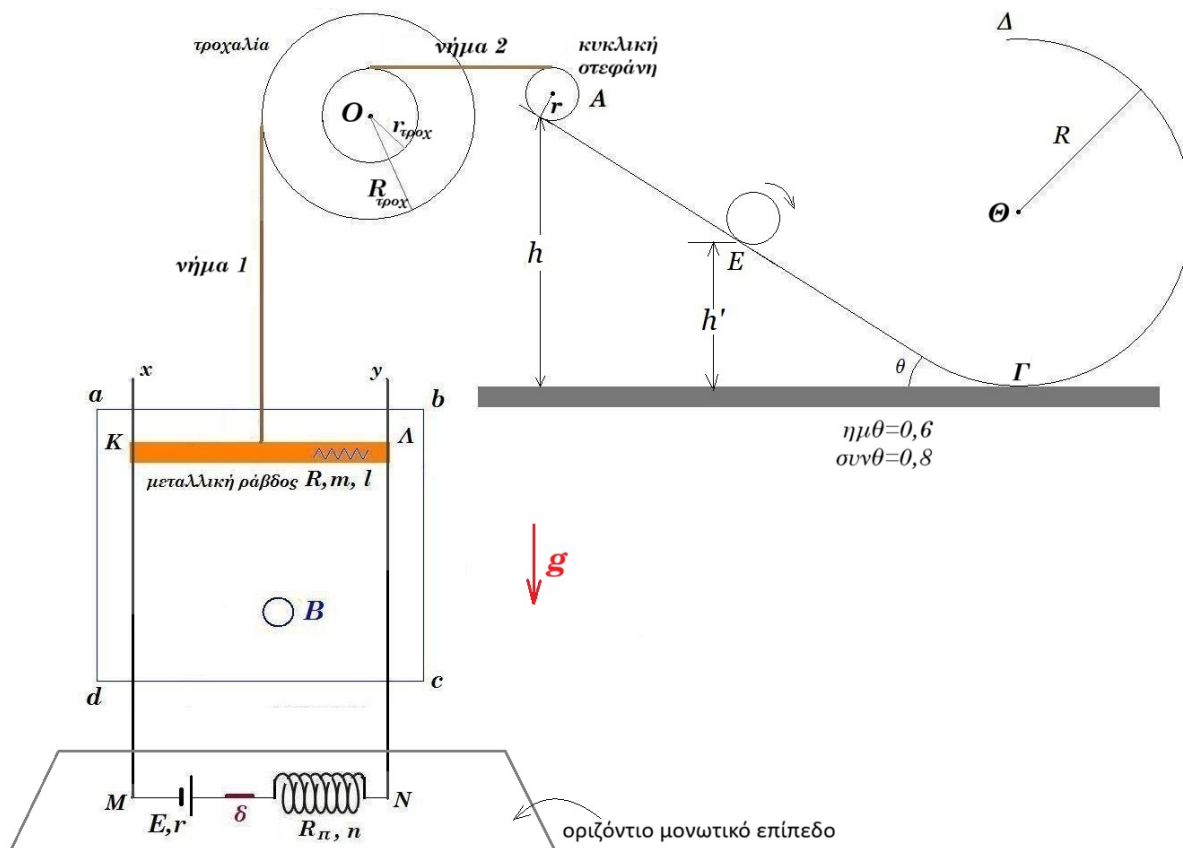




Θεωρούμε την διάταξη του σχήματος, σε κατάσταση ισορροπίας, σε κατακόρυφο επίπεδο. Στη θέση A του κεκλιμένου επιπέδου ισορροπεί ομογενής κυκλική στεφάνη μάζας $m=3\text{kg}$, ακτίνας $r=0,1\text{m}$. Το κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσεως θ , ($\eta\mu\theta=0,6$, $\sigma\upsilon\nu\theta=0,8$) στην βάση του συνδέεται με κατακόρυφο ημικύκλιο ακτίνας $R=1\text{m}$. Η στεφάνη στο άνω της άκρο συνδέεται με οριζόντιο αβαρές μη εκτατό νήμα 2 (σταθερού μήκους) με τροχαλία μάζας $M=5\text{kg}$ εσωτερικής ακτίνας $r_{\text{τροχ}}=0,2\text{m}$, εξωτερικής ακτίνας $R_{\text{τροχ}}=0,5\text{m}$. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδο της. Γύρω από την τροχαλία έχουμε τυλίξει αρκετές φορές αβαρές μη εκτατό νήμα 1, το οποίο συνδέεται με την μεταλλική ράβδο ΚΛ στο μέσον αυτής. Η μεταλλική ράβδος ΚΛ ισορροπεί σε οριζόντια θέση, έχει μήκος $l=1\text{m}$ και μάζα $m=0,5\text{kg}$, είναι σε επαφή με κατακόρυφους αγωγούς Mx , Ny , που απέχουν απόσταση $l=1\text{m}$. Το πηνίο φέρει 1000 σπείρες/m, διαρρέεται από συνεχές ρεύμα εντάσεως I , ενώ στο κέντρο του το μέτρο της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου είναι $B_{\pi\eta\nu} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Tesla}$. Στον χώρο $abcd$ υπάρχει οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο εντάσεως B .

A. Βρείτε την ένταση του μαγνητικού πεδίου B , φορά, μέτρο.

Κάποια στιγμή ($t_0=0$) αφαιρούμε το νήμα 2 ενώ ταυτόχρονα ανοίγουμε τον διακόπτη δ , οπότε η στεφάνη κατέρχεται επί του κεκλιμένου επιπέδου κυλιόμενη (δεν ολισθαίνει), ενώ η ράβδος κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω ενώ είναι συνεχώς σε επαφή με τους αγωγούς Mx , Ny και η τροχαλία περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της έχοντας σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu, \text{τροχ}} = 10/3 \text{ rad/s}^2$.

B. Εξηγήστε γιατί φορτίζεται η κατερχόμενη ράβδος ΚΛ. Εκφράστε την τάση V_{AK} στα άκρα της, συναρτήσει του χρόνου, εάν η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει μέτρο $B=0,1\text{T}$.

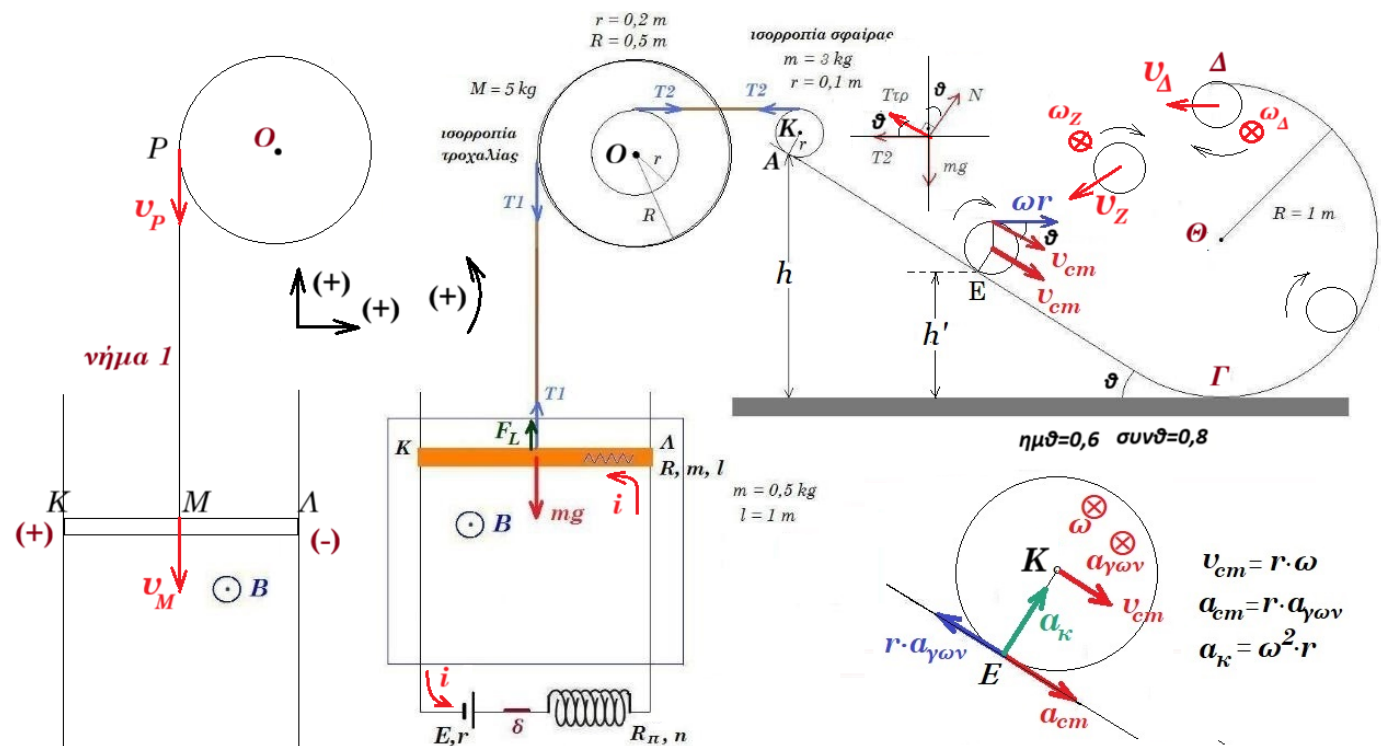
Γ. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ η στεφάνη αρχίζει να κατέρχεται κυλιόμενη επί του κεκλιμένου επιπέδου με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu, \text{στεφ}} = 30 \text{ rad/s}^2$. Τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$ φθάνει στο σημείο E. Βρείτε την ταχύτητα του ανώτερου σημείου της στεφάνης ως προς την οριζόντιο τη στιγμή t_1 καθώς και την επιτάχυνση του σημείου επαφής της στεφάνης με το κεκλιμένο επίπεδο, σημείο E.

Δ. Η στεφάνη κυλίζει (δεν ολισθαίνει) κινούμενη στο κεκλιμένο επίπεδο, διέρχεται από την θέση Γ, ανέρχεται κυλιόμενη στο ημικύκλιο και διέρχεται από την ανώτατη Δ του ημικυκλίου τη χρονική στιγμή t_2 έχοντας ταχύτητα μέτρου $v_\Delta = 3 \text{ m/s}$. Να βρείτε :

- την δύναμη που δέχεται από το ημικύκλιο καθώς διέρχεται από το σημείο Δ
- την ταχύτητά της και την γωνιακή της ταχύτητα (διεύθυνση, φορά, μέτρο) μετά από **0,2 s**. Πόσες στροφές κάνει σε $\Delta t = 0,2 \text{ s}$;
- την στροφορμή της στεφάνης λόγω μεταφορικής κίνησης (όχι περιστροφικής), ως προς το άκρο Δ του ημικυκλίου τη στιγμή $t_2 + 0,2 \text{ s}$.

Δίνονται : μαγνητική διαπερατότητα του κενού $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$, επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$

μια λύση



A) η στεφάνη ισορροπεί στη θέση Α : δέχεται δυνάμεις, το βάρος της $w=mg$, την αντίδραση N από το κεκλιμένο, την τάση T_2 του νήματος 2, δύναμης τριβής $T_{\tau\rho}$ από το κεκλιμένο διότι

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow T_2 r - T_{\tau\rho} r = 0 \Rightarrow T_2 = T_{\tau\rho} \text{ τα μέτρα τους είναι ίσα}$$

$$\begin{aligned} \text{άξονας } x \text{ οριζόντιος : } \Sigma F_x = 0 \Rightarrow N \eta\mu\theta - T_2 - T_{\tau\rho} \sigma\eta\theta = 0 \Rightarrow N 0,6 - T_2 - T_2 0,8 = 0 \Rightarrow N 0,6 = 1,8 \\ T_2 \Rightarrow N = 3 T_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{άξονας } y \text{ κατακόρυφος : } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N \sigma\eta\theta + T_{\tau\rho} \eta\mu\theta - mg = 0 \Rightarrow N 0,8 + T_2 0,6 = 3 \cdot 10 \Rightarrow 3 T_2 0,8 + \\ 0,6 T_2 = 30 \Rightarrow 3 T_2 = 30 \Rightarrow T_2 = 10 \text{ Newton} = T_{\tau\rho} \Rightarrow N = 30 \text{ Newton} \end{aligned}$$

η τροχαλία δέχεται δύο δυνάμεις T_1, T_2 λόγω των νημάτων

$$\text{ισορροπία τροχαλίας : } \Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T_1 R - T_2 r = 0 \Rightarrow T_1 0,5 - 10 0,2 = 0 \Rightarrow T_1 = 4 \text{ Newton}$$

ο διακόπτης είναι κλειστός οπότε το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα με συνέπεια να δημιουργείται μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου, στο κέντρο του πηνίου η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι :

$$B_{\pi\eta\nu} = 4\pi \cdot 10^{-7} i n \Rightarrow 4\pi \cdot 10^{-3} = 4\pi \cdot 10^{-7} i \cdot 1000 \Rightarrow i = 10 \text{ A} \text{ ένταση ρεύματος που διαρρέει την ράβδο ΚΛ}$$

η αγωγή ράβδος ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα ενώ βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο οι δυναμικές γραμμές του οποίου είναι οριζόντιες, κάθετες στην ράβδο, έτσι στη ράβδο ασκείται δύναμη Laplace F_L που είναι κάθετη στη ράβδο όμως δεν γνωρίζουμε την φορά της, (έστω προς τα πάνω)

ισορροπία ράβδου ΚΛ : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 - mg + F_L = 0 \Rightarrow 4 - 0,5 \cdot 10 + F_L = 0 \Rightarrow F_L = 1 \text{ N}$ σημαίνει ότι το μέτρο της δύναμης Laplace είναι 1 N η κατεύθυνση είναι κατακόρυφη προς τα πάνω

$$F_L = B i l \Rightarrow 1 \text{ N} = B \cdot 10 \text{ A} \cdot 1 \text{ m} \Rightarrow B = 0,1 \text{ Tesla} \text{ οριζόντιο με φορά προς τα έξω}$$

B) όταν αφαιρέσουμε το νήμα 2 η στεφάνη θα κυλίσει πάνω στο κεκλιμένο γιατί δεν θα υπάρχει η τάση του νήματος 2 και η τροχαλία θα αρχίσει να περιστρέφεται γιατί δέχεται την τάση του νήματος 1 λόγω της ράβδου

ο διακόπτης ανοίγει, μηδενίζεται η δύναμη Laplace οπότε η ράβδος θα κινηθεί προς τα κάτω

τα σημεία P της τροχαλίας και M μέσον της ράβδου επειδή συνδέονται με το νήμα 1 έχουν ίσες ταχύτητες άρα ίσες επιταχύνσεις $a_P = a_M$

$$\text{η } a_P \text{ είναι η επιτρόχιος επιτάχυνση της τροχαλίας } a_P = a_{\gamma\omega\nu, \text{τροχ}} R_{\text{τροχ}} = 10/3 \text{ rad/s}^2 \cdot 0,5 \text{ m} = 5/3 \text{ m/s}^2$$

$$\text{η } a_M \text{ είναι η επιτάχυνση } a \text{ της ράβδου οπότε } a = 5/3 \text{ m/s}^2$$

$$\text{η ράβδος εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση οπότε } v = a t = 5/3 t \text{ (m/s)}$$

καθώς η ράβδος κινείται μέσα στο μαγνητικό πεδίο τα ηλεκτρόνια της δέχονται δύναμη Lorentz και κινούνται προς το άκρο Λ (-) το οποίο φορτίζεται αρνητικά ενώ το άκρο Κ (+) φορτίζεται θετικά

$$\text{έτσι αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού } V_{\text{ΚΛ}} = B l v = 0,1 \cdot 1 \cdot 5/3 t \Rightarrow V_{\text{ΚΛ}} = t/6 \text{ (S.I.)}$$

$$\text{τότε } V_{\text{ΛΚ}} = - t/6 \text{ (S.I.)}$$

Γ) η στεφάνη κυλιέται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο $a_{\text{cm}} = a_{\gamma\omega\nu, \text{στεφ}} r = 30 \text{ rad/s}^2 \cdot 0,1 \text{ m} = 3 \text{ m/s}^2$
επιτάχυνση του κέντρου μάζας της στεφάνης

$$\text{τότε η ταχύτητα του κέντρου μάζας } v_{\text{cm}} = a_{\text{cm}} r = 3 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ s} \Rightarrow v_{\text{cm}} = 3 \text{ m/s} \text{ γωνιακή ταχύτητα } \omega = a_{\gamma\omega\nu, \text{στεφ}} t = 30 \text{ rad/s}^2 \cdot 1 \text{ s} = 30 \text{ rad/s}$$

το ανώτερο σημείο της στεφάνης ως προς την οριζόντιο έχει δύο ταχύτητες μια λόγω μεταφοράς $v_{\text{cm}} = 3 \text{ m/s}$ και μια λόγω περιστροφής της στεφάνης $\omega r = a_{\gamma\omega\nu, \text{στεφ}} t r = 30 \text{ rad/s}^2 \cdot 1 \text{ s} \cdot 0,1 \text{ m} = 3 \text{ m/s} = v_{\text{cm}}$

$$\text{οι διευθύνσεις τους σχηματίζουν γωνία } \theta \text{ οπότε η "συνισταμένη" ταχύτητα έχει μέτρο : } v^2 = v_{\text{cm}}^2 + (\omega r)^2 + 2 v_{\text{cm}} \omega r \text{ συν}\theta = 2 v_{\text{cm}}^2 + 2 v_{\text{cm}}^2 \text{ συν}\theta = 2 v_{\text{cm}}^2 (1 + \text{συν}\theta) = 2 \cdot 3^2 (1 + 0,8) = 3,6 \cdot 3^2 \Rightarrow v = 3\sqrt{3,6}$$

m/s

στο σημείο E η στεφάνη έχει τρεις επιταχύνσεις την επιτάχυνση του κέντρου μάζας, την γωνιακή και την κεντρομόλο αλλά η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και η γωνιακή είναι αντίθετες και έχουν συνισταμένη μηδέν ενώ η κεντρομόλος ισούται με $a_k = v^2 / r = \omega^2 r = 30^2 \cdot 0,1 = 90 \text{ m/s}^2$

Δ) όταν η στεφάνη διέρχεται από την ανώτερη θέση Δ της τροχιάς της, η ταχύτητά της έχει μέτρο **$v_\Delta = 3 \text{ m/s}$** :

$$\Sigma F_y = F_k \Rightarrow mg + N_\Delta = m v_\Delta^2 / (R - r) \Rightarrow 3 \cdot 10 + N_\Delta = 3 \cdot 3^2 / (1 - 0,1) \Rightarrow 30 + N_\Delta = 27 / 0,9 \Rightarrow N_\Delta = 0$$

η στεφάνη στον αέρα δεν δέχεται δύναμη που να δημιουργεί ροπή συνεπώς η γωνιακή ταχύτητά της είναι σταθερή $\omega = v_\Delta / r = 3 \text{ m/s} / 0,1 \text{ m} = 30 \text{ rad/s}$

$$\text{αριθμός στροφών } N = \theta / 2\pi = \omega \Delta t / 2\pi = 30 \text{ rad/s} \cdot 0,2 \text{ s} / 2\pi = 3/\pi \text{ περιστροφές}$$

η στεφάνη κάνει οριζόντια βολή για το κέντρο μάζας της :

άξονας x : $v_x = v_\Delta = 3 \text{ m/s}$ $x = v_x t = 3 \text{ m/s} \cdot 0,2 \text{ s} = 0,6 \text{ m}$ οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά από την άκρη του ημικυκλίου

άξονας y : $v_y = g t = 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,2 \text{ s} = 2 \text{ m/s}$ $y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,2^2 \text{ s}^2 = 0,2 \text{ m}$ κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω

το μέτρο της ταχύτητας είναι : $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow v = \sqrt{13} \text{ m/s}$ η κατεύθυνσή της : $\text{εφφ} = v_y / v_x = 2/3$

όσον αφορά την στροφορμή της στεφάνης λόγω μεταφορικής κίνησης ως προς το σημείο Δ :

$$L_1 = m v_x (y + r) = 3 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} (0,2 \text{ m} + 0,1 \text{ m}) = 2,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \text{ οριζόντια προς τα μέσα } (-)$$

$$L_2 = m v_y x = 3 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s} \cdot 0,6 \text{ m} = 3,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \text{ οριζόντια προς τα έξω } (+)$$

$$\text{συνολική στροφορμή : } L = L_1 + L_2 = -2,7 + 3,6 = +0,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \text{ οριζόντια προς τα έξω}$$