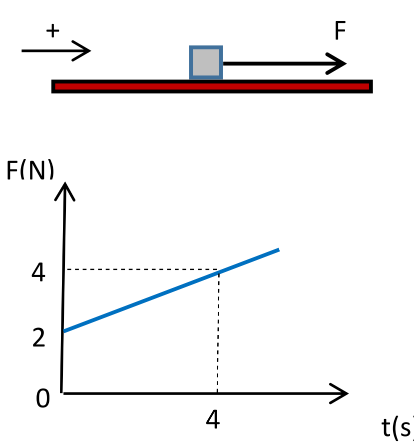
Γ. Η σχέση μεταξύ των ρυθμών μεταβολής της κινητικής ενέργειας των σωμάτων είναι

α.) $\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = 2\frac{\Delta K_2}{\Delta t}$ β) $2\,\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \frac{\Delta K_2}{\Delta t}$ (+ αιτιολόγηση)

Δ. Η σχέση μεταξύ του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος (2) και του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος (1) στο πεδίο βαρύτητας του σώματος (1) ,είναι

α) $\frac{\Delta K_2}{\Delta t} = -\frac{3}{2}\frac{\Delta U_1}{\Delta t}$ β.) $\frac{\Delta K_2}{\Delta t} = -\frac{1}{3}\frac{\Delta U_1}{\Delta t}$ γ) $\frac{\Delta K_2}{\Delta t} = -3\,\frac{\Delta U_1}{\Delta t}$ (+ αιτιολόγηση)

Παράδειγμα 6 (Δ)



Σε σώμα που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη προς τα δεξιά . Η αλγεβρική τιμή της δύναμης μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, σύμφωνα με το διάγραμμα του διπλανού σχήματος. Η μάζα του σώματος είναι m=1Kg. Να βρεθούν:

α) Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t=2s.

β) Η εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ) Το έργο της δύναμης από t=0 μέχρι t=4s

ε) Τη χρονική στιγμή t_3 που το έργο της δύναμης από t=0 μέχρι $t=t_3$ είναι W=220,5 J

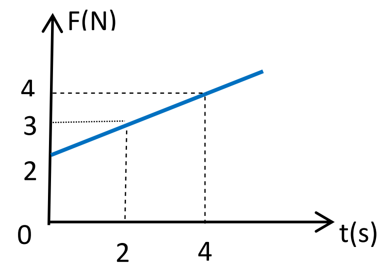
Απάντηση

α) Η εξίσωση της αλγεβρικής τιμής της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι: $F = 2 + \frac{\Delta F}{\Delta t}t$ => $F = 2 + \frac{4-2}{4-0}t$ =>

$F = 2 + 0,5\,t$ και για t=2s F= 3N.

Το εμβαδόν του τραπεζίου από t=0 μέχρι t=2s, ισούται με τη μεταβολή της ορμής στο διάστημα 0-2s.

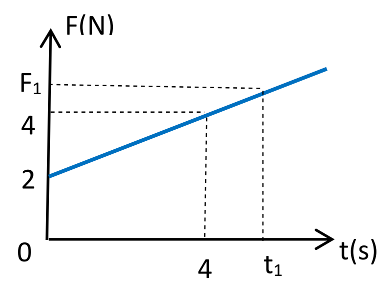
$\Delta p = \frac{3+2}{2}\cdot 2$ => $p_2 - p_0 = 5$ => $mu_2 - 0 = 5$ => $u_2 = 5m/s$



β)

Θεωρούμε την αλγεβρική τιμή της δύναμης μια τυχαία χρονική στιγμή t_1 : $F = 2 + 0,5\,t_1$

Το εμβαδόν του τραπεζίου από t=0 μέχρι $t= t_1$ ισούται με τη μεταβολή της ορμής στο διάστημα $0\text{-}t_1$.

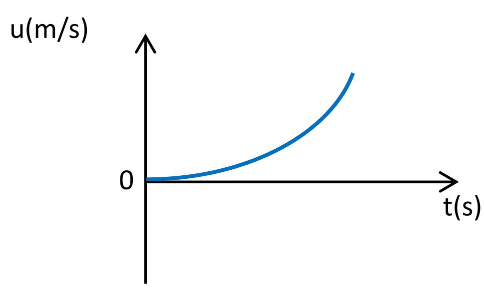


$\Delta p = \frac{2+F_1}{2}\cdot t_1$ => $p_1 - p_0 = \frac{2+2+0,5t_1}{2}\cdot t_1$ =>

$mu_1 - 0 = (2 + 0,25\,t_1)\,t_1$ => $u_1 = 2\,t_1 + 0,25\,t_1^2$ και για οποιοδήποτε t : $u = 2\,t + 0,25\,t^2$

γ)

$u = 2\,t + 0,25\,t^2$



δ)

Τη χρονική στιγμή t=4s η ταχύτητα είναι $u = 2\cdot 4 + 0,25\cdot 4^2 = 12m/s$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από από t=0 μέχρι t=4s : $\Delta K = W_F$ => $W_F = K_4 - K_0$

=> $W_F = \frac{1}{2}\,1\,12^2 - 0 = 72$ J ε)

Από το ΘΜΚΕ από t=0 μέχρι $t=t_3$: $\Delta K = W_F$ => $K_3 - 0 = 450$ => $\frac{1}{2} 1 u_3^2 - 0 = 220,5$

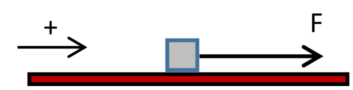
=> $u_3^2 = 441$ => $u_3 = 21m/s$

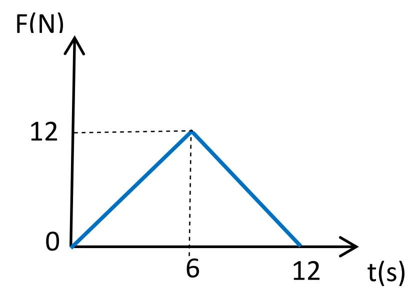
Από την εξίσωση $u = 2t + 0,25t^2$ για $u_3 = 21m/s$ έχουμε $21 = 2t_3 + 0,25t_3^2$ =>

$0,25t_3^2 + 2t_3 - 21 = 0$ που έχει λύσεις $t_3 = 6$ και $t_3 = -14$. Δεκτή η $t_3 = 6s$

Εφαρμογή 6 (Δ)

Σε σώμα που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη προς τα δεξιά . Η αλγεβρική τιμή της δύναμης μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, σύμφωνα με το διάγραμμα του διπλανού σχήματος. Η μάζα του σώματος είναι m=1Kg και ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος –επιπέδου είναι μ=0,4





Να βρεθούν.

α) Η χρονική στιγμή που αρχίζει να κινείται το σώμα.

(Απ. t=2s)

β) Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t=6s.

(Απ. u= 16m/s)

γ) Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος. (Απ. u= 32m/s)

δ) Η χρονική στιγμή που ακινητοποιείται το σώμα. (Απ. t=19s)

ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ - ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΩΜΑΤΩΝ. ΜΟΝΩΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Εξωτερικές δυνάμεις σε σύστημα σωμάτων ονομάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος, από άλλα σώματα που βρίσκονται στο περιβάλλον του συστήματος

Εσωτερικές δυνάμεις σε σύστημα σωμάτων ονομάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος .Οι εσωτερικές δυνάμεις είναι ανά δύο αντίθετες λόγω του τρίτου νόμου (Δ-Α).

Όταν υπολογίζουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων του συστήματος , η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.

$\Sigma F_{συσ.} = \Sigma F_{εσ.(συσ.)} + \Sigma F_{εξ.(συσ.)} = \Sigma F_{εξ.(συσ.)}$

Μονωμένο λέγεται ένα σύστημα σωμάτων στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων και σύμφωνα με την παραπάνω σχέση και η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων ,είναι μηδέν.

$\Sigma F_{συσ.} = \Sigma F_{εξ.(συσ.)} = 0$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ (Α.Δ.Ο.) ΣΕ ΜΟΝΩΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΩΜΑΤΩΝ.

Σε μονωμένο σύστημα σωμάτων και για οποιεσδήποτε μεταβολές των ορμών των σωμάτων του , η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Απόδειξη 1.

Εφαρμόζουμε τον γενικευμένο νόμο στο σύστημα:

$\vec{F}_{ολ(συσ.)} = \frac{\Delta\vec{p}_{συσ.}}{\Delta t}$ => $\vec{F}_{ολ(εσωτερικές\ στο\ σύστημα))} + \vec{F}_{ολ(εξωτερικές\ στο\ σύστημα\ )} = \frac{\Delta\vec{p}_{συσ.}}{\Delta t}$ όμως

$\vec{F}_{ολ(εσωτερικές\ στο\ σύστημα))} = 0$ γιατί είναι ανά δύο αντίθετες λόγω Δ-Α.

Άρα $\vec{F}_{ολ(εξωτερικές\ στο\ σύστημα\ )} = \frac{\Delta\vec{p}_{συσ.}}{\Delta t}$

Επειδή το σύστημα είναι μονωμένο ισχύει :$\vec{F}_{ολ(εξωτερικές\ στο\ σύστημα\ )} = 0$

Επομένως η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι μηδέν.

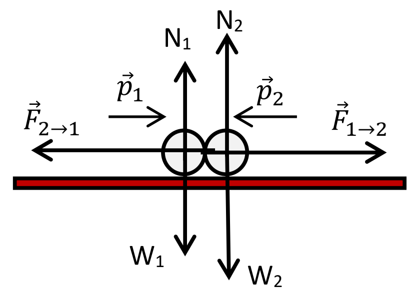
$\Delta\vec{p}_{συσ.} = 0$ => $\vec{p}_{2(συσ.)} - \vec{p}_{1(συσ.)} = 0$ => $\vec{p}_{2(συσ.)} = \vec{p}_{1(συσ.)}$

Για οποιεσδήποτε μεταβολές στις ορμές των σωμάτων σε ένα μονωμένο σύστημα σωμάτων, η ορμή του συστήματος πριν τις μεταβολές ,ισούται με την ορμή του συστήματος μετά τις μεταβολές αυτές.

$\boldsymbol{\vec{p}_{πρίν(συσ.)} = \vec{p}_{μετά(συσ.)}}$ **ή** $\boldsymbol{\vec{p}_{αρχική(συσ.)} = \vec{p}_{τελική(συσ.)}}$

Απόδειξη 2.

Θεωρούμε ότι οι δύο ομογενείς, ισομεγέθεις σφαίρες με βάρη w_1 , w_2 κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Οι σφαίρες συγκρούονται . Τα διανύσματα των ορμών των κέντρων τους πριν την κρούση τους βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται . από τα κέντρα τους Στο σημείο επαφής τους ασκούνται αντίθετες δυνάμεις από τη μία σφαίρα στην άλλη (λόγω Δ-Α)



προς τα κέντρα τους, κάθε στιγμή. Επομένως κατά τη διάρκεια της κρούσης και οι μέσες τιμές των δυνάμεων από τη μία σφαίρα στην άλλη είναι αντίθετες. $\vec{F}_{1\to2} =- \vec{F}_{2\to1}$

Επειδή τα σώματα κινούνται οριζόντια η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων w_1 ,N_1 , w_2 ,N_2 είναι μηδέν. Άρα το σύστημα είναι μονωμένο.

Από τη σχέση $\vec{F}_{1\to2} = - \vec{F}_{2\to1}$ => $\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} = - \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t}$ => $\Delta\vec{p}_2 = - \Delta\vec{p}_1$ => $\overrightarrow{p'}_2 - \vec{p}_2 = -(\overrightarrow{p'}_1 - \vec{p}_1)$ =>

$\overrightarrow{p'}_2 - \vec{p}_2 = - \overrightarrow{p'}_1 + \vec{p}_1$ => $\overrightarrow{p'}_2 + \overrightarrow{p'}_1 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ => $\vec{p}_{ολ.πριν} = \vec{p}_{ολ.μετά}$ (ΑΔΟ)

Αν θεωρήσουμε τις αλγεβρικές τιμές των ορμών στην οριζόντια διεύθυνση, η σχέση γίνεται : $p_{ολ.πριν} = p_{ολ.μετά}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ Α.Δ.Ο. ΣΕ ΜΟΝΩΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΩΜΑΤΩΝ.

Α. Αν τα σώματα πριν και μετά τις μεταβολές των ορμών των σωμάτων κινούνται στην ίδια διεύθυνση , εφαρμόζουμε την ΑΔΟ με τις αλγεβρικές τιμές των ορμών στη διεύθυνση αυτή:

$p_{ολ.(τελ)} = p_{ολ.(αρχ)}$ => $p_{1.(τελ)} + p_{2.(τελ)} + \ldots = p_{1.(αρχ)} + p_{2.(αρχ)} + \ldots$

Β. Αν τα σώματα πριν και μετά τις μεταβολές των σωμάτων των ορμών κινούνται στη ίδιο επίπεδο , εφαρμόζουμε την ΑΔΟ

B_1. με τη διανυσματική της μορφή $\vec{p}_{ολ.(τελ)} = \vec{p}_{ολ.(αρχ)}$ => $\overrightarrow{p'}_1 + \overrightarrow{p'}_2 + \ldots = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots$

ή

B_2 αναλύουμε τις ορμές πριν και μετά τη στιγμή που γίνονται οι μεταβολές των ορμών των σωμάτων σε κάθετους άξονες 0x-0ψ και παίρνουμε τις αλγεβρικές τους τιμές σε κάθε άξονα.

$p_{x\ ολ.(τελ)} = p_{x\ ολ.(αρχ)}$ και $p_{ψ\ ολ.(τελ)} = p_{ψ\ ολ.(αρχ)}$

(Θα το δούμε στην ύλη της Γ Λυκείου)

Παράδειγμα 1

Σφαίρα (1) μάζας m_1 = 1 Kg κινείται με ταχύτητα μέτρου u_1 = 8m/s και συγκρούεται με ακίνητη, ισομεγέθη, σφαίρα (2) μάζας m_2 = 2Kg . Μετά την κρούση οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των σφαιρών συμπίπτουν με τη διεύθυνση της ταχύτητας που είχε η σφαίρα (1) πριν την κρούση. Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας (2) μετά την κρούση είναι u_2' = 2m/s. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς την κατεύθυνση της u_1.

Να βρείτε

α) Την ταχύτητα της σφαίρας (1) μετά την κρούση

β) Τις μεταβολές των ορμών των σφαιρών κατά την κρούση τους

γ) Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκεί η σφαίρα (1) στη σφαίρα (2) και της μέσης δύναμης που ασκεί η σφαίρα (2) στη σφαίρα (1) κατά την κρούση , αν ο χρόνος επαφής μεταξύ τους είναι $\Delta t=0{,}01s$

δ) Τα έργα των δυνάμεων που ασκεί η κάθε σφαίρα στην άλλη σφαίρα.

Απάντηση

α) Το σύστημα των σφαιρών είναι μονωμένο. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ

$p_{(\pi\rho\iota\nu)} = p_{(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})}$ => $p_1 = p_1' + p_2'$ => $m_1u_1 = m_1u_1' + m_2u_2'$ => $8 = u_1' + 4$ => $u_1'=4$ m/s

β) $\Delta p_1 = p_1' - p_1 = m_1u_1' - m_1u_1 = 4-8= -4$Kg m/s

$\Delta p_2 = p_2' - p_2 = m_2u_2' - m_2u_2 = 4-0= 4$Kg m/s

γ) $\bar{F}_{1\to 2} = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = \frac{4}{0{,}01} = 400N$

$\bar{F}_{2\to 1} = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{|-4|}{0{,}01} = 400N$

δ) Η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα (1) , είναι από τη σφαίρα (2). Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ στο σώμα (1). $\Delta K_1 = W_F$ => $W_F = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2$ => $W_F = \frac{1}{2} 1\cdot 4^2 - \frac{1}{2} 1\cdot 8^2 = -24J$

Η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα (2) , είναι από τη σφαίρα (1). Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ στο σώμα (2). $\Delta K_2 = W_F$ => $W_F = \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2$ => $W_F = \frac{1}{2} 2\cdot 2^2 - 0 = 4J$

Εφαρμογή 1

Δύο ισομεγέθεις σφαίρες (1), (2) με μάζες $m_1= 2$Kg , $m_2= 4$Kg συγκρούονται μεταξύ τους με αντίρροπες ταχύτητες μέτρων u_1,u_2. Μετά την κρούση η σφαίρα (1) ακινητοποιείται και η διεύθυνση της ταχύτητας της σφαίρας (2) συμπίπτει με τη διεύθυνση που είχαν οι ταχύτητες πριν την κρούση. Το έργο της δύναμης από τη σφαίρα (1) στη σφαίρα (2) είναι $W_{1\text{->}2} = 0$ και το έργο της δύναμης από τη σφαίρα (2) στη σφαίρα (1) είναι $W_{2\text{->}1} = -64J$.

Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς την κατεύθυνση της u_1.

Να βρείτε

α) Τις ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση (Απ. $u_1 = 8m/s$,$u_2.= 2m/s$)

β) Τις αλγεβρικές τιμές των μεταβολών των ορμών των σφαιρών κατά την κρούση τους.

(Απ. Δp_1 = -16Kg m/s , Δp_2 = 16Kg m/s)

γ) Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκεί η σφαίρα (1) στη σφαίρα (2) και της δύναμης που ασκεί η σφαίρα (2) στη σφαίρα (1) κατά την κρούση , αν ο χρόνος επαφής μεταξύ τους είναι Δt=0,01s

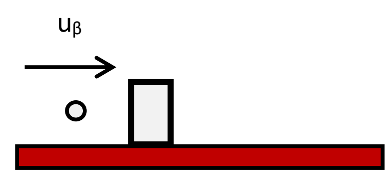
(Απ. $\bar{F}_{1\to2}$ = 1600N , . $\bar{F}_{2\to1}$ = - 1600N)

δ) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σφαιρών κατά την κρούση.

(Απ. $\Delta K_{ολ.}$ = -64J

Παράδειγμα 2

Το σώμα μάζας M=960g είναι ακίνητο πάνω σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα μάζας $m_β$=40g με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_β$=100 m/s , σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα. Το συσσωμάτωμα διανύει απόσταση d=1,6 m , μέχρι να ακινητοποιηθεί. Να βρείτε



α) Το συντελεστή τριβής μεταξύ συσσωματώματος – επιπέδου

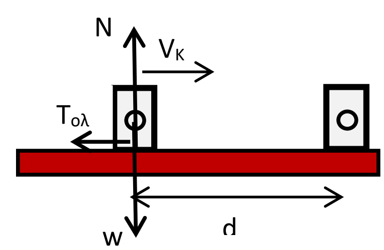
β) Το χρονικό διάστημα της κίνησης του συσσωματώματος.

γ) Τη θερμότητα που εκλύεται όταν σφηνώνεται το βλήμα στο σώμα.

δ) Τη θερμότητα που εκλύεται κατά τη διάρκεια της κίνησης του συσσωματώματος.

Απάντηση

α) Το σύστημα βλήμα – σώμα είναι μονωμένο.



Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στο σύστημα βλήμα- σώμα.

$p_{(πριν)} = p_{(μετά)}$ => $m_β u_β = (m_β + M) V_κ$ =>

$0{,}04 \cdot 100 = 1 \cdot V_κ$ => $V_κ = 4$ m/s

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη μετατόπιση d. $\Delta K = W_{Tολ.}$

=> $0 - \frac{1}{2}(m_β + M)\, V_κ^2 = - T_{ολ.}\, d$ => $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 = T_{ολ.}\, 1{,}6$

=> $T_{ολ.}\, 1{,}6 = 8$ => $T_{ολ.} = 5N$. Επομένως $\mu = \frac{T_{ολ.}}{N}$ => $\mu = \frac{5}{10}$ => $\mu = 0{,}5$

β) Εφαρμόζουμε τον γενικευμένο νόμο για το χρονικό διάστημα της κίνησης του συσσωματώματος.

$T_{ολ.} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ => $T_{ολ.} = \frac{0-(m_β+M)V_κ}{\Delta t}$ => $-5 = \frac{-4}{\Delta t}$ => $\Delta t = \frac{4}{5}$ => $\Delta t = 0{,}8s$

γ) Εφαρμόζουμε την ΑΔΕ πριν και μετά τη στιγμή που σφηνώνεται το βλήμα στο σώμα.

$K_{(βλήματος)} = Q + K_{(συσσωματώματος)}$ => $\frac{1}{2} m_β u_β^2 = Q + - \frac{1}{2}(m_β + M)\, V_κ^2$ => $200 = Q + 8$ =>

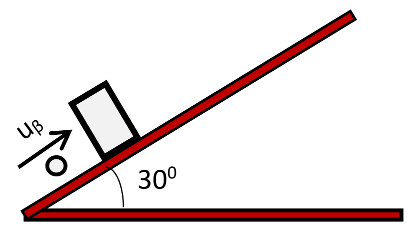
Q= 192J

δ) Η θερμότητα που εκλύεται κατά τη διάρκεια της κίνησης του συσσωματώματος ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής ισούται με τη Q= $|W_{Toλ.}|$ = $T_{oλ.}$d => Q= 5.· 1,6 => Q= 8J

Παρατήρηση : Η αρχική κινητική ενέργεια του βλήματος (200J) μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια τη στιγμή που σφηνώνεται το βήμα στο σώμα (192J) και σε θερμική ενέργεια λόγω της τριβής ολίσθησης κατά την κίνηση του συσσωματώματος (8J).

Εφαρμογή 2

Το σώμα μάζας Μ=960g είναι ακίνητο πάνω στο πλάγιο επίπεδο κλίσης 30^0. Το βλήμα μάζας $m_β$=40g ταχύτητας μέτρου $u_β$=50 m/s στη διεύθυνση του πλάγιου επιπέδου σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ επιπέδου – σώματος είναι μ = $\sqrt{3}$ /3. Να βρείτε



α) Το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα μέχρι να ακινητοποιηθεί . (Απ. S=0,2m)

β) Το χρονικό διάστημα της κίνησης το συσσωματώματος μέχρι να ακινητοποιηθεί. (Απ. Δt= 0,2s)

γ) Τη θερμότητα που εκλύεται όταν σφηνώνεται το βλήμα στο σώμα. (Απ. Q= 48J)

δ) Τη θερμότητα που εκλύεται κατά τη διάρκεια της κίνησης του συσσωματώματος. (Απ. Q= 1J)

Παράδειγμα 3

Σώμα μάζας m=3Kg είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο . Στο σώμα γίνεται έκρηξη με εσωτερικό μηχανισμό και διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες m_1=1Kg και m_2 =2Kg. Τα κομμάτια κινούνται οριζόντια. Το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των κομματιών είναι $K_{ολ.}$ =300J .Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς την κατεύθυνση της ταχύτητας του κομματιού με μάζα $m_{1.}$

Να βρεθούν

α) Οι ταχύτητες των κομματιών μετά την έκρηξη.

β) Οι αλγεβρικές τιμές των μεταβολών των ορμών των κομματιών κατά την έκρηξη

γ) Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται στο κομμάτι με μάζα m_1 και το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται στο κομμάτι με μάζα m_2 ,αν ο χρόνος της έκρηξης είναι $\Delta t=0{,}01s$

δ) Τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στα κομμάτια κατά την έκρηξη.

Απάντηση

α) Επειδή το σώμα είναι ακίνητο, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν. Άρα το σύστημα των κομματιών κατά την έκρηξη είναι μονωμένο. Κατά την έκρηξη λειτουργούν μόνο εσωτερικές δυνάμεις. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ . $p_{ολ.πριν} = p_{ολ.μετά}$ => $0 = m_1u_1 - m_2u_2$ => $u_1 = 2u_2$ (1)

με u_1 ,u_2 τα μέτρα των ταχυτήτων των κομματιών μετά την έκρηξη.

$K_{(ολ.)} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$ => $300 = \frac{1}{2} 1\cdot u_1^2 + \frac{1}{2} 2\cdot u_2^2$ => $u_1^2 + 2\cdot u_2^2 = 600$ και λόγω της (1) $4u_2^2 + 2\cdot u_2^2 = 600$ => $6\cdot u_2^2 = 600$ => $u_2^2 = 100$ => $u_2 = 10m/s$. $u_1 = 20m/s$

β) $\Delta p_1 = p_1 - 0 = m_1u_1 = 20Kg\ m/s$

$\Delta p_2 = p_2 - 0 = -m_2u_2 = -20Kg\ m/s$

γ) $\bar{F}_{1\to2} = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = \frac{|-20|}{0{,}01} = 2000N$

$\bar{F}_{2\to1} = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{20}{0{,}01} = 2000N$

δ) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ στο κομμάτι (1). $\Delta K_1 = W_F$ => $W_F = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - 0$ =>

$W_F = \frac{1}{2} 1\cdot 20^2 = 200J$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ στο κομμάτι (2). $\Delta K_2 = W_F$ => $W_F = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - 0$ =>

$W_F = \frac{1}{2} 2\cdot 10^2 = 100J$

Εφαρμογή 3

Σώμα μάζας m=3Kg είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο . Στο σώμα γίνεται έκρηξη με εσωτερικό μηχανισμό και διασπάται σε τρία ίσα κομμάτια (1), (2) ,(3) Τα κομμάτια κινούνται οριζόντια. Η έκρηξη γίνεται σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 0{,}01s$. Οι ταχύτητες των κομματιών (1),(2) είναι ομόρροπες μεταξύ τους και η ταχύτητα του κομματιού (3) είναι αντίρροπη των ταχυτήτων των (1) ,(2).Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται κατά την έκρηξη στο κομμάτι (1) είναι $F_1 = 4000N$ και το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται κατά την έκρηξη στο κομμάτι (3) είναι $F_3 = 6000N$. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς την κατεύθυνση της ταχύτητας του κομματιού (1).

Να βρεθούν

α) Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των κομματιών μετά την έκρηξη.

(Απ. u_1 = 40m/s ,u_2.= 20m/s, u_3 = 60m/s)

β) Οι αλγεβρικές τιμές των μεταβολών των ορμών των κομματιών κατά την έκρηξη (Απ. Δp_1 =40Kg m/s , Δp_2 = 20Kg m/s Δp_3 = - 60Kg m/s)

γ) Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται στο κομμάτι (2) κατά την έκρηξη (Απ. F_1 = 2000N)

δ) Τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στα κομμάτια κατά την έκρηξη.(Απ. $W_{F(1)}$ = 800J, $W_{F(2)}$ = 200J , $W_{F(3)}$ = 1800J)

ε) Η ολική κινητική ενέργεια των κομματιών μετά την έκρηξη. (Απ. $K_{0\lambda.}$ = 2800J)

Παράδειγμα 4

Σώμα μάζας M= 1Kg είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο . Βλήμα μάζας m=50 g και οριζόντιας ταχύτητας μέτρου u_0 = 200m/s διαπερνάει το σώμα και βγαίνει από αυτό, σε χρονικό διάστημα Δt= 0,01s ,με ταχύτητα μέτρου $u_0/2$. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς την κατεύθυνση της ταχύτητας του βλήματος.

Να βρεθούν

α) Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος μετά την έξοδο του βλήματος.

β) Οι αλγεβρικές τιμές των μεταβολών των ορμών των σωμάτων στο χρονικό διάστημα Δt= 0,01s .

γ) Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται σε κάθε σώμα στο χρονικό διάστημα Δt= 0,01s ,

δ) Τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται που ασκούνται στα σώματα στο χρονικό διάστημα που διαπερνάει το βλήμα το σώμα.

ε) Η μεταβολή της κινητική ενέργειας του συστήματος των σωμάτων, πριν και μετά τη στιγμή που το βλήμα διαπερνάει το σώμα.

Απάντηση

α) Το σύστημα βλήμα- σώμα είναι μονωμένο. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ .

$p_{\text{ολ.πριν}} = p_{\text{ολ.μετά}}$ => $mu_0 = Mu_{\sigma\omega\mu.} + mu_0/2$ => $Mu_{\sigma\omega\mu.} = mu_0/2$ => $u_{\sigma\omega\mu.}$ = 5m/s

β)) $\Delta p_\beta = p_{\beta(\tau)} - p_{\beta(\alpha)} = mu_0/2 - mu_0 = -mu_0/2$ = - 5Kg m/s

$\Delta p_{\sigma\omega\mu.} = p_{\sigma\omega\mu(\tau)} - p_{\sigma\omega\mu(\alpha)} = Mu_{\sigma\omega\mu.} - 0$ = 5Kg m/s

γ)$\bar{F}_{\sigma\omega\mu.\to\beta} = \frac{\Delta p_\beta}{\Delta t} = \frac{|-5|}{0{,}01}$ = 500N

$\bar{F}_{\beta\to\sigma\omega\mu.} = \frac{\Delta p_{\sigma\omega\mu.}}{\Delta t} = = \frac{5}{0{,}01} = 500N$

δ) Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ στο βλήμα πριν την είσοδο και μετά την έξοδό του , από το σώμα..

$\Delta K_\beta = W_{F(\sigma\omega\mu.->\beta)}$ => $W_{F(\sigma\omega\mu.->\beta)} = \frac{1}{2} m_\beta u_0^2 /4 - \frac{1}{2} m_\beta u_0^2$ => $W_{F(\sigma\omega\mu.->\beta)} = - \frac{3}{8} m_\beta u_0^2 /4$ =>

$W_{F(\sigma\omega\mu.->\beta)} = - 750J$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ στο σώμα πριν την είσοδο και μετά την έξοδό του βλήματος .

$\Delta K_{\sigma\omega\mu} = W_{F(\beta.->\sigma\omega\mu.)}$ => $W_{F(\beta.->\sigma\omega\mu.)} = \frac{1}{2} M u_{\sigma\omega\mu.}^2 - 0$ => $W_{F(\beta.->\sigma\omega\mu.)} = \frac{1}{2} M u_{\sigma\omega\mu.}^2 = 12{,}5J$

ε) $\Delta K_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = \frac{1}{2} m_\beta u_0^2 /4 + \frac{1}{2} M u_{\sigma\omega\mu.}^2 - \frac{1}{2} m_\beta u_0^2 = - 750 + 12{,}5$ => $\Delta K_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = -737{,}5 J$

Εφαρμογή 4

Σώμα μάζας Μ= 1Kg είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο . Βλήμα (1) μάζας m_1 =30 g και οριζόντιας ταχύτητας μέτρου u_{01} = 300m/s διαπερνάει το σώμα και βγαίνει από αυτό ,με ταχύτητα μέτρου $u_{01}/3$. Ταυτόχρονα βλήμα (2) μάζας m_2 =20 g και οριζόντιας ταχύτητας μέτρου u_{02} = 200m/s , αντίρροπης της u_{01} , διαπερνάει το σώμα και βγαίνει από αυτό ,με ταχύτητα μέτρου $u_{02}/2$. Ο χρόνος διέλευσης και των δύο βλημάτων μέσα από το σώμα είναι Δt= 0,01s . . Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς την κατεύθυνση της ταχύτητας του βλήματος (1)

Να βρεθούν

α) Η ταχύτητα του σώματος μετά την έξοδο των βλημάτων. (Απ. $u_{\sigma\omega\mu.}$ = 4m/s)

β) Οι μεταβολές των ορμών των σωμάτων στο χρονικό διάστημα Δt= 0,01s . (Απ. $\Delta p_{\beta(1)}$ = -6Kg m/s, $\Delta p_{\beta(2)}$ = 2Kg m/s , $\Delta p_{\sigma\omega\mu.}$ = 4Kg m/s)

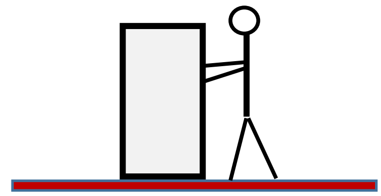
γ) Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται σε κάθε σώμα στο χρονικό διάστημα Δt= 0,01s (Απ.

$\bar{F}_{\sigma\omega\mu\to\beta(1)} = 600N$, $\bar{F}_{\sigma\omega\mu\to\beta(2)} = 200N$, $\bar{F}_{\beta(1)\kappa\alpha\iota\beta(2)\to\sigma\omega\mu.} = 400N$,

δ) Τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται που ασκούνται στα σώματα στο χρονικό διάστημα που διαπερνούν το βλήματα το σώμα. .(Απ. $W_{F(\beta1)}$ = -1200J, $W_{F(\beta2)}$ = -300J , $W_{F(\sigma\omega\mu.)}$ = 8J)

ε) Η μεταβολή της κινητική ενέργειας των σωμάτων πριν και μετά τη στιγμή που τα βλήματα διαπερνούν το σώμα. (Απ. $\Delta K_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}$ = -1492J)

Παράδειγμα 5



Πάνω σε οριζόντια πίστα πάγου βρίσκεται μία ντουλάπα μάζας 2m και ένας μαθητής μάζας m. Ο μαθητής σπρώχνει απότομα τη ντουλάπα και η ντουλάπα αποκτάει ταχύτητα μέτρου u. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς τα δεξιά.

Α. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του μαθητή είναι

α) - 2u β) 2u γ) u /2

Β. Η Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ταχύτητας της ντουλάπας είναι

α) - 2u β) 2u γ) u /2

Γ. Η σχέση της μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ντουλάπας $\Delta K_{ντ}$ με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του μαθητή $\Delta K_{μαθ.}$

α) $\Delta K_{μαθ.} = \Delta K_{ντ.}$ β) $\Delta K_{μαθ.} = 2\Delta K_{ντ.}$ γ) $\Delta K_{μαθ.} =-2\, \Delta K_{ντ.}$

Δ. Η σχέση του έργου της δύναμης που ασκεί ο μαθητής στη ντουλάπα $W_{F(μαθ.\to ντ)}$ με το έργο της δύναμης που ασκεί η ντουλάπα στο μαθητή $W_{F(ντ.\to μαθ)}$ είναι

α) $2W_{F(μαθ.\to ντ)} = - W_{F(ντ.\to μαθ)}$ β) $W_{F(μαθ.\to ντ)} =2\, W_{F(ντ.\to μαθ)}$ γ) $2W_{F(μαθ.\to ντ)} = W_{F(ντ.\to μαθ)}$

Ε. Η χημική ενέργεια που δαπανά ο μαθητής για να σπρώξει την ντουλάπα είναι

α) $E_{χημ.} = 3mu^2$ β) $E_{χημ.} = mu^2$

Απάντηση

Α. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το σύστημα μαθητής-ντουλάπα πριν και μετά το σπρώξιμο.

$p_{ολ.(πριν)} = p_{ολ.(μετά)}$ => $0 = mu_μ + (-2mu)$ => $mu_μ = 2mu$ => $u_μ = 2u$ (το β))

Β. $\Delta u_{ντ} = u_{ντ(τελ)} - u_{ντ(αρχ)}$ => $\Delta u_{ντ} = - 2u - 0$ => $\Delta u_{ντ} = - 2u$ (το α))

Γ. $\Delta K_{ντ} = \frac{1}{2} 2m\, u_{ντ(τελ)}^2 - \frac{1}{2} 2m\, u_{ντ(αρχ)}^2$ => $\Delta K_{ντ} = \frac{1}{2} 2m\, u^2 - 0$ => $\Delta K_{ντ} = m\, u^2$ (1)

$\Delta K_{μαθ} = \frac{1}{2} m\, u_{μαθ(τελ)}^2 - \frac{1}{2} m\, u_{μαθ\,(αρχ)}^2$ => $\Delta K_{μαθ} = \frac{1}{2} m\, (2u)^2 - 0$ => $\Delta K_{μαθ} = 2mu^2$

και με τη σχέση (1) => $\Delta K_{μαθ} = 2\, \Delta K_{ντ}$ (το β))

Δ. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την ντουλάπα $\Delta K_{ντ} = W_{F(μαθ.\to ντ)}$ και από την προηγούμενη ερώτηση

$W_{F(μαθ.\to ντ)} = m\, u^2$ (2)

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το μαθητή $\Delta K_{μαθ} = W_{F(ντ.\to μαθ)}$ και από την προηγούμενη ερώτηση

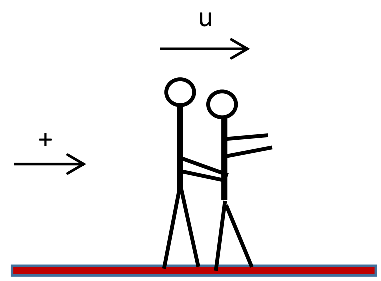
$W_{F(ντ.\to μαθ)} = 2m\, u^2$ και με τη σχέση (2) $W_{F(ντ.\to μαθ)} = 2\, W_{F(μαθ.\to ντ)}$ (το γ))

ΠΑΝΑΝΑΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

Ε. Οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων προέρχονται από την ενέργεια που δαπάνησε ο μαθητής που έσπρωξε τη ντουλάπα. Η ενέργεια αυτή είναι η χημική ενέργεια.

$E_{χημ.} = K_{ντ} + K_{μαθ}$ => $E_{χημ.} = m u^2 + 2mu^2$ => $E_{χημ.} = 3m u^2$ (το α))

Εφαρμογή 5



Ο χορευτής αριστερά με μάζα 1,5m και η χορεύτρια δεξιά με μάζα m κινούνται μαζί πάνω σε οριζόντια πίστα πάγου προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου u. Ο χορευτής κρατάει τη χορεύτρια από τη μέση. Κάποια στιγμή ο χορευτής σπρώχνει απότομα τη χορεύτρια προς τα δεξιά.

Η χορεύτρια αποκτάει ταχύτητα μέτρου 2u.

Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς τα δεξιά.

Α. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του χορευτή μετά το σπρώξιμο είναι

α) u β.) u/3 γ) - u /3

Β. Η Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής του χορευτή είναι

α) mu β.) -mu γ) -mu /3

Γ. Η σχέση της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του χορευτή ΔK_1 με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της χορεύτριας ΔK_2 είναι.

α.) $\Delta K_1 = -\frac{4}{9}\Delta K_2$ β) $\Delta K_1 = \frac{4}{9}\Delta K_2$

Δ. Το έργο της δύναμης που ασκεί ο χορευτής στη χορεύτρια όταν τη σπρώξει W_1 και το έργο της δύναμης που ασκεί η χορεύτρια στο χορευτή στο ίδιο χρονικό διάστημα W_2 , είναι

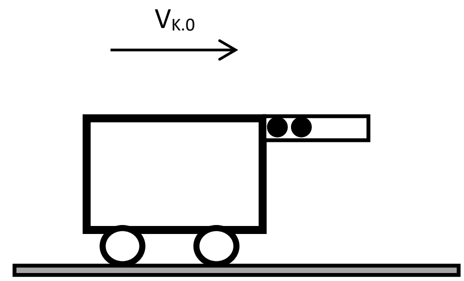
α) $W_1 = \frac{3}{2}mu^2$, $W_2 = \frac{2}{3}mu^2$ β.) $W_1 = \frac{3}{2}mu^2$, $W_2 = -\frac{2}{3}mu^2$ γ) $W_1 = -\frac{3}{2}mu^2$, $W_2 = \frac{2}{3}mu^2$

Ε. Η χημική ενέργεια που δαπανά ο χορευτής για να σπρώξει τη χορεύτρια είναι

α.) $E_{χημ.} = \frac{7}{4}mu^2$ β) $E_{χημ.} = \frac{36}{12}mu^2$

Παράδειγμα 6

Το κανόνι μάζας M=100Kg κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $V_{κ.0}$ προς τα δεξιά. Στην κάνη του υπάρχουν δύο ίδιες οβίδες με $m_{οβ.}$ =1Kg η κάθε μία. Το κανόνι εκτοξεύει την πρώτη οβίδα με ταχύτητα $u_{οβ(1)}$ = 206m/s ως προς το έδαφος και δύο δευτερόλεπτα μετά τη δεύτερη οβίδα με $u_{οβ(2)}$ = 202m/s ως προς το έδαφος. Μετά την εκτόξευση της δεύτερης οβίδας το κανόνι ακινητοποιείται. Τριβές μεταξύ κανονιού και οριζοντίου επιπέδου δεν υπάρχουν και οι εκτοξεύσεις γίνονται σε αμελητέο χρονικό διάστημα.



Να βρεθούν

α) Η ταχύτητα του κανονιού αμέσως μετά την εκτόξευση της πρώτης οβίδας.

β) Η αρχική ταχύτητα $V_{κ.0}$ του κανονιού

γ) Η μετατόπιση του κανονιού από τη στιγμή της εκτόξευσης της πρώτης οβίδας μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Απάντηση

α)

Έστω ότι η ταχύτητα του κανονιού μετά την εκτόξευση της πρώτης οβίδας είναι $V_{κ.1}$.

Εφαρμόζουμε για το σύστημα κανόνι – οβίδα την ΑΔΟ από την αρχή της δεύτερης εκτόξευσης μέχρι το τέλος της δεύτερης εκτόξευσης.

$p_{ολ.(αρχ.)} = p_{ολ.(τελ.)}$ => $(M + m_{οβ.}) V_{κ.1} = m_{οβ.} u_{οβ(2)}$ => $(100 +1) V_{κ.1} = 202$ => $V_{κ.1}$ =2m/s

β)

Εφαρμόζουμε για το σύστημα κανόνι – οβίδες την ΑΔΟ από την αρχή της πρώτης εκτόξευσης μέχρι το τέλος της πρώτης εκτόξευσης.

$p_{ολ.(αρχ.)} = p_{ολ.(τελ.)}$ => $(M + 2m_{οβ.}) V_{κ.0} = (M + m_{οβ.}) V_{κ.1} + m_{οβ.} u_{οβ(1)}$ =>

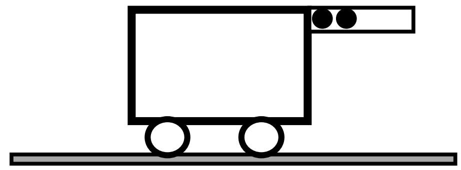
$(100 +2) V_{κ.0} = (100 +1) V_{κ.1} + 206$ => $102 V_{κ.0} = 202 + 206 = 408$ => $V_{κ.0}$ =4m/s

γ) Από το τέλος της πρώτης εκτόξευσης μέχρι την αρχή της δεύτερης εκτόξευσης το κανόνι εκτελεί ΕΟΚ με ταχύτητα $V_{κ.1}$ =2m/s

Άρα $\Delta x_{κ} = V_{κ.1}\, t$ => $\Delta x_{κ}$ = 4m

Εφαρμογή 6

Το κανόνι μάζας M=100Kg είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στην κάνη του υπάρχουν δύο ίδιες οβίδες με $m_{οβ.}$ =1Kg η κάθε μία. Το κανόνι εκτοξεύει την πρώτη οβίδα με ταχύτητα $u_{οβ(1)}$ = 204m/s ως προς το έδαφος και ένα δευτερόλεπτο μετά τη δεύτερη οβίδα με $u_{οβ(2)}$ = 99m/s ως προς το έδαφος. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ κανονιού – οριζοντίου επιπέδου είναι μ=0,1. Οι εκτοξεύσεις των οβίδων γίνονται σε αμελητέο χρονικό διάστημα.



Να βρεθούν

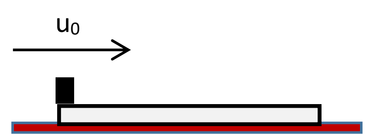
α) Η ταχύτητα του κανονιού αμέσως μετά την εκτόξευση της πρώτης οβίδας.(Απ. $V_{κ.1}$ =2m/s προς τα αριστερά)

β) Η ταχύτητα του κανονιού αμέσως μετά την εκτόξευση της δεύτερης οβίδας.(Απ. $V_{κ.2}$ =2m/s προς τα αριστερά.)

γ) Η μετατόπιση του κανονιού από τη στιγμή της εκτόξευσης της πρώτης οβίδας μέχρι να ακινητοποιηθεί. (Απ. $\Delta x_κ$ = 3,5m)

Παράδειγμα 7 (Δ)

Ομογενής δοκός μήκους d είναι ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο αριστερό άκρο της δοκού βρίσκεται σώμα αμελητέων διαστάσεων μάζας m= 1Kg. Με ένα απότομο, οριζόντιο χτύπημα ,δίνουμε οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_0=5m/s στο σώμα προς τα δεξιά. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος – δοκού είναι μ=0,8. Το σώμα ακινητοποιείται ως προς τη δοκό, στο δεξιό της άκρο. Αν οι μάζες των σωμάτων είναι $m_{δοκ.}$ = 4Kg , $m_{σ.}$ = 1Kg να βρεθούν:



α) Η κοινή ταχύτητα των σωμάτων.

β) Το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που στο σώμα δόθηκε u_0, μέχρι να αποκτήσουν τα σώματα κοινή ταχύτητα.

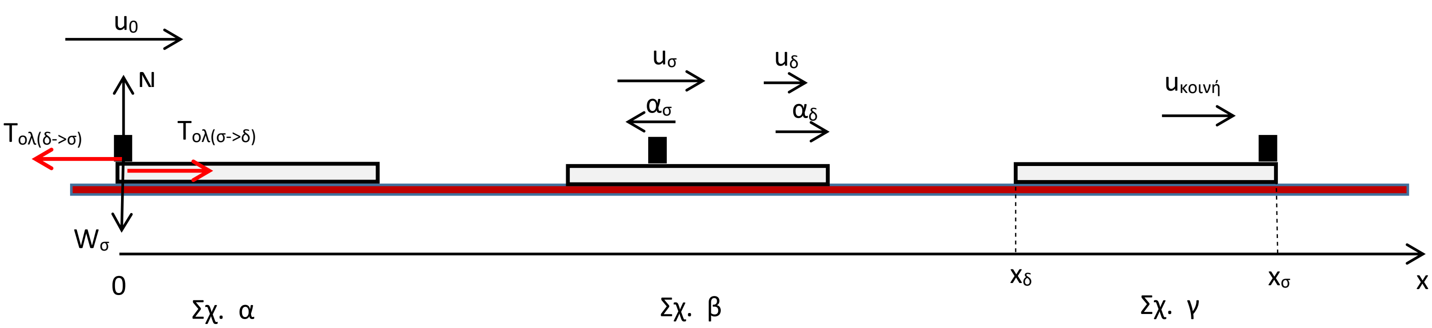
γ) Οι μετατοπίσεις των σωμάτων από την αρχική τους θέση μέχρι να αποκτήσουν τα σώματα κοινή ταχύτητα.

δ) Το μήκος της δοκού.

Απάντηση

Ανάλυση φαινομένου.

Αμέσως μετά το χτύπημα το σώμα κινείται ως προς τη δοκό και του ασκείται τριβή ολίσθησης από τη δοκό $T_{ολ(δ\to σ)} = μ\, N$ με $N = W_σ = 10N$ άρα $T_{ολ(δ\to σ)} = 0,8 \cdot 10 = 8N$ (μέτρο) προς τα αριστερά. Λόγω Δράσης - Αντίδρασης το σώμα ασκεί τριβή ολίσθησης στη δοκό $T_{ολ(σ\to δ)} = 8N$ (μέτρο) προς τα δεξιά. (Σχ. α) . Θεωρούμε κοινό άξονα x για τις κινήσεις με θετική φορά προς τα δεξιά.



Από το Β Νόμο για το σώμα βρίσκουμε την επιτάχυνσή του. $ΣF_x = m_σ\, α_σ \Rightarrow -8 = 1\cdot α_σ \Rightarrow α_σ = -8 m/s^2$

Από το Β Νόμο για τη δοκό βρίσκουμε την επιτάχυνσή της. $ΣF_x = m_δ\, α_δ \Rightarrow 8 = 4\cdot α_δ \Rightarrow α_δ = 2 m/s^2$

Το σώμα εκτελεί ΕΟΕπιβ.Κ και η δοκός εκτελεί ΕΟΕπιτΚ μέχρι να εξισωθούν οι ταχύτητές τους, όταν το σώμα φτάνει στο δεξιό άκρο της ράβδου (Σχ. γ) . Μετά τα σώματα κινούνται μαζί με σταθερή, κοινή ταχύτητα, γιατί η συνισταμένη δύναμη και σε κάθε σώμα και στο σύστημα , είναι μηδέν.

α)

1ος τρόπος (γρήγορος)

Μεταξύ της αρχικής κατάστασης (Σχ. α) και της τελικής κατάστασης (Σχ. γ) όπου τα σώματα αποκτούν την κοινή τους ταχύτητα , εφαρμόζουμε την ΑΔΟ γιατί $ΣF_{εξ}$ για το σύστημα είναι μηδέν.

$p_{ολ.(αρχ)} = p_{ολ.(τελ)} \Rightarrow m_σ\, u_0 = (m_σ + m_δ)\, V_κ \Rightarrow 5 = 5\cdot V_κ \Rightarrow V_κ = 1 m/s$

2ος τρόπος (αργός)

Θεωρούμε t= 0 τη στιγμή που το σώμα αποκτάει την u_0 αμέσως μετά το χτύπημα. Το σώμα και το αριστερό άκρο της δοκού βρίσκονται στη θέση x=0 (Σχ. α)

Η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $u_σ = u_0 + α_σ t = 5-8t$

Η εξίσωση της ταχύτητας της δοκού σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $u_δ = α_δ\, t = 2\, t$

Τη χρονική στιγμή $t_κ$ που αποκτούν κοινή ταχύτητα $V_κ$ τα σώματα ισχύει $u_σ = u_δ \Rightarrow$

$5-8t_κ = 2t_κ \Rightarrow 10t_κ = 5 \Rightarrow t_κ = 0,5s$ και με αντικατάσταση σε μία από τις παραπάνω εξισώσεις τις ταχύτητας $u_σ = V_κ$ = 5-4 = 1 m/s

β) Απαντήθηκε με το $2^ο$ τρόπο του προηγούμενου ερωτήματος $t_κ$ = 0,5s

γ) Η εξίσωση της μετατόπισης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $x_σ= u_0\, t+ \frac{1}{2}\, α_σ t^2$ =>

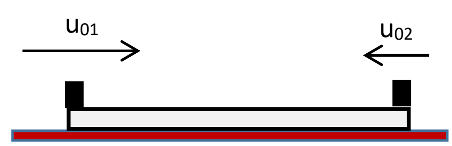
$x_σ= 5\, t- \frac{1}{2}\, 8\, t^2$ και με αντικατάσταση $t= t_κ$ = 0,5s => $x_σ$= 2,5 - 1 => $x_σ$= 1,5m

Η εξίσωση της μετατόπισης της δοκού σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $x_δ= \frac{1}{2}\, α_δ t^2$ =>

$x_δ= \frac{1}{2}\, 2\, t^2$ και με αντικατάσταση $t= t_κ$ = 0,5s => $x_δ$= 0,25m

δ) Το μήκος της δοκού είναι d = $x_σ$ - $x_δ$ = 1,5 – 0,25= 1,25m

Εφαρμογή 7 (Δ)



Ομογενής δοκός μήκους d είναι ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στα άκρα της δοκού βρίσκονται δύο ίδια σώματα (1), (2) αμελητέων διαστάσεων μάζας m= 1Kg το κάθε ένα. Με δύο ταυτόχρονα οριζόντια χτυπήματα στα σώματα , δίνουμε οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_{01}=2m/s προς τα δεξιά στο (1) και ταχύτητα μέτρου u_{02}=1m/s στο σώμα (2) προς τα αριστερά , τη χρονική στιγμή t=0. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των σωμάτων– δοκού είναι μ=0,2 . Η μάζα της δοκού είναι $m_{δοκ.}$ = 2Kg και το μήκος της είναι d. Αν τα σώματα ακινητοποιούνται ως προς τη δοκό στην ίδια θέση χωρίς να συγκρουστούν. Να βρεθούν:

α) Η κοινή ταχύτητα και των τριών σωμάτων . (Απ. $V_κ$ = 0,25m/s)

β) Οι ταχύτητες της δοκού και του σώματος (1) τη στιγμή $t= t_1$ που ακινητοποιείται το σώμα (2)

(Απ. $u_δ$ = 0 u_1 = 1m/s)

γ) Η χρονική στιγμή t_1 (Απ. t_1 = 0,5s)

δ) Τα διαστήματα που διανύουν η δοκός, το σώμα (1) και το σώμα (2) από t=0 μέχρι $t= t_1$

(Απ. $S_δ$ =0 , S_1 = 1m , S_2 = 0,25m)

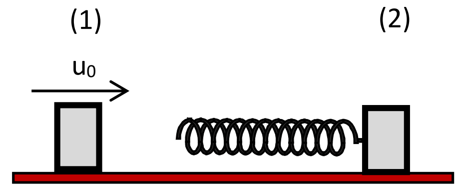
ε) Η χρονική στιγμή t_2 που αποκτούν κοινή ταχύτητα και τα τρία σώματα. (Απ. $t_2 = \frac{5}{4}$ s)

ζ) Η στατική τριβή μεταξύ των σωμάτων (Απ. $T_{στ.} = \frac{2}{3}$ N)

η) Το μήκος της δοκού. (Απ. d = 23/16 m) θ) Η κίνηση των σωμάτων μετά την απόκτηση της κοινής τους ταχύτητας. (Απ.Ε.Ο.Κ με $V_κ$ = 0,25m/s)

Παράδειγμα 8 (Δ)

Το σώμα (2) συνδέεται με οριζόντιο ελατήριο και είναι ακίνητο πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα (1) κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο προς το σώμα (2), στη διεύθυνση του ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου u_0 , και κινητικής ενέργειας K_0. Τα σώματα έχουν ίδια μάζα και ίδιες διαστάσεις. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς τα δεξιά.



Α. Η κοινή ταχύτητα $V_κ$ που αποκτούν τα σώματα είναι

α) $u_0/4$ β) $u_0/2$

Β. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

α) $K_0 /2$ β) $K_0 /4$

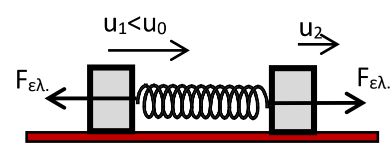
Γ. Όταν το σώμα (1) χάνει την επαφή του με το ελατήριο τα σώματα έχουν ταχύτητες μέτρων $u_{1(τελ)}$, $u_{2(τελ.)}$

α) $u_{1(τελ.)} = u_0/2$, $u_{2(τελ.)} = 3u_0 /2$ β) $u_{1(τελ.)} = 0$, $u_{2(τελ.)} = u_0$

Απάντηση.

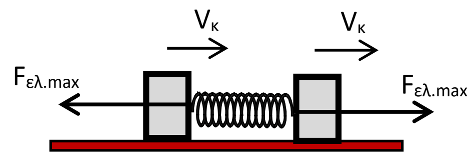
Ανάλυση του φαινομένου

Από τη στιγμή που το σώμα (1) έρχεται σε επαφή με το αριστερό άκρο του ελατηρίου αρχίζει να αυξάνεται η συσπείρωσή του και να να ασκεί δυνάμεις στο σώμα (1) προς αριστερά και στο σώμα (2) προς τα δεξιά. Το σώμα (1) επιβραδύνεται ,το σώμα (2) επιταχύνεται και το σώμα (1) πλησιάζει το σώμα (2) αφού $u_1>u_2$ (Σχ. α)



Σχ. α

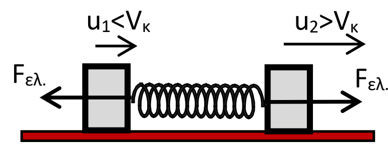
Όταν οι ταχύτητες γίνουν ίσες $V_κ$ το ελατήριο αποκτάει τη μέγιστη συσπείρωσή του , οι δυνάμεις που ασκεί στα σώματα έχουν τη



Σχ. β

μέγιστη τιμή $F_{ελ..max}$ και αυτό έχει τη μέγιστη δυναμική του ενέργεια $U_{ελ.max}$ (Σχ. β)

Μετά την απόκτηση από τα σώματα της $V_κ$ το σώμα (1) συνεχίζει να επιβραδύνεται , το σώμα (2) να επιταχύνεται και το σώμα (2) να απομακρύνεται από το (1) αφού $u_2>u_1$ (Σχ. γ)



Σχ. γ

Όταν το σώμα (1) χάσει την επαφή του με το ελατήριο , το ελατήριο θα αποκτήσει το φυσικό του μήκος ,το σώμα (2) θα έχει ταχύτητα $u_{2(τελ.)}$ προς τα δεξιά γιατί από την αρχή της κίνησής του επιταχυνόταν προς τα δεξιά και το σώμα (1) είτε θα ακινητοποιηθεί αν είναι το τέλος της επιβραδυνόμενης κίνησής του είτε θα κινηθεί αν η ταχύτητά του μηδενιστεί πριν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος.

Α.

Ισχύει η ΑΔΟ μεταξύ οποιωνδήποτε καταστάσεων για το σύστημα γιατί $ΣF_{εξ.}=0$ σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το σύστημα των δύο σωμάτων μεταξύ της αρχικής κατάστασης και της κατάστασης που τα σώματα έχουν αποκτήσει την κοινή τους ταχύτητα $V_κ$.

$p_{ολ.(αρχ)} = p_{ολ.(τελ)}$ => $mu_0 = (m+m)\, V_κ$ => $V_κ = u_0 / 2$ (Το β))

Β.

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώματα-ελατήριο διατηρείται γιατί η $ΣF_{εξ.}$ στο σύστημα είναι μηδέν και γιατί μεταξύ των σωμάτων –ελατηρίου ασκούνται οι εσωτερικές, συντηρητικές δυνάμεις του ελατηρίου. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για το σύστημα σώματα-ελατήριο μεταξύ της αρχικής κατάστασης και της κατάστασης που τα σώματα έχουν αποκτήσει την κοινή τους ταχύτητα $V_κ$

$E_{μηχ.(αρχ)} = E_{μηχ.(τελ.)}$ => $K_0 = U_{ελ.max} + \frac{1}{2} 2m\, V_κ^2$ => $K_0 = U_{ελ.max} + m\, V_κ^2$ όμως $V_κ = u_0 / 2$ => $V_κ^2 = u_0^2 / 4$ άρα $K_0 = U_{ελ.max} + m\, u_0^2 / 4$ => $K_0 = U_{ελ.max} + K_0 /2$ => $U_{ελ.max} = K_0/2$ (Το α))

Γ.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το σύστημα μεταξύ της αρχικής κατάστασης και της κατάστασης τη στιγμή που το σώμα (1) χάνει την επαφή του με το ελατήριο. Έστω $u_{1(τελ)}$, $u_{2(τελ)}$ οι ταχύτητες των σωμάτων στη δεύτερη κατάσταση.

$p_{ολ.(αρχ)} = p_{ολ.(τελ)}$ => $mu_0 = m\, u_{1(τελ)} + m\, u_{2(τελ)}$ => $u_0 = u_{1(τελ)} + u_{2(τελ)}$ (1)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για το σύστημα μεταξύ των δύο καταστάσεων.

$E_{\mu\eta\chi.\,(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi.\,(\tau\varepsilon\lambda.)}$ => $\frac{1}{2} m u_0^2 = \frac{1}{2} m u_{1(\tau\varepsilon\lambda)}^2 + \frac{1}{2} m u_{2(\tau\varepsilon\lambda)}^2$ => $u_0^2 = u_{1(\tau\varepsilon\lambda)}^2 + u_{2(\tau\varepsilon\lambda)}^2$ (2)

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) ως προς τις ταχύτητες $u_{1(\tau\varepsilon\lambda)}$, $u_{2(\tau\varepsilon\lambda)}$:

(1) => $u_{1(\tau\varepsilon\lambda)} = u_0 - u_{2(\tau\varepsilon\lambda)}$ και την αντικαθιστούμε στη σχέση (2).

$u_0^2 = (u_0 - u_{2(\tau\varepsilon\lambda)})^2 + u_{2(\tau\varepsilon\lambda)}^2$ => $u_0^2 = u_0^2 - 2 u_{2(\tau\varepsilon\lambda)} u_0 + u_{2(\tau\varepsilon\lambda)}^2 + u_{2(\tau\varepsilon\lambda)}^2$ =>

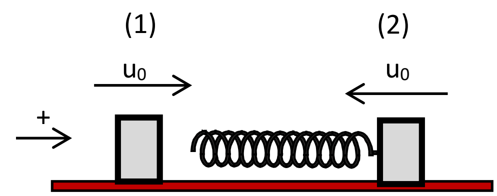
$2u_{2(\tau\varepsilon\lambda)}^2 - 2 u_{2(\tau\varepsilon\lambda)} u_0 = 0$ => $u_{2(\tau\varepsilon\lambda)}(u_{2(\tau\varepsilon\lambda)} - u_0) = 0$ => $u_{2(\tau\varepsilon\lambda)} = u_0$ ή $u_{2(\tau\varepsilon\lambda)} = 0$

Όμως $u_{2(\tau\varepsilon\lambda)} \neq 0$ (το εξηγήσαμε παραπάνω) Άρα $u_{2(\tau\varepsilon\lambda)} = u_0$ και με αντικατάσταση στην (1)

$u_{1(\tau\varepsilon\lambda)} = 0$ (Το γ))

Εφαρμογή 8 (Δ)

Το σώμα (2) συνδέεται με οριζόντιο ελατήριο και κινείται προς τα αριστερά πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα (1) κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο προς το σώμα (2), στη διεύθυνση του ελατηρίου. Οι ταχύτητες των σωμάτων είναι αντίθετες και έχουν μέτρο u_0. Το σώμα (1) έχει κινητική ενέργεια $3K_0$ και το σώμα (2) έχει κινητική ενέργεια K_0. Η θετική φορά για τις αλγεβρικές τιμές είναι προς τα δεξιά.



Α. Η κοινή ταχύτητα V_κ που αποκτούν τα σώματα είναι

α) $-u_0/2$ β.) $u_0/2$

Β. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

α) K_0 β.) $3 K_0$

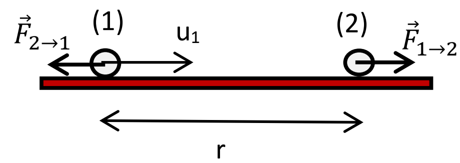
Γ. Όταν το σώμα (1) χάνει την επαφή του με το ελατήριο τα σώματα έχουν ταχύτητες μέτρων

$u_{1(\tau\varepsilon\lambda)}$, $u_{2(\tau\varepsilon\lambda.)}$

α) $u_{1(\tau\varepsilon\lambda.)} = -u_0/2$,$u_{2(\tau\varepsilon\lambda.)} = 7u_0/2$ β.) $u_{1(\tau\varepsilon\lambda.)} = 0$,$u_{2(\tau\varepsilon\lambda.)} = 2u_0$

Παράδειγμα 9 (Δ)

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο πολύ μεγάλων διαστάσεων (απείρων διαστάσεων) είναι ακίνητη φορτισμένη σφαίρα (2), μάζας m_2 =2Kg. Σε φορτισμένη, σφαίρα (1), μάζας m_1=1Kg, δίνουμε ταχύτητα μέτρου u_1=6m/s στη διεύθυνση του επιπέδου προς τη σφαίρα (1), από απόσταση r=4m. Τη στιγμή που δίνουμε ταχύτητα στη σφαίρα (1) η απωστική ηλεκτρική δύναμη μεταξύ των σφαιρών, έχει μέτρο F = 9N.



Θεωρούμε τις διαστάσεις των σφαιρών αμελητέες.

Να βρείτε

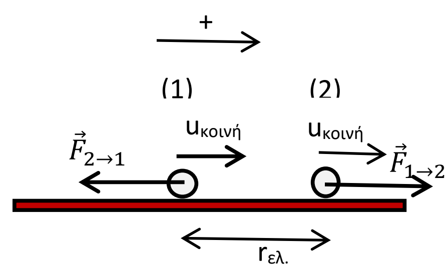
α) Τη ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σφαιρών.

β) Την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια των σφαιρών, όταν μηδενίζεται η ταχύτητα της σφαίρας (1)

γ) Τις ταχύτητες των σφαιρών όταν η απόσταση μεταξύ τους είναι πολύ μεγάλη (άπειρη).

Απάντηση

α) Μετά την εκτόξευση της σφαίρας (1), η σφαίρα (1) επιβραδύνεται και η σφαίρα (2) επιταχύνεται γιατί οι σφαίρες απωθούνται με δυνάμεις Coulomb. Οι σφαίρες θα έχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους όταν αποκτήσουν κοινή ταχύτητα.



Το σύστημα είναι μονωμένο. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ. μεταξύ της αρχικής κατάστασης και της κατάστασης όπου οι σφαίρες έχουν κοινή ταχύτητα. Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.

$p_{(αρχική)} = p_{(τελική)}$ => $p_1 = p_1' + p_2'$ => $m_1u_1 = (m_1 + m_2)\, u_{κοινή}$ => u_1=3 $u_{κοινή}$ $u_{κοινή}$ = 2m/s (1)

Επειδή η δύναμη Coulomb είναι συντηρητική, εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ του συστήματος των δυο φορτισμένων σφαιρών, μεταξύ των δύο καταστάσεων.

$E_{(μηχ.\ αρχική)} = E_{(μηχ.\ τελική)}$ => $\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + K_{ηλ}\frac{q_1q_2}{r} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u_{κοινή}^2 + K_{ηλ}\frac{q_1q_2}{r_{ελ.}}$ (2)

Το μέτρο της δύναμης Coulomb σε απόσταση r μεταξύ των σφαιρών είναι $F = K_{ηλ}\frac{q_1q_2}{r^2}$ =>

$9 = K_{ηλ}\frac{q_1q_2}{4^2}$ => $K_{ηλ.}\, q_1\, q_2 = 144\ Nm^2$ (3)

Με αντικατάσταση από τις (1), (3) στη σχέση (2) => $\frac{1}{2}\ 6^2 + \frac{144}{4} = \frac{1}{2}\, 3 \cdot 2^2 + \frac{144}{r_{ελ.}}$ =>

$18+36 = 6 + \frac{144}{r_{\varepsilon\lambda.}}$ => $\frac{144}{r_{\varepsilon\lambda.}} = 48$ => $r_{\varepsilon\lambda.} = \frac{144}{48}$ => $r_{\varepsilon\lambda.} = 3m$

β) Όταν μηδενίζεται η ταχύτητα της σφαίρας (1) , η ταχύτητα της σφαίρας (2) βρίσκεται με την εφαρμογή της ΑΔΟ , από τη στιγμή που εκτοξεύεται η σφαίρα (1) μέχρι το μηδενισμό της ταχύτητάς της.

$p_{(\alpha\rho\chi\iota\kappa\eta)} = p_{(\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta)}$ => $p_1 = p_2'$ => $m_1u_1 = m_2u_2'$ => $u_2' = 3m/s$ (4)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ του συστήματος μεταξύ των δύο καταστάσεων.

$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + K_{\eta\lambda}\frac{q_1q_2}{r} = \frac{1}{2}m_2 u_2'^2 + U_{(\eta\lambda)}$ και με αντικατάσταση από τις σχέσεις (3), (4) =>

$18+36 = \frac{1}{2}2\cdot 3^2 + U_{(\eta\lambda)}$ => $U_{(\eta\lambda)} = 45J$

γ)

Μετά τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα της σφαίρας (1) , η σφαίρα (1) επιταχύνεται προς τα αριστερά ενώ η σφαίρα (2) συνεχίζει να επιταχύνεται προς τα δεξιά. Η ταχύτητα της σφαίρας (1) στο άπειρο έχει μέτρο $u_{1.\,\alpha\pi.}$ και η ταχύτητα της σφαίρας (2) στο άπειρο έχει μέτρο $u_{2.\,\alpha\pi.}$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ μεταξύ της αρχικής κατάστασης και τις κατάστασης όπου οι σφαίρες φτάνουν στο άπειρο.

$p_{(\alpha\rho\chi\iota\kappa\eta)} = p_{(\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta)}$ => $p_1 = p_{1.\alpha\pi} + p_{2.\alpha\pi}$ => $m_1u_1 = -m_1u_{1.\alpha\pi} + m_2u_{2.\alpha\pi}$ =>

$6 = -u_{1.\alpha\pi} + 2u_{2.\alpha\pi}$ => $u_{1.\alpha\pi} = 2u_{2.\alpha\pi} - 6$ (5)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ του συστήματος μεταξύ των δύο καταστάσεων.

$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + K_{\eta\lambda}\frac{q_1q_2}{r} = \frac{1}{2}m_1u_{1.\alpha\pi}^2 + \frac{1}{2}m_2u_{2\alpha\pi.}^2 + U_{(\eta\lambda.\,\alpha\pi.)}$ => $18+36 = \frac{1}{2}u_{1.\alpha\pi}^2 + \frac{1}{2}2\cdot u_{2\alpha\pi.}^2 + 0$

=> $108 = u_{1.\alpha\pi}^2 + 2\cdot u_{2\alpha\pi.}^2$ και λόγω της (5) $108 = (2u_{2.\alpha\pi} - 6)^2 + 2\cdot u_{2\alpha\pi.}^2$ =>

$108 = 4u_{2.\alpha\pi}^2 - 24u_{2.\alpha\pi} + 6^2 + 2\cdot u_{2\alpha\pi.}^2$ => $6u_{2.\alpha\pi}^2 - 24u_{2.\alpha\pi} + 36 - 108 = 0$ =>

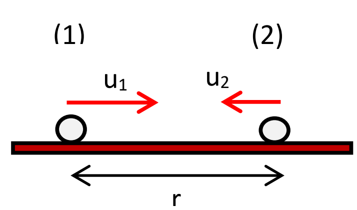
$6u_{2.\alpha\pi}^2 - 24u_{2.\alpha\pi} - 72 = 0$ => $u_{2.\alpha\pi}^2 - 4u_{2.\alpha\pi} - 12 = 0$ Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση.

$\Delta = 4^2 - 4(-12) = 64$, $u_{2.\alpha\pi\,(1,2)} = \frac{4 \pm\sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$ => $u_{2.\alpha\pi\,(1)} = 6m/s$ και $u_{2.\alpha\pi\,(2)} = -2m/s$ (απορ.)

Και από τη σχέση (5) $u_{1.\alpha\pi} = 2\cdot 6 - 6 = 6m/s$

Εφαρμογή 9 (Δ)

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο πολύ μεγάλων διαστάσεων (απείρων διαστάσεων) κρατάμε ακίνητες δύο σημειακές ,φορτισμένες σφαίρες (1), (2) μαζών m_1=1Kg , m_2=2Kg , σε απόσταση r=4m μεταξύ τους. Το μέτρο της απωστικής δύναμης μεταξύ των σφαιρών είναι F= 36N.



Κάποια στιγμή δίνουμε ταυτόχρονα στις σφαίρες αντίρροπες ταχύτητες

μέτρων u_1=8m/s u_2=4m/s, από την κάθε μία προς την άλλη.

Θεωρούμε τις διαστάσεις των σφαιρών αμελητέες.

Να βρείτε

α) Τη ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σφαιρών. (Απ. $r_{ελ.} = \sqrt{3}$m)

β)Τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών, σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους

(Απ. $u_{1.απ.}$=16m/s,$u_{2.απ.}$ =8m/s)

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ (Α.Δ.Ο.) ΣΕ ΣΩΜΑ ΚΑΙ ΣΕ ΜΗ ΜΟΝΩΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΩΜΑΤΩΝ.

Αναλύουμε τις ορμές του σώματος ή των σωμάτων του συστήματος , πριν και μετά τις μεταβολές των ορμών , στη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης (π.χ. στη διεύθυνση του άξονα 0x) και στην κάθετη διεύθυνση (στη διεύθυνση του άξονα 0ψ)

Από τον γενικευμένο νόμο στους άξονες ισχύουν :

$F_{ολ.} = F_{ολ.x} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t}$ ή $F_{1x} + F_{2x} + \ldots = \frac{p_{2x}-p_{1x}}{\Delta t}$ και

$F_{ολψ.} = \frac{\Delta p_\psi}{\Delta t} = 0$ => $\Delta p_\psi=0$ => $p_{\psi\ ολ.(τελ)} = p_{\psi\ ολ.(αρχ)}$ (Η ορμή διατηρείται στη διεύθυνση του άξονα 0ψ)

(Θα το δούμε στην ύλη της Γ Λυκείου)

pananasgiannis@yahoo.gr