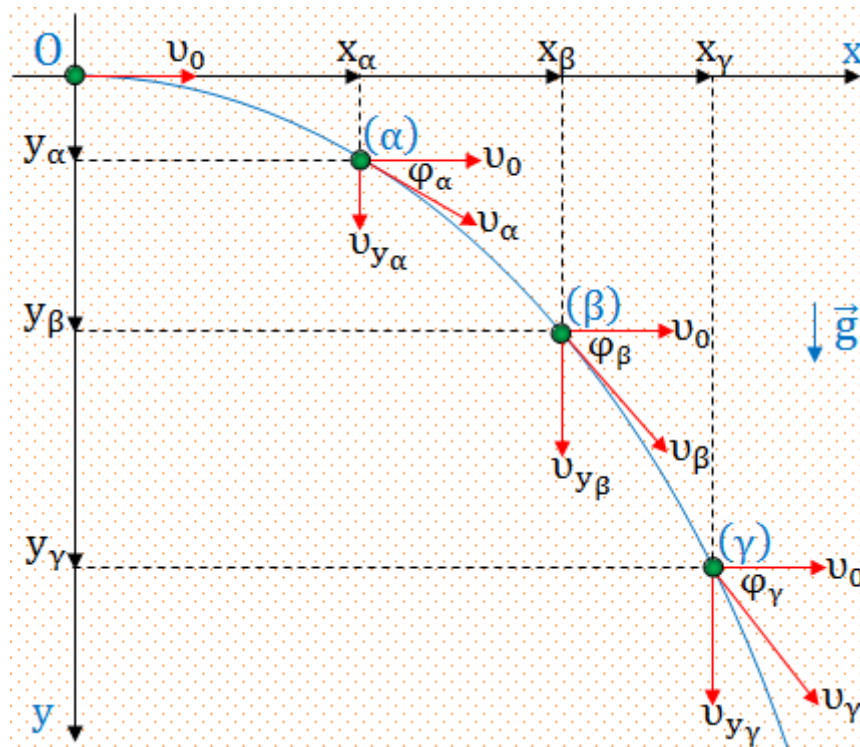


**ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ ΚΑΙ ΠΟΛΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ**  
**ΣΤΗΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ**

**Περιγραφή του φαινομένου**

Μικρό σώμα εκτελεί, τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ , οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα  $v_0$  από το σημείο  $O$ . Το σώμα διέρχεται διαδοχικά από τις θέσεις  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  και  $(\gamma)$  όπως φαίνεται στο σχήμα, με ταχύτητες που σχηματίζουν με την αρχική γωνίες  $\varphi_\alpha$ ,  $\varphi_\beta$  και  $\varphi_\gamma$  αντίστοιχα. Δίνεται ότι οι γωνίες  $\varphi_\alpha$  και  $\varphi_\gamma$  είναι συμπληρωματικές και  $\varphi_\beta = 45^\circ$ .



**Η σχέση των γωνιών**

Εφόσον οι γωνίες  $\varphi_\alpha$  και  $\varphi_\gamma$  είναι συμπληρωματικές ισχύει ότι:

$$\varphi_\alpha + \varphi_\gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\varphi_\alpha + \varphi_\gamma}{2} = 45^\circ \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varphi_\alpha + \varphi_\gamma}{2} = \varphi_\beta \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι οι γωνίες  $\varphi_\alpha$ ,  $\varphi_\beta$  και  $\varphi_\gamma$  ορίζουν αριθμητική πρόοδο.

Επιπλέον:

$$\varphi_\alpha + \varphi_\gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \varphi_\alpha = 90^\circ - \varphi_\gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi_\alpha = \varepsilon\varphi(90^\circ - \varphi_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi_\alpha = \sigma\varphi\varphi_\gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi_\alpha = 1/\varepsilon\varphi\varphi_\gamma \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_\alpha \varepsilon\varphi\varphi_\gamma = 1 \quad (2)$$

### Οι συνέπειες της σχέσης των γωνιών.

#### 1) Οι σχέση των χρονικών στιγμών.

Θέση ( $\alpha$ ):

$$\varepsilon\varphi\varphi_{\alpha} = \frac{v_{y\alpha}}{v_0} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi_{\alpha} = \frac{gt_{\alpha}}{v_0} \quad (3)$$

Θέση ( $\beta$ ):

$$\varepsilon\varphi\varphi_{\beta} = \frac{v_{y\beta}}{v_0} \xrightarrow{\varphi_{\beta}=45^{\circ}} 1 = \frac{gt_{\beta}}{v_0} \Leftrightarrow t_{\beta} = \frac{v_0}{g} \quad (4)$$

Θέση ( $\gamma$ ):

$$\varepsilon\varphi\varphi_{\gamma} = \frac{v_{y\gamma}}{v_0} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi_{\gamma} = \frac{gt_{\gamma}}{v_0} \quad (5)$$

Η σχέση (2) λόγω των (3) και (5):

$$\varepsilon\varphi\varphi_{\alpha}\varepsilon\varphi\varphi_{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \frac{gt_{\alpha}}{v_0} \frac{gt_{\gamma}}{v_0} = 1 \Leftrightarrow t_{\alpha}t_{\gamma} = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} t_{\alpha}t_{\gamma} = t_{\beta}^2 \quad (6)$$

Από τη σχέση (6) προκύπτει ότι οι χρονικές στιγμές  $t_{\alpha}$ ,  $t_{\beta}$  και  $t_{\gamma}$  στις θέσεις ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) και ( $\gamma$ ) αντίστοιχα ορίζουν γεωμετρική πρόοδο.

#### 2) Οι σχέση των οριζόντιων μετατοπίσεων.

Θέση ( $\alpha$ ):

$$x_{\alpha} = v_0 t_{\alpha} \quad (7)$$

Θέση ( $\beta$ ):

$$x_{\beta} = v_0 t_{\beta} \quad (8)$$

Θέση ( $\gamma$ ):

$$x_{\gamma} = v_0 t_{\gamma} \quad (9)$$

Από τη σχέση (6):

$$t_{\alpha}t_{\gamma} = t_{\beta}^2 \Leftrightarrow v_0 t_{\alpha} v_0 t_{\gamma} = v_0^2 t_{\beta}^2 \Leftrightarrow x_{\alpha}x_{\gamma} = x_{\beta}^2 \quad (10)$$

Από τη σχέση (10) προκύπτει ότι οι οριζόντιες μετατοπίσεις  $x_{\alpha}$ ,  $x_{\beta}$  και  $x_{\gamma}$  στις θέσεις ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) και ( $\gamma$ ) αντίστοιχα ορίζουν γεωμετρική πρόοδο.

#### 3) Οι σχέση των κατακόρυφων μετατοπίσεων.

Θέση ( $\alpha$ ):

$$y_{\alpha} = \frac{1}{2}gt_{\alpha}^2 \quad (11)$$

Θέση ( $\beta$ ):

$$y_{\beta} = \frac{1}{2}gt_{\beta}^2 \quad (12)$$

Θέση ( $\gamma$ ):

$$y_{\gamma} = \frac{1}{2} g t_{\gamma}^2 \quad (12)$$

Από τη σχέση (6):

$$t_{\alpha} t_{\gamma} = t_{\beta}^2 \Leftrightarrow t_{\alpha}^2 t_{\gamma}^2 = (t_{\beta}^2)^2 \Leftrightarrow \frac{2y_{\alpha}}{g} \frac{2y_{\gamma}}{g} = \left( \frac{2y_{\beta}}{g} \right)^2 \Leftrightarrow$$
$$y_{\alpha} y_{\gamma} = y_{\beta}^2 \quad (12)$$

Από τη σχέση (12) προκύπτει ότι οι οριζόντιες μετατοπίσεις  $y_{\alpha}$ ,  $y_{\beta}$  και  $y_{\gamma}$  στις θέσεις ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) και ( $\gamma$ ) αντίστοιχα ορίζουν γεωμετρική πρόοδο.

4) Οι σχέση των ρυθμών μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Θέση ( $\alpha$ ):

$$\frac{dK_{\alpha}}{dt} = m g^2 t_{\alpha} \quad (13)$$

Θέση ( $\beta$ ):

$$\frac{dK_{\beta}}{dt} = m g^2 t_{\beta} \quad (14)$$

Θέση ( $\gamma$ ):

$$\frac{dK_{\gamma}}{dt} = m g^2 t_{\gamma} \quad (15)$$

Από τη σχέση (6):

$$t_{\alpha} t_{\gamma} = t_{\beta}^2 \Leftrightarrow m g^2 t_{\alpha} m g^2 t_{\gamma} = (m g^2)^2 t_{\beta}^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{dK_{\alpha}}{dt} \frac{dK_{\gamma}}{dt} = \left( \frac{dK_{\beta}}{dt} \right)^2 \quad (16)$$

Από τη σχέση (16) προκύπτει ότι οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος  $\frac{dK_{\alpha}}{dt}$ ,  $\frac{dK_{\beta}}{dt}$  και  $\frac{dK_{\gamma}}{dt}$  στις θέσεις ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) και ( $\gamma$ ) αντίστοιχα ορίζουν γεωμετρική πρόοδο.

**Συμπέρασμα:** Για τις τιμές ενός μέγεθος  $z$  της οριζόντιας βολής που συνδέεται με το χρόνο κίνησης  $t$  του σώματος με συνάρτηση της μορφής  $z(t) = \lambda t^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , στις θέσεις ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) και ( $\gamma$ ) θα ισχύει:

$$z_{\alpha} z_{\gamma} = z_{\beta}^2 \quad (17)$$