

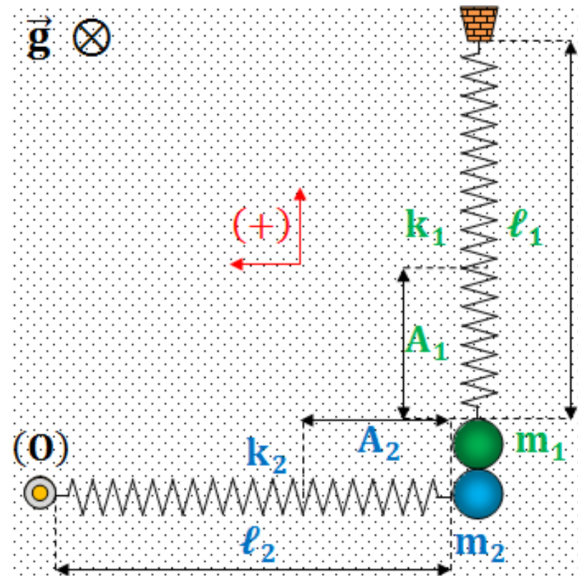
ΘΕΜΑ Δ

Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε σε κάτοψη μια πειραματική διάταξη που αποτελείται από δυο απλούς αρμονικούς ταλαντωτές πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Οι ταλαντωτές έχουν σφαιρίδια μικρών διαστάσεων με μάζες $m_1 = m_2 = 1\text{ kg}$ και ιδανικά ελατήρια με σταθερές $k_1 = k_2 = 100\text{ N/m}$ και φυσικά μήκη $\ell_1 = \ell_2$.

Αρχικά τα σφαιρίδια είναι ακίνητα και εφάπτονται όπως φαίνεται στο σχήμα, ενώ οι άξονες των ελατηρίων είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Μετατοπίζουμε τα σφαιρίδια συσπειρώνοντας τα ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 κατά $A_1 = 0,8\text{ m}$ και $A_2 = 0,6\text{ m}$ αντίστοιχα.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, αφήνουμε τα σώματα ελεύθερα να κινηθούν και τη χρονική στιγμή t_1 , συγκρούονται πλάγια και ελαστικά.



Δ1.

α. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 .

Μονάδες 5

β. Να παρασταθεί γραφικά το μέτρο της ορμής του συστήματος των σφαιριδίων σε συνάρτηση με το χρόνο κίνησης τους t στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_1$.

Μονάδες 5

Να βρεθούν:

Δ2. Οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 5

Δ3. Μετά την κρούση:

α. Η μέγιστη τιμή του μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_2 αν η μέγιστη επιμήκυνση που θα αποκτήσει είναι $\Delta\ell_{\max} = 0,8\text{ m}$.

Μονάδες 5

β. Η ελάχιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του σφαιριδίου μάζας m_2 .

Μονάδες 5

Θέμα Δ**Δ1.**

α) Οι περίοδοι των απλών ταλαντώσεων των σφαιριδίων είναι ίσες:

$$m_1: T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \Leftrightarrow T_1 = \frac{\pi}{5} \text{ s} \quad m_2: T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \Leftrightarrow T_2 = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

Εφόσον οι ταλαντώσεις των σφαιριδίων αρχίζουν από τις ακραίες θέσεις, τα σφαιρίδια θα φτάσουν στις αρχικές τους θέσεις, (θέσεις ισορροπίας) όπου θα συγκουστούν τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{T_1}{4} \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

β) Οι ορμές των σφαιριδίων είναι οι εξής:

$$m_1: p_1 = m_1 v_{1\max} \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) \Leftrightarrow p_1 = 8 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$m_2: p_2 = m_2 v_{2\max} \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \Leftrightarrow p_2 = 6 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Το μέτρο της ορμής του του συστήματος των σφαιριδίων είναι:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \Leftrightarrow p = \sqrt{\left[8 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 + \left[6 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}$$

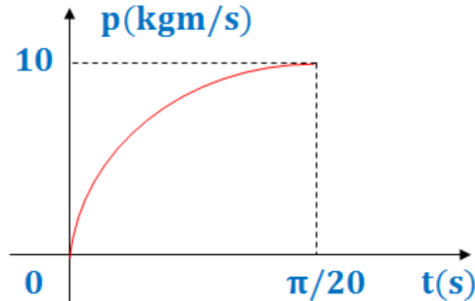
$$\Leftrightarrow p = 10 \left| \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \right| \Leftrightarrow p = 10 |\eta \mu(10t)| \text{ (S.I.)}$$

Για $0 \leq t \leq t_1 \Leftrightarrow \eta \mu(10t) \geq 0$

Τελικά:

$$p = 10 \eta \mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



Δ2. Τα σφαιρίδια συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου σταθεράς k_1 ($y'y$). Εφόσον οι μάζες τους είναι ίσες θα ανταλλάξουν τις ταχύτητες τους στη διεύθυνση αυτή, δηλαδή

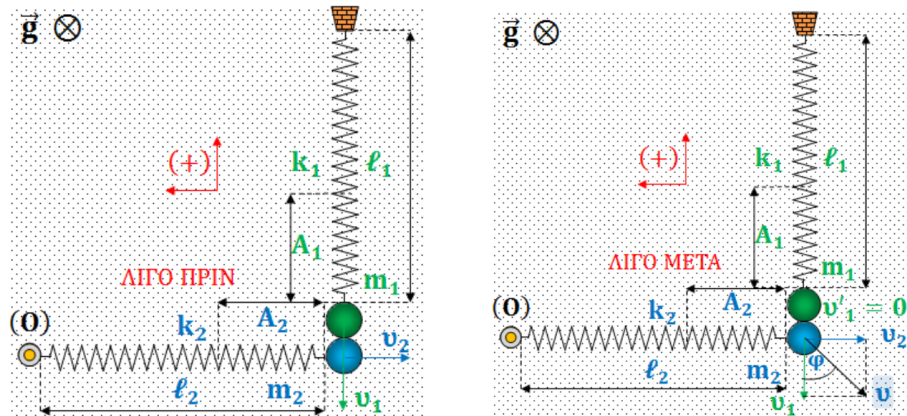
$$v'_1 = 0 \quad \text{και} \quad v'_2 = v_1 \Leftrightarrow v'_2 = v_{1\max} \Leftrightarrow v'_2 = 8 \text{ m/s}$$

Στη διεύθυνση άξονα του ελατηρίου σταθεράς k_2 ($x'x$), τα σφαιρίδια δε δέχονται δυνάμεις, οπότε δε θα μεταβληθούν οι ταχύτητές τους στη διεύθυνση αυτή. Άρα μετά την κρούση το σφαιρίδιο μάζας m_1 θα ακινητοποιηθεί, ενώ το σφαιρίδιο μάζας m_2 θα έχει ταχύτητα μέτρου:

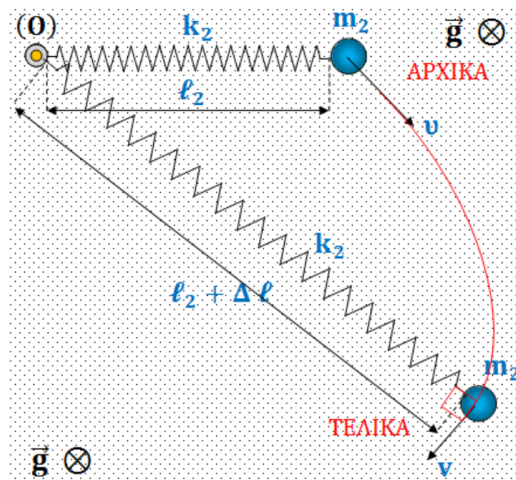
$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{8^2 + 6^2} \Leftrightarrow v = 10 \text{ m/s}$$

και διεύθυνση:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow \epsilon\phi\phi = \frac{3}{4}$$



Δ3. Μετά την κρούση το σφαιρίδιο μάζας m_2 δέχεται μόνο τη δύναμη του ελατηρίου η οποία μειώνει την συνιστώσα της ταχύτητας του σφαιριδίου στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου (ακτινική ταχύτητα) η οποία είναι υπεύθυνη για την αύξηση του μήκους του ελατηρίου. Τη στιγμή που η συνιστώσα αυτή της ταχύτητας του σφαιριδίου μηδενίζεται το ελατήριο έχει τη μέγιστη επιμήκυνση άρα και το μέγιστο μήκος ενώ το σφαιρίδιο έχει ταχύτητα κάθετη στον άξονα του ελατηρίου (v).



Μετά την κρούση έχουμε διατήρηση της στροφορμής του σφαιριδίου μάζας m_2 ως προς τον άξονα που διέρχεται από το (O), αφού η ελατηριακή δύναμη διέρχεται από αυτόν. Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow m_2 v_1 \ell_2 = m_2 v (\ell_2 + \Delta\ell_{\max}) \Leftrightarrow v = \frac{\ell_2}{\ell_2 + \Delta\ell_{\max}} v_1 \quad (1)$$

Επιπλέον η ελατηριακή δύναμη είναι συντηρητική οπότε διατηρείται η μηχανική ενέργεια του σφαιριδίου μάζας m_2 . Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta \ell_{\max}^2 \Leftrightarrow$$

$$m_2 v^2 = m_2 \left(\frac{\ell_2}{\ell_2 + \Delta \ell_{\max}} v_1 \right)^2 + k_2 \Delta \ell_{\max}^2 \Leftrightarrow$$

$$v^2 = \left(\frac{\ell_2}{\ell_2 + \Delta \ell_{\max}} v_1 \right)^2 + \omega_2^2 \Delta \ell_{\max}^2 \Leftrightarrow \ell_2 = 2,4\text{m}$$

α) Άρα:

$$\ell_{2\max} = \ell_2 + \Delta \ell_{\max} \Leftrightarrow \ell_{2\max} = 3,2\text{m}$$

β) Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\mathbf{v} = 6\text{m/s}$$

Παρατηρήσεις

1) Στην τελική κατάσταση είναι:

$$\vec{F}_{\epsilon\lambda} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = -\vec{F}_{\epsilon\lambda} \vec{v} \Leftrightarrow \frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = 0 \Leftrightarrow U_{\epsilon\lambda\max} = \frac{1}{2} k_2 \Delta \ell^2$$

$$\frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = 0 \Leftrightarrow K_{\min} = \frac{1}{2} m_2 v^2$$

2) Ποσοστά:

$$\frac{U_{\epsilon\lambda\max}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\frac{1}{2} k_2 \Delta \ell_{\max}^2}{\frac{1}{2} m_2 v^2} \Leftrightarrow \frac{U_{\epsilon\lambda\max}}{K_{\alpha\rho\chi}} = 0,64 \text{ ή } 64\%$$

$$\frac{K_{\min}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v^2}{\frac{1}{2} m_2 v^2} \Leftrightarrow \frac{K_{\min}}{K_{\alpha\rho\chi}} = 0,36 \text{ ή } 36\%$$