

**ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ
ΣΧΕΣΗ ΜΑΖΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΟΡΜΩΝ ΚΑΙ
ΚΙΝΗΤΙΚΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ**

Δυο σφαίρες πολύ μικρών διαστάσεων με μάζες m_1, m_2 κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με συγγραμμικές ταχύτητες v_1, v_2 αντίστοιχα. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.

Συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τις αρχές διατήρησης ορμής και μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σφαιρών.

Α. Δ. Ο.:

$$\begin{aligned} p_{\text{APX}} &= p_{\text{ΤΕΛ}} \Leftrightarrow p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \Leftrightarrow \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1) \end{aligned}$$

Α.Δ.Μ.Ε.:

$$\begin{aligned} K_{\text{APX}} &= K_{\text{ΤΕΛ}} \Leftrightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \Leftrightarrow \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 \quad (2) \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτουν οι γνωστές σχέσεις των τελικών ταχυτήτων των δύο σφαιρών:

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Πρόταση 1

Αν οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες, να αποδειχθεί ότι λόγω της κρούσης θα ανταλλάξουν ταχύτητες, ορμές και κινητικές ενέργειες.

Απόδειξη:

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (3), (4) $m_1 = m_2$, προκύπτει $v'_1 = v_2$ (5) και $v'_2 = v_1$ (6) αντίστοιχα.

Για την ορμή της σφαίρας με μάζα m_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$\begin{aligned} p'_1 &= m_1 v'_1 \Leftrightarrow p'_1 = m_2 v_2 \Leftrightarrow \\ p'_1 &= p_2 \quad (7) \end{aligned}$$

Ομοίως

$$p'_2 = p_1 \quad (8)$$

Για την κινητική ενέργεια της σφαίρας με μάζα m_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$K'_1 = \frac{1}{2} m_1 v'_1{}^2 \Leftrightarrow K'_1 = \frac{1}{2} m_2 v'_2{}^2 \Leftrightarrow K'_1 = K_2 \quad (9)$$

Ομοίως

$$K'_2 = K_1 \quad (10)$$

Συνεπώς στην κεντρική ελαστική κρούση δυο ίσης μάζας σφαιρών, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες, ορμές και κινητικές ενέργειες.

Πρόταση 2

Αν λόγω της κρούσης οι σφαίρες, ανταλλάξουν τις ταχύτητες τους, να αποδειχθεί ότι έχουν ίσες μάζες.

Απόδειξη:

Έστω ότι

$$\begin{aligned} v'_1 = v_2 &\Leftrightarrow \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} = v_2 \Leftrightarrow \\ 2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1 &= (m_1 + m_2)v_2 \Leftrightarrow \\ (m_1 - m_2)v_1 - (m_1 + m_2)v_2 + 2m_2 v_2 &= 0 \Leftrightarrow \\ (m_1 - m_2)v_1 - (m_1 - m_2)v_2 &= 0 \Leftrightarrow \\ (m_1 - m_2)(v_1 - v_2) &= 0 \Leftrightarrow \\ m_1 - m_2 = 0 \text{ ή } v_1 - v_2 &= 0 \Leftrightarrow \\ m_1 = m_2 \text{ ή } v_1 = v_2 &\quad (11) \end{aligned}$$

Η περίπτωση $v_1 = v_2$ απορρίπτεται αφού δεν επιτρέπει κρούση των σφαιρών. Άρα

$$m_1 = m_2$$

Στο ίδιο καταλήγουμε αν πάρουμε

$$v'_2 = v_1.$$

Συνεπώς αν στην κεντρική ελαστική κρούση δυο σφαιρών, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες τότε έχουν ίσες μάζες.

Πρόταση 3

Αν λόγω της κρούσης οι σφαίρες, ανταλλάξουν τις ορμές τους, να αποδειχθεί ότι έχουν ίσες μάζες ή η ορμή του συστήματος είναι μηδέν.

Απόδειξη:

Έστω ότι

$$\begin{aligned}p'_1 &= p_2 \Leftrightarrow \\m_1 v'_1 &= m_2 v_2 \Leftrightarrow \\m_1 \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} &= m_2 v_2 \Leftrightarrow \\m_1 [2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1] &= (m_1 + m_2)m_2 v_2 \Leftrightarrow \\2m_1 m_2 v_2 + m_1(m_1 - m_2)v_1 &= (m_1 + m_2)m_2 v_2 \Leftrightarrow \\2m_1 m_2 v_2 + m_1(m_1 - m_2)v_1 - (m_1 + m_2)m_2 v_2 &= 0 \Leftrightarrow \\(m_1 - m_2)m_1 v_1 + (m_1 - m_2)m_2 v_2 &= 0 \Leftrightarrow \\(m_1 - m_2)(m_1 v_1 + m_2 v_2) &= 0 \Leftrightarrow \\m_1 - m_2 = 0 \text{ ή } m_1 v_1 + m_2 v_2 &= 0 \Leftrightarrow \\m_1 = m_2 \text{ ή } p_1 + p_2 &= 0 \Leftrightarrow \\m_1 = m_2 \text{ ή } P_{\text{ΣΥΣΤ}} &= 0 \quad (12)\end{aligned}$$

Συνεπώς αν στην κεντρική ελαστική κρούση δυο σφαιρών, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ορμές τότε έχουν ίσες μάζες ή η ορμή του συστήματος είναι μηδενική.

Πρόταση 4

Αν λόγω της κρούσης οι σφαίρες, ανταλλάξουν τις κινητικές τους ενέργειες, να αποδειχθεί ότι έχουν ίσες μάζες ή οι αρχικές ταχύτητες των σφαιρών δίνονται από τις σχέσεις:

$$v_1 = \frac{\sqrt{m_1 m_2} - m_2}{\sqrt{m_1 m_2} + m_1} v_2 \quad (13) \text{ ή } v_2 = \frac{\sqrt{m_1 m_2} - m_1}{\sqrt{m_1 m_2} + m_2} v_1 \quad (14), m_1 \neq m_2$$

Απόδειξη:

Έστω ότι

$$\begin{aligned}K'_1 &= K_2 \Leftrightarrow \\\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 &= \frac{1}{2} m_2 v^2_2 \Leftrightarrow \\m_1 v'^2_1 &= m_2 v^2_2 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$m_1^2 v_1'^2 = m_1 m_2 v_2^2 \Leftrightarrow$$

$$p_1'^2 = m_1 m_2 v_2^2 \quad (15)$$

Ομοίως

$$p_2'^2 = m_2 m_1 v_1^2 \quad (16)$$

Από τις σχέσεις (15) και (16) έχουμε:

$$p_1'^2 - p_2'^2 = m_1 m_2 (v_2^2 - v_1^2) \Leftrightarrow$$

$$(p_1' - p_2')(p_1' + p_2') = m_1 m_2 (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) \quad (17)$$

$$p_1' = m_1 v_1' = m_1 \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad (18)$$

και

$$p_2' = m_2 v_2' = m_2 \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \quad (19)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (17) τις σχέσεις (18),(19) και (1) έχουμε:

$$\left[m_1 \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} + m_2 \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \right]$$

$$(m_1 v_1 + m_2 v_2) = m_1 m_2 (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) \Leftrightarrow$$

$$[m_1 v_1 (m_1 - 3m_2) - m_2 v_2 (m_2 - 3m_1)](m_1 v_1 + m_2 v_2) =$$

$$m_1 m_2 (m_1 + m_2)(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει:

$$(m_1 - m_2)[(m_1 - m_2)(K_1 - K_2) + 2m_1 m_2 v_1 v_2] = 0 \quad (20)$$

Από τη σχέση (20) προκύπτει:

$$m_1 = m_2 \quad (21) \text{ ή } (m_1 - m_2)(K_1 - K_2) + 2m_1 m_2 v_1 v_2 = 0 \quad (22)$$

Από τη σχέση (22) έχουμε:

$$(m_1 - m_2) \left(\frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{p_2^2}{2m_2} \right) + 2p_1 p_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \frac{m_2}{2m_1} p_1^2 - \frac{m_1}{2m_2} p_2^2 + 2p_1 p_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_1^2 + p_2^2 - \frac{m_2}{m_1} p_1^2 - \frac{m_1}{m_2} p_2^2 + 4p_1 p_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(p_1 + p_2)^2 - m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 - [\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)]^2 = 0 \Leftrightarrow \\
& [\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)][\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)] = 0 \Leftrightarrow \\
& \mathbf{m}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{v}_2 + \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0 \text{ ή } \\
& \mathbf{m}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{v}_2 - \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0 \Leftrightarrow \\
& \mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} - \mathbf{m}_2}{\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} + \mathbf{m}_1} \mathbf{v}_2 \text{ ή } \mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} - \mathbf{m}_1}{\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} + \mathbf{m}_2} \mathbf{v}_1, \mathbf{m}_1 \neq \mathbf{m}_2
\end{aligned}$$

Συνεπώς αν στην κεντρική ελαστική κρούση δυο σφαιρών, οι σφαίρες ανταλλάσσουν κινητικές ενέργειες τότε:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 \text{ ή } \mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} - \mathbf{m}_2}{\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} + \mathbf{m}_1} \mathbf{v}_2 \text{ ή } \mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} - \mathbf{m}_1}{\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} + \mathbf{m}_2} \mathbf{v}_1, \mathbf{m}_1 \neq \mathbf{m}_2$$

ΝΙΚΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΣ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2023