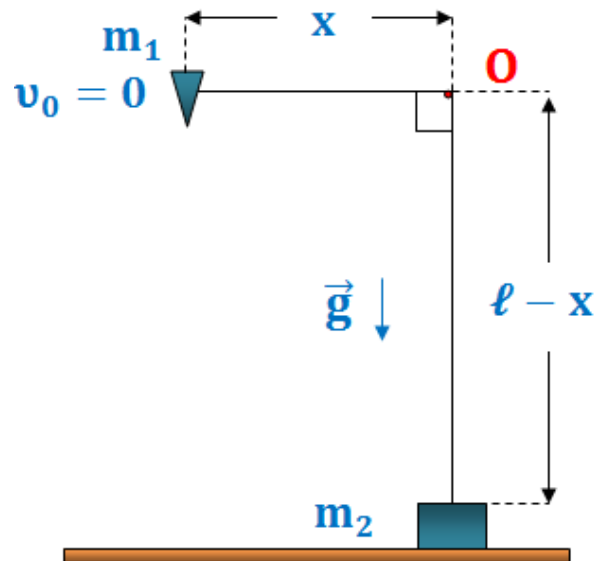


ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Στ' άκρα ενός αβαρούς και μη ελαστικού νήματος μήκους $\ell = 1,8\text{m}$ έχουν δεθεί δύο μικρά σώματα με μάζες m_1 και m_2 , όπου $m_1 = \lambda m_2$. Το νήμα διέρχεται από το καρφί O , ώστε να σχηματίζει ορθή γωνία με οριζόντια πλευρά $x = \ell/3$, ενώ τα σώματα να συγκρατούνται ακίνητα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί το σώμα μάζας m_1 , οπότε εκτελεί μη ομαλή κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο με κέντρο O και ακτίνα x . Όταν το σώμα m_1 έχει διαγράψει γωνία φ , το ακίνητο σώμα μάζας m_2 , χάνει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο και αρχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Συγχρόνως το σώμα m_1 κατέρχεται εκτελώντας καμπυλόγραμμη κίνηση και τελικά συγκρούεται πλάγια και πλαστικά με το σώμα μάζας m_2 , έχοντας ελάχιστα πριν την κρούση ταχύτητα v_1 που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση.

Δ1. Να αποδειχθεί: $\eta\mu\varphi = \frac{1}{3\lambda}$

Αν $\lambda = 1$, να βρεθούν:

- Δ2. Τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων ελάχιστα πριν την κρούση τους.
- Δ3. Η επιτάχυνση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Δ4. Το μέγιστο ύψος από το οριζόντιο επίπεδο που θα φτάσει το συσσωμάτωμα.

Δίνονται $\eta\mu\theta = \sqrt{3}/3$, $\sigma\upsilon\upsilon\theta = \sqrt{6}/3$, το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$ και ότι δεν αναπτύσσονται τριβές καθώς το νήμα γλιστρά πάνω στο καρφί.

ΛΥΣΗ:

Δ1. Όταν το σώμα m_2 χάνει την επαφή με το δάπεδο ($N = 0$) ισχύει:

$$T = w_2 \Rightarrow T = m_2 g \quad (1)$$

την ίδια χρονική στιγμή το σώμα m_1 εκτελώντας κυκλική κίνηση έχει ταχύτητα v μέτρου:

Α.Δ.Μ.Ε.

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v^2 \Rightarrow v^2 = 2gh \Rightarrow v^2 = 2g \frac{\ell}{3} \eta \mu \varphi$$

λόγω της κυκλικής κίνησης:

$$T - w_{1,y} = \frac{m_1 v^2}{\ell} \Rightarrow T = m_1 g \eta \mu \varphi + 2m_1 g \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$T = 3m_1 g \eta \mu \varphi \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2):

$$3m_1 g \eta \mu \varphi = m_2 g \Rightarrow \eta \mu \varphi = \frac{m_2}{3m_1} \Rightarrow \boxed{\eta \mu \varphi = \frac{1}{3\lambda}}$$

Δ2. Λίγο πριν την κρούση τα σώματα m_1 και m_2 απέχουν από το καρφί απόσταση $\ell/2$ έχοντας ταχύτητες v_1 και v_2 αντίστοιχα.

Για τις μάζες ισχύει: $m_1 = m_2$

Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει:

$$v_{1,y} = v_2 \Rightarrow v_1 \eta \mu \theta = v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} v_1 \quad (3)$$

Α.Δ.Μ.Ε. από τη αρχική θέση μέχρι λίγο πριν την κρούση.

$$m_1 g \frac{2\ell}{3} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + (m_1 + m_2) g \left(\frac{2\ell}{3} - \frac{\ell}{2} \right)$$

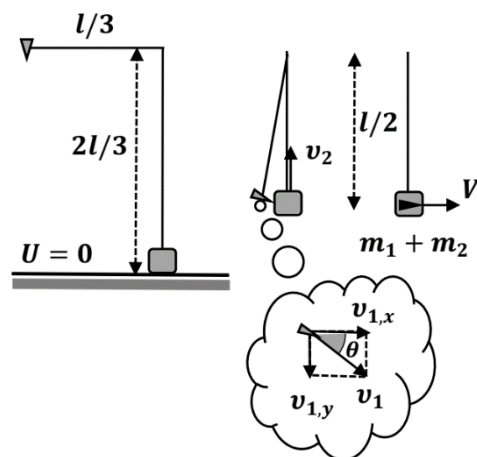
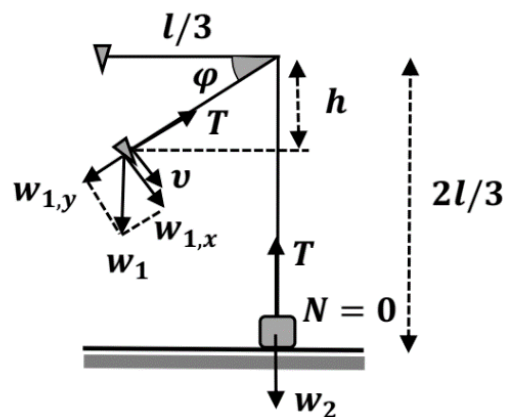
$$\Rightarrow$$

$$m_1 g \frac{2\ell}{3} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{1}{3} v_1^2 + 2m_1 g \frac{\ell}{6} \Rightarrow \dots \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{g\ell}{2}} \Rightarrow \boxed{v_1 = 3\text{m/s}}$$

Από τη σχέση (3)

$$\boxed{v_2 = \sqrt{3}\text{m/s}}$$

Δ3. Στον άξονα y τα σώματα πριν την κρούση έχουν αντίθετες ταχύτητες και εφόσον έχουν ίσες μάζες η ορμή του συστήματος στον άξονα y θα είναι μηδέν ενώ στον άξονα x η ορμή του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός, με αποτέλεσμα το νήμα μετά την κρούση να είναι τεταμένο.



Α.Δ.Ο. στον άξονα x.

$$\vec{p}_{x,πριν} = \vec{p}_{x,μετα} \Rightarrow m_1 v_{1,x} = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{v_1 \sigmaυνθ}{2} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ m/s}$$

το σώμα λόγω της κυκλικής κίνησης αμέσως μετά την κρούση θα έχει μόνο την κεντρομόλο επιτάχυνση.

$$\alpha = \frac{V^2}{\ell/2} = \frac{2V^2}{\ell} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{3} \text{ m/s}^2}$$

Δ4. Α.Δ.Μ.Ε. από το σημείο της κρούσης μέχρι το μηδενισμό της ταχύτητας του συσσωματώματος (όπου d η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δυο θέσεων) με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο της κρούσης.

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)gd \Rightarrow d = \frac{V^2}{2g} \Rightarrow d = \frac{3}{40} \text{ m}$$

Το μέγιστο ύψος από το δάπεδο θα είναι:

$$h_{\max} = d + \left(\frac{2\ell}{3} - \frac{\ell}{2}\right) = d + \frac{\ell}{6} \Rightarrow \boxed{h_{\max} = \frac{3}{8} \text{ m}}$$