ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΚΡΟΥΣΗ – ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ – ΣΤΕΡΕΟ

ΘΕΜΑ Α

Α1 έως Α4 Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (Μία σωστή απάντηση)

Α5 Ερώτηση Σωστού – Λάθους

Α1. Σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Σε χρόνο $\Delta t = T/2$
α. Η φάση της ταλάντωσης αυξάνει κατά 2π.
β. Το σώμα διανύει διάστημα ίσο με A.
γ. Το σώμα διανύει διάστημα ίσο με $4A$.
δ. Το έργο της δύναμης επαναφοράς είναι μηδέν.

Α2. Σε μια πλαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων Α και Β η απώλεια κινητικής ενέργειας του σώματος Α είναι μέγιστη.
α. Η απώλεια κινητικής ενέργειας του σώματος B είναι ελάχιστη
β. Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας των δύο σωμάτων είναι ίσα.
γ. Αυξάνει η κινητική ενέργεια του σώματος B
δ. Το σώμα Β χάνει το 100% της αρχικής του κινητικής ενέργειας

Α3. Δύο σφαίρες με ίσες μάζες και αντίθετες ορμές συγκρούονται έκκεντρα και ελαστικά. Οι σφαίρες μετά την κρούση.
α. κινούνται στις αρχικές διευθύνσεις
β. κινούνται σε κάθετες ευθείες.
γ. Ανταλλάσσουν ταχύτητες.
δ. Έχουν αντίθετες ορμές.

Α4. Μία ομογενής και ισοπαχής ράβδος βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Αν στα άκρα μιας ράβδου ασκήσουμε δύο ίσες δυνάμεις η ράβδος :
α. Θα παραμείνει ακίνητη
β. Θα κάνει περιστροφική κίνηση
γ. Θα κάνει μεταφορική κίνηση
δ. Θα κάνει σύνθετη κίνηση

Α5. *Ερωτήσεις Σωστού- Λάθους*
α. Μια εξαναγκασμένη ταλάντωση μπορεί να είναι φθίνουσα ή αμείωτη
β. Η αρχική φάση μιας ταλάντωσης παίρνει τις τιμές 0 και $\pi/2$
γ. Κατά την κύλιση ενός σώματος τα άκρα μιας οριζόντιας διαμέτρου έχουν επιτάχυνση ίδιου μέτρου.
δ. Σε ένα σώμα που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T η κινητική του ενέργεια μεταβάλλεται περιοδικά με περίοδο $2T$.
ε. Η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σώματος έχει πάντα ίδια κατεύθυνση με την γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Μία ράβδος ΑΒ μήκους l βρίσκεται σε λείο οριζόντιο. Κάποια στιγμή τ το CM της ράβδου έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$, μέτρου $\upsilon_{cm} = l\omega/4$ και την ίδια στιγμή η ράβδος έχει γωνιακή ταχύτητα ω ενώ το άκρο Α της ράβδου έχει ταχύτητα μηδέν $\upsilon_A = 0$. Τη στιγμή τ το άκρο Β έχει ταχύτητα υ_B μέτρου:

$\alpha.\ \upsilon_B = 2l\omega$ $\qquad\beta.\ \dfrac{3}{2}l\omega$ $\qquad\gamma.\ l\omega$

Απάντηση

Σωστό το **(γ)**

Έστω Κ το κέντρο μάζας

$$\upsilon_A = 0 \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho(A)} - \frac{l\omega}{4} = 0 \Rightarrow \omega(KA) = \frac{l\omega}{4} \Rightarrow KA = \frac{l}{4}$$

$$KB = 3\frac{l}{4} \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho(B)} = (KB)\omega = 3\frac{l\omega}{4} = 3\upsilon_{cm}$$

$$\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho(B)} = 4\frac{l\omega}{4} = 4\upsilon_{cm} = l\omega$$

Β2. Μία ομογενής ράβδος ΑΓ βρίσκεται ακίνητη σε λείο και οριζόντιο επίπεδο. Η ράβδος ισορροπεί με την επίδραση τριών παραλλήλων δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει μέτρο $F_1 = F$ και ασκείται στο άκρο Α της ράβδου. Η δύναμη F_3 η οποία ασκείται σε απόσταση $l/4$ Από το άκρο Β της ράβδου έχει μέτρο:

$\alpha. F_3 = 2F$ $\qquad\beta. F_3 = 3F$ $\qquad\gamma.\ F_3 = 3F$

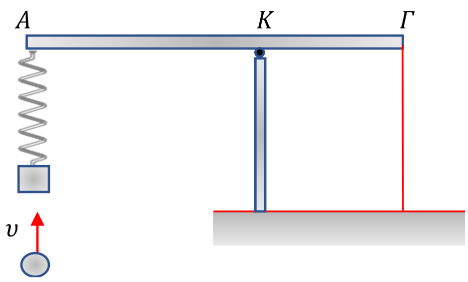
Απάντηση

Έστω Δ το σημείο εφαρμογής της F_3

$$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow F_1\frac{3l}{4} = F_2\frac{l}{4} \Rightarrow F_2 = 3F_1 = 3F$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_3 = F_1 + F_2 = 4F$$

Β3. Η ράβδος ΑΓ του σχήματος είναι αβαρής και στηρίζεται σε σημείο Κ. Το άκρο Γ συνδέεται με κατακόρυφο ιδανικό νήμα με το οριζόντιο δάπεδο. Στο άκρο Α είναι στερεωμένο ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k στο κάτω άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα μάζας M. Ένα μικρό σώμα μάζας $m = M$ κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας Μ. Αν το νήμα μόλις που δεν χαλαρώνει ο λόγος της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση K/U είναι ίσος με:



$\alpha. 1$ $\qquad\beta. 2$ $\qquad\gamma. 3$

Απάντηση

Σωστό το (γ)

Χαλάρωση νήματος συμβαίνει όταν $T = 0$

Όσο η ράβδος ισορροπεί δέχεται τις δυνάμεις T από το νήμα και $F'_{\varepsilon\lambda}$ από το ελατήριο

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow T(K\Gamma) = F'_{\varepsilon\lambda}(KA) \Rightarrow T = \frac{(KA)}{(K\Gamma)}F'_{\varepsilon\lambda}$$

$$T = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow \varepsilon\lambda\alpha\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \sigma\tau o\ \varphi\upsilon\sigma\iota\kappa\acute{o}\ \tau o\upsilon\ \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma$$

Στην θέση ισορροπίας του σώματος μάζας Μ η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι Δl

$$\Delta l = \frac{Mg}{k}$$

Στην θέση ισορροπίας του συσσωματώματος η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι

$$\Delta l' = 2\frac{Mg}{k}$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και πλάτος $A = \Delta l'$

Αμέσως μετά την κρούση η απομάκρυνση του συσσωματώματος είναι:

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{A}{2}$$

Και έχει δυναμική ενέργεια:

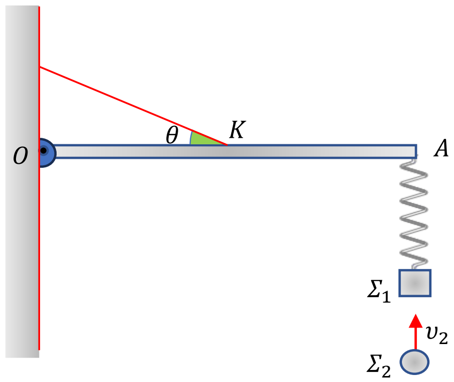
$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}D\frac{A^2}{4} = \frac{1}{4}E$$

Και κινητική ενέργεια

$$K = E - U = \frac{3}{4}E$$

$$\frac{K}{U} = 3$$

ΘΕΜΑ Γ



Η ομογενής ράβδος του σχήματος μάζας $M = 2kg$ στηρίζεται με άρθρωση στο άκρο της Ο που βρίσκεται σε επαφή με κατακόρυφο τοίχο. Το μέσον της Κ συνδέεται με νήμα του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε σημείο Δ του κατακόρυφου τοίχου έτσι ώστε η γωνία που σχηματίζει το νήμα με τη δοκό να είναι $\theta = 30^o$. Στο άκρο Α της ράβδου έχουμε στερεώσει ελατήριο σταθεράς k και στο κάτω άκρο του ελατηρίου έχουμε κρεμάσει σώμα Σ1 μάζας $m_1 = m = 1kg$ το οποίο ισορροπεί με το ελατήριο να έχει αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια ίση με $0{,}5j$. Μικρή σφαίρα Σ2 μάζας $m_2 = 2kg$ κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ1. Αν η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ της σφαίρας Σ2 λίγο πριν την κρούση έχει αλγεβρική τιμή $1{,}5m/s$ και η κρούση τελειώνει τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ να βρείτε:

α. Τα μέτρα των δυνάμεων που δέχεται η δοκός από το νήμα και την άρθρωση πριν την κρούση

β. Την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ1 μετά την κρούση.

γ. Το μέτρο της τάσης του νήματος ως συνάρτηση της απομάκρυνσης και διάγραμμα

δ. Τη χρονική στιγμή τ που η δύναμη της άρθρωσης γίνεται οριζόντια για δεύτερη φορά.

ε. Τη χρονική στιγμή τ βρείτε για το σώμα Σ1

i. Το ρυθμό μεταβολής της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας του

ii. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας

Λύση

α. Ισορροπία ράβδου

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T\eta\mu\varphi\frac{l}{2} = Mg\frac{l}{2} + mgl \Rightarrow \frac{T}{4} = \frac{Mg}{2} + mg$$

$$\Rightarrow T = 2Mg + 4mg = 2(M + 2m)g = 80N$$

$$T_x = 80\frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}N$$

$$T_y = 80\frac{1}{2} = 40N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x = 40\sqrt{3}N$$

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_y = mg = 10N$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{4800 + 100} = \sqrt{4900} = 70N$$

β. Η θετική φορά είναι προς τα πάνω αφού η αλγεβρική τιμής της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_2$ είναι θετική.

$$x = A\eta\mu\omega t$$

$$U = \frac{1}{2}k\Delta l \cdot \Delta l \Rightarrow U = \frac{1}{2}m_1 g \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{2U}{m_1 g} = 0{,}1m$$

$$k\Delta l = m_1 g \Rightarrow k = \frac{m_1 g}{\Delta l} = 100N/m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10rad/s$$

$$\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{4}{3}\frac{3}{2} = 2m/s$$

$$\upsilon_1' = \upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_1'}{\omega} = \frac{2}{10} = 0{,}2m$$
$$x = 0{,}2\eta\mu 10t$$

γ. Οι δυνάμεις στη ράβδο είναι:

- Η τάση του νήματος
- Η δύναμη από το ελατήριο $F'_{\varepsilon\lambda} = -F_{\varepsilon\lambda}$
- Η δύναμη από την άρθρωση
- Το βάτος της

Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στη ράβδο είναι αντίθετη της δύναμης $F_{\varepsilon\lambda}$ που ασκεί στο σώμα:

$$F_{\varepsilon\lambda} - mg = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg - kx$$
$$F'_{\varepsilon\lambda} = kx - mg$$
$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} l + \frac{T}{2}\frac{l}{2} - Mg\frac{l}{2} = 0$$
$$\Rightarrow kx - mg + \frac{T}{4} = \frac{Mg}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{T}{4} = mg + \frac{Mg}{2} - kx \Rightarrow T = 4mg + 2Mg - 4kx$$
$$\Rightarrow T = 80 - 400x$$

Η γραφική παράσταση είναι ευθεία.

δ. Δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση οριζόντια η ροπή της ως προς το Κ είναι μηδέν

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow \tau_F + \tau_T + \tau_{Mg} + \tau_{F'_{\varepsilon\lambda}} = 0 \Rightarrow \tau_{F'_{\varepsilon\lambda}} = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = 0$$
$$\Rightarrow kx - mg = 0 \Rightarrow x = \frac{mg}{k} = 0{,}1m = \frac{A}{2}$$
$$A\eta\mu\omega t = \frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu\omega t = \frac{1}{2}$$
$$(2\eta\ \varphi o\rho\acute{\alpha}) \Rightarrow \omega t = 5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \tau = \frac{5}{12}T = \frac{5}{12}\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{12}s$$

ε.

i. Τη στιγμή τ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος άρα η συνισταμένη δύναμη στο σώμα Σ1 είναι το βάρος του, άρα η επιτάχυνση είναι ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας

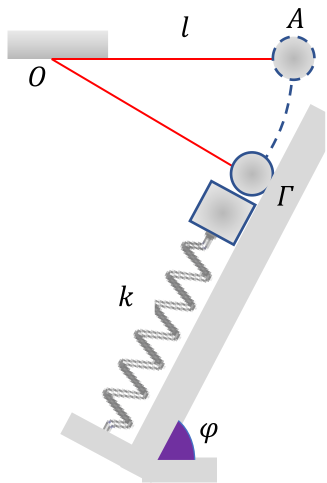
$$\frac{dv}{dt} = a = -g = -10\frac{m}{s^2}$$

ii.

$$\upsilon = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} = -\omega\frac{A\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\frac{m}{s}$$
$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F\upsilon = -mg\upsilon = -10\sqrt{3}\frac{j}{s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Κύβος K μάζα M ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνία φ=60 τοποθετημένος ώστε να στηρίζεται στο ανώτερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 300N/m$ που έχει την διεύθυνση του ελατηρίου και το κάτω άκρο του είναι στερεωμένο στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Μικρή σφαίρα Σ μάζας m είναι δεμένη στο άκρο οριζόντιου νήματος ΟΑ μήκους $l = 1{,}6m$ με το άκρο Ο στερεωμένο ακλόνητα. Δίνουμε στη σφαίρα κατακόρυφη αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 4\sqrt{3}m/s$ προς τα κάτω και όταν το νήμα γίνει κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο συγκρούεται κεντρικά με τον κύβο K. Μετά την κρούση η σφαίρα επιστρέφει στην θέση από την οποία την εκτοξεύσαμε με μηδενική ταχύτητα ενώ ο κύβος κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x = A\eta\mu 10t$ αν πάρουμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου αμέσως μετά την κρούση. Αν η μεταβολή της στροφορμής κάθε σώματος ως προς το Ο εξ αιτίας της κρούσης έχει μέτρο $19{,}2kgm^2s^{-1}$ να βρείτε:

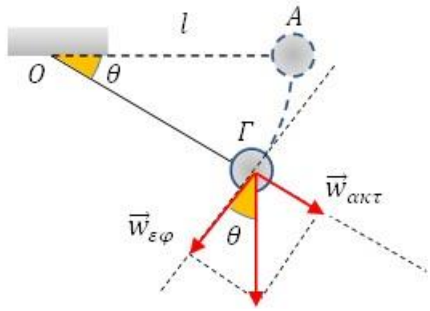


α. Τις μάζες των σωμάτων.
β. Το είδος της κρούσης και το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταβιβάστηκε κατά την κρούση από τη σφαίρα στον κύβο.
γ. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση
δ. Την τάση του νήματος λίγο πριν την κρούση.
ε. Την αλγεβρική τιμή της δύναμης που δέχεται ο κύβος από το ελατήριο μετά την κρούση σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x της ταλάντωσης και την μέγιστη τιμή του μέτρου της.
ζ. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κύβου όταν θα έχει διανύσει διάστημα $s = 0{,}24m$.

Λύση

α. Θα υπολογίσουμε αρχικά την ταχύτητα υ της σφαίρας Σ λίγο πριν την κρούση. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα έργου-ενέργειας:
Από το σχήμα προκύπτει ότι $\theta = 30^o$

$$h = l\eta\mu\theta = l/2$$



$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = mgh \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon = \upsilon_o^2 + 2gh}$$

$$\upsilon = \sqrt{48 + 16} = 8m/s$$

Αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα της σφαίρας είναι υ' που την υπολογίζουμε πάλι με ΘΜΚΕ ή ΑΔΜΕ

$$\boldsymbol{\upsilon'} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{l}{2}} = \sqrt{gl} = 4\frac{m}{s}$$

$$\Delta L = \boldsymbol{-m\upsilon' l - m\upsilon l \Rightarrow \Delta L = ml(-\upsilon' - \upsilon)} \Rightarrow$$

$$\Delta L = m\upsilon' l - m\upsilon l \Rightarrow \Delta L = ml(\upsilon' - \upsilon) \Rightarrow$$

$$-19{,}2 = m \cdot 1{,}6 \cdot (-12) \Rightarrow m = 1kg$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας είναι: $\Delta p_\Sigma = m\Delta\upsilon = -12kg\frac{m}{s}$

$$\Delta p_K = -\Delta p_\Sigma = 12kg\frac{m}{s} \Rightarrow p_K' = 12kg\frac{m}{s}$$

β. Αμέσως μετά την κρούση η ορμή του κύβου είναι:

$$p_K' = 12kg\frac{m}{s}$$

$$k = M\omega^2 \Rightarrow M = 3kg$$

$$p_K' = MV \Rightarrow V = 4m/s$$

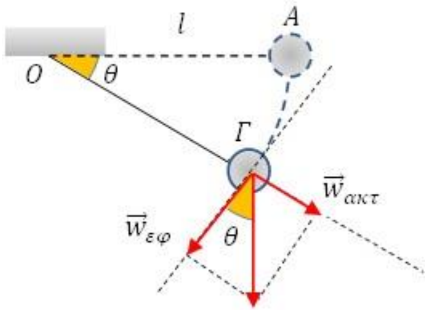
$$\upsilon + \upsilon' = V + V' \Rightarrow 8 + (-4) = 0 + 4 \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow \varepsilon\lambda\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \kappa\rho o\acute{\upsilon}\sigma\eta$$

$$\frac{K_K'}{K_\Sigma} = 75\%$$

γ. Γνωρίζουμε ότι $\Delta K = W_{\Sigma F} = \Sigma W$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{o\lambda}}{dt} = \frac{dW_w + dW_T}{dt}$$



Η τάση του νήματος είναι κάθετη στη μετατόπιση και το έργο της είναι μηδέν , έτσι γράφουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_w}{dt}$$

Μπορούμε να αναλύσουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες

Την ακτινική συνιστώσα

$$w_{\alpha\kappa\tau} = mg\eta\mu\theta \quad , w_{\varepsilon\varphi} = mg\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{w\alpha\kappa\tau} + dw_{W\varepsilon\varphi}}{dt}$$

Το έργο της ακτινικής συνιστώσας είναι μηδέν και έτσι καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dw_{\varepsilon\varphi}}{dt} = \frac{-mg\sigma\upsilon\nu\theta ds}{dt} = mg\sigma\upsilon\nu\theta\upsilon' = 10\frac{\sqrt{3}}{2}4 = 20\sqrt{3}j/s$$

δ. Η τάση του νήματος έχει ακτινική διεύθυνση και μπορούμε να την υπολογίσουμε αν εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο στην ακτινική διεύθυνση:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau} = m\frac{\upsilon^2}{l} \Rightarrow T - w_{\alpha\kappa\tau} = m\frac{\upsilon^2}{l}$$

$$T = \boldsymbol{mg\eta\mu\theta} + m\frac{\upsilon^2}{l} = m\left(\boldsymbol{g\eta\mu\theta} + \frac{\upsilon^2}{l}\right) = \mathbf{1(5 + \frac{64}{1,6}) = 45N}$$

ε.

$$F_{\varepsilon\lambda} + Mg\eta\mu\theta = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -15 - 300x$$

Το πλάτος ταλάντωσης προκύπτει από την υ_{max}

$$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow 4 = 10A \Rightarrow A = 0{,}4m$$

$$x = A \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -15 - 300x = -135N \ \Rightarrow |F_{\varepsilon\lambda}|_{max} = 135$$

ζ.

$$s = 0{,}24m < 0{,}4 = A \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}24 \\ \upsilon > 0 \end{cases}$$

$$v = \omega\sqrt{(A^2 - x^2)} = 10\sqrt{0{,}1600 - 0{,}0576} = 10 \cdot \sqrt{\frac{16}{100} - \frac{5{,}76}{100}} = \frac{10}{10}\sqrt{10{,}24} = 3{,}2 m/s$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -kxv = -300 \cdot 0{,}24 \cdot 3{,}2 = - - \mathbf{230{,}4}\frac{j}{s}$$