

ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΟΜΑΛΗ ΚΥΛΙΣΗ ΤΡΟΧΟΥ

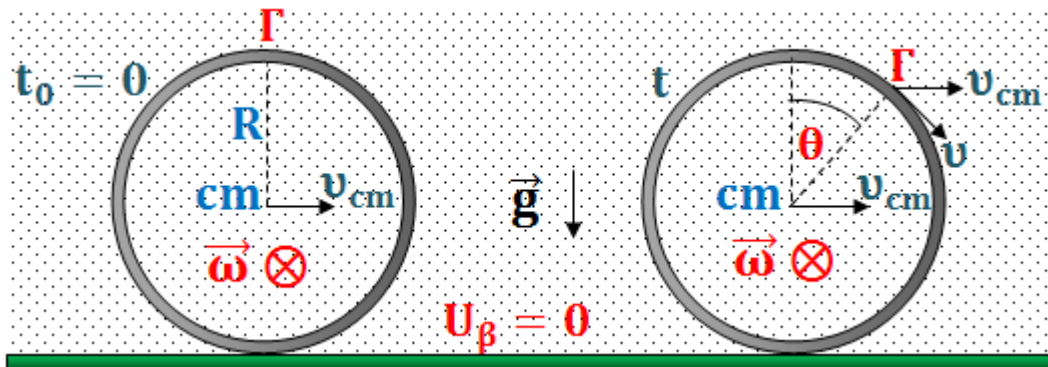
ΘΕΜΑ Β

Τροχός με ακτίνα R κυλίνεται - χωρίς ολίσθηση - σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_{cm} και γωνιακή ταχύτητα ω . Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το υλικό σημείο Γ της περιφέρειας του τροχού μάζας m είναι το ανώτερο σημείο του τροχού.

1) Να βρεθούν για το υλικό σημείο Γ οι χρονικές εξισώσεις του μέτρου της ορμής και του ρυθμού μεταβολής της και να παρασταθούν γραφικά.

2) Να βρεθεί η χρονική εξίσωση της μηχανικής ενέργειας του υλικού σημείου Γ και να παρασταθεί γραφικά. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρύτητας το οριζόντιο επίπεδο.

3) Να βρεθεί η χρονική εξίσωση του ρυθμού με τον οποίο παράγει έργο η δύναμη που δέχεται το υλικό σημείο Γ από τον υπόλοιπο τροχό και να παρασταθεί γραφικά.



Λύση

1) Η ορμή του σημείου Γ είναι:

$$p_{ολ} = mv_{ολ} \Leftrightarrow$$

$$p_{ολ} = m\sqrt{v_{cm}^2 + v^2 + 2v_{cm}v\cos\theta} \stackrel{v=v_{cm}}{\Leftrightarrow}$$

$$p_{ολ} = m\sqrt{2v_{cm}^2 + 2v_{cm}^2\cos\theta} \Leftrightarrow$$

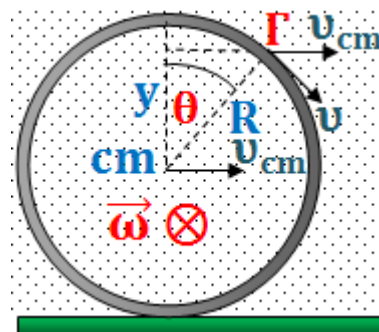
$$p_{ολ} = mv_{cm}\sqrt{2(1 + \cos\theta)} \quad (1)$$

Όμως ισχύουν $p_{cm} = mv_{cm}$ το μέτρο της ορμής του κέντρου μάζας και η σχέση:

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} \quad (2)$$

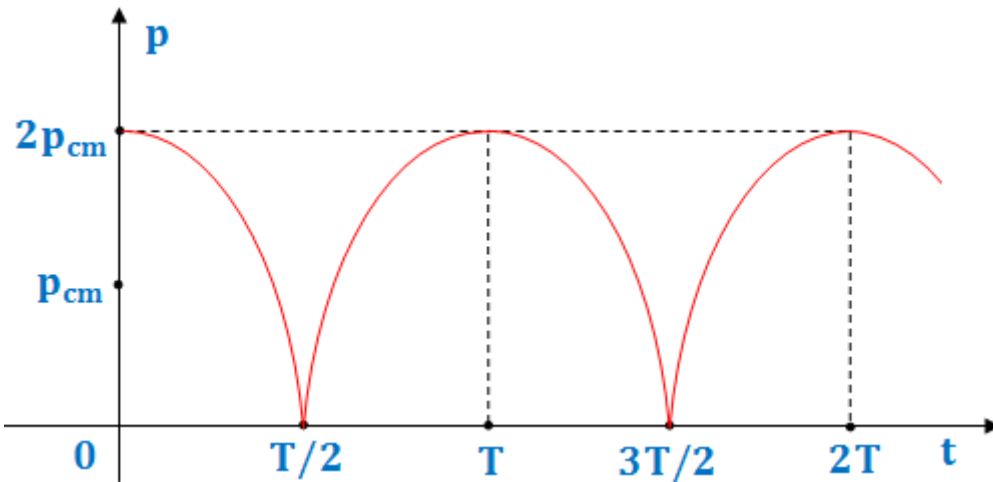
Η σχέση (1) λόγω της σχέσης (2):

$$p_{ολ} = p_{cm} \sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow$$



$$p_{ολ} = 2p_{cm} \left| \sigma\upsilon\upsilon \frac{\theta}{2} \right| \Leftrightarrow p_{ολ} = 2p_{cm} \left| \sigma\upsilon\upsilon \frac{\omega t}{2} \right| \quad (3)$$

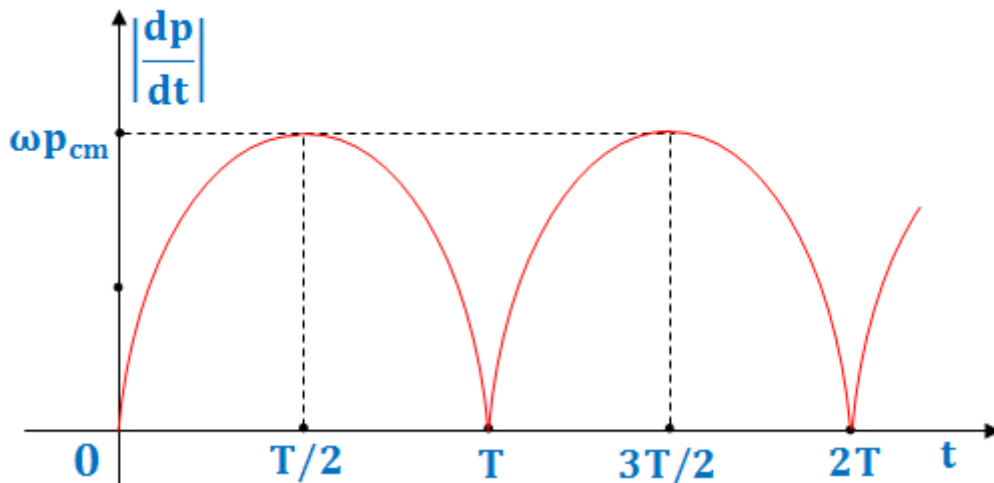
Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του υλικού σημείου Γ είναι:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = 2p_{cm} \left| \frac{d}{dt} \left(\sigma\upsilon\upsilon \frac{\omega t}{2} \right) \right| \Leftrightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = p_{cm} \omega \left| \eta\mu \frac{\omega t}{2} \right| \quad (4)$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



Παρατηρούμε ότι το μέτρο της ορμής και του ρυθμού μεταβολής της έχουν περίοδο T ίση με αυτή της περιστροφής του τροχού.

2) Η μηχανική ενέργεια του σημείου Γ είναι:

$$E = U + K \Leftrightarrow E = mg(R + y) + \frac{1}{2} m v_{ολ}^2$$

όπου $y = R \sigma\upsilon\upsilon\theta$ και από γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος $v_{ολ}^2 = v_{cm}^2 + v^2 + 2v_{cm} v \sigma\upsilon\upsilon\theta \xLeftrightarrow[v=v_{cm}] v_{ολ}^2 = 2v_{cm}^2 (1 + \sigma\upsilon\upsilon\theta)$

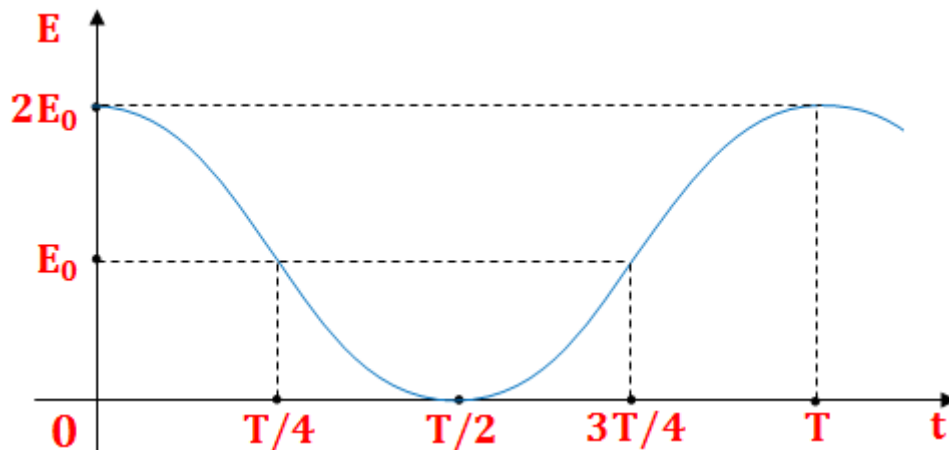
Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$E = mgR(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) + \frac{1}{2}m2v_{cm}^2(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \Leftrightarrow$$

$$E = m(v_{cm}^2 + gR)(1 + \sigma\upsilon\nu\omega t) \Leftrightarrow$$

$$E = E_0(1 + \sigma\upsilon\nu\omega t), \quad E_0 = m(v_{cm}^2 + gR) \quad (5)$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



3) Στο υλικό σημείο Γ ασκείται το βάρος του w (συντηρητική δύναμη) και η δύναμη N (μη συντηρητική) από τον τροχό, που εξαιτίας της μεταβάλλεται η μηχανική ενέργεια του σημείου. Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW_N}{dt} \Leftrightarrow \frac{dW_N}{dt} = \frac{d}{dt}(E_0(1 + \sigma\upsilon\nu\omega t)) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dW_N}{dt} = -\omega E_0 \eta\mu\omega t \quad (6)$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:

