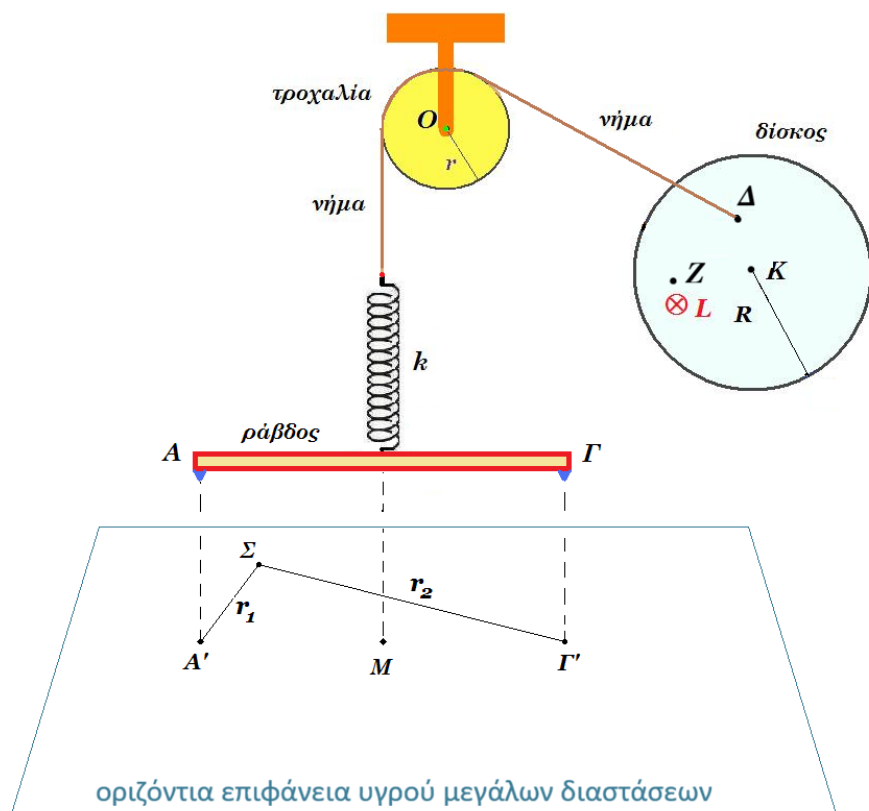




Στην κατακόρυφη διάταξη του σχήματος ο δίσκος ακτίνας $R=0,5\text{m}$ περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα γύρω από οριζόντιο άξονα $\chi'\chi$ που διέρχεται από το κέντρο του K και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στοιχειώδης μάζα Δm του δίσκου που βρίσκεται στο σημείο Z έχει κινητική ενέργεια $2 \cdot 10^{-5}\text{J}$ και στροφορμή μέτρου $4 \cdot 10^{-6}\text{ kg m}^2/\text{s}$. Η ράβδος $A\Gamma$ μάζας $m=0,1\text{kg}$, μήκους $l=0,6\text{m}$ που είναι δεμένη στο κάτω άκρο του ελατηρίου σταθεράς $k=40\text{N/m}$ στο μέσον της, εκτελεί Α.Α.Τ. εξ' αιτίας της περιστροφής του δίσκου. Η τροχαλία έχει μηδαμινή μάζα, ακτίνα $r=0,3\text{m}$. Το αβαρές, μη εκτατό νήμα μπορεί να ολισθαίνει στην περιφέρεια της τροχαλίας χωρίς τριβές. Δίνεται $(\Delta K) = R/2$.

α. Σχεδιάστε την ταχύτητα του σημείου Δ του δίσκου που συνδέεται μέσω του νήματος με το σύστημα «ελατήριο - ράβδος $A\Gamma$ » και βρείτε την επιτάχυνσή του.

β. Μεταβάλλοντας την συχνότητα περιστροφής του δίσκου πως μεταβάλλεται το πλάτος ταλάντωσης της ράβδου;

γ. Εάν το πλάτος της ταλάντωσης της ράβδου είναι $0,275\text{ m}$ να βρεθεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν η επιτάχυνση της ράβδου λαμβάνει την μέγιστη τιμή της.

Τα άκρα A, Γ της ράβδου φέρουν μικρές ακίδες και καθώς αυτή ταλαντώνεται, ακουμπούν στα σημεία A', Γ' της επιφάνειας υγρού με συνέπεια να δημιουργούνται εγκάρσια κύματα στην επιφάνειά του που διαδίδονται με ταχύτητα $v=1/\pi\text{ m/s}$. Παρατηρούμε ότι ορισμένα σημεία της ευθείας ($A'\Gamma'$) μένουν ακίνητα συνεχώς και ορισμένα ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος 2mm . Έστω σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού το οποίο απέχει απόσταση $r_1=0,3\text{m}$ και $r_2=0,4\text{m}$ από τα σημεία A', Γ' αντίστοιχα.

δ. Σχεδιάστε την ταχύτητα του σημείου Σ συναρτήσει του χρόνου, θεωρώντας σαν $t=0$ τη στιγμή που τα σημεία A' και Γ' περνούν από τη θέση ισορροπίας τους με θετική ταχύτητα.

ε. Βρείτε τις θέσεις των σημείων της ευθείας ($A'\Gamma'$) που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

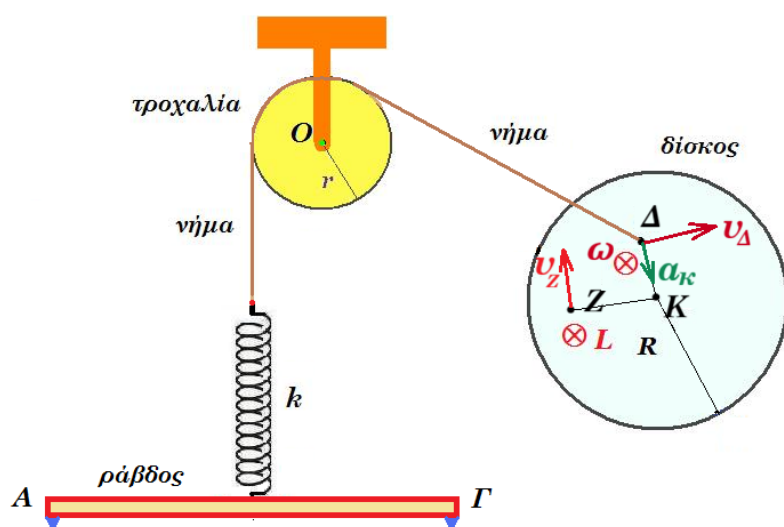
(α)

ο δίσκος στρέφεται με σταθερή συχνότητα, εάν ω είναι η γωνιακή του ταχύτητα περιστροφής και v η γραμμική ταχύτητα του σημείου Z έχουμε την σχέση : $v = \omega (KZ)$

η κινητική ενέργεια της στοιχειώδους μάζας Δm : $K = \frac{1}{2} \Delta m v^2$ η στροφορμή της : $L = \Delta m v (KZ)$
 διαιρώντας κατά μέλη έχουμε : $K/L = v/2(KZ) = \omega/2 \Rightarrow \omega/2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ J} / 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2/\text{s} = 5 \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$ γωνιακή ταχύτητα δίσκου

δίνεται το διάνυσμα της στροφορμής της στοιχειώδους μάζας Δm , οπότε η ταχύτητα του σημείου Z είναι κάθετη στην ακτίνα (KZ) και η ταχύτητα του σημείου Δ είναι κάθετη στην ακτίνα $(K\Delta)$ όπως στο σχήμα

η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι : $a_K = v^2 / (K\Delta) = \omega^2 (K\Delta) = \omega^2 R/2 = 100 \cdot 0,5/2 = 25 \text{ m/s}^2$



(β)

θα βρούμε την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή : $\omega_0^2 = k/m = 40 / 0,1 \Rightarrow \omega_0 = 20 \text{ rad/s}$ για να έχουμε μέγιστο πλάτος ταλάντωσης της ράβδου (συντονισμός) πρέπει $\omega = \omega_0$

το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από την συχνότητα του διεγέρτη, εδώ του δίσκου,

σε πολύ χαμηλές τιμές της συχνότητας κοντά στο μηδέν, το πλάτος ταλάντωσης είναι κοντά στην τιμή του $(K\Delta) = R/2 = 0,5\text{m} / 2 = 0,25 \text{ m}$

όσο αυξάνεται η συχνότητα περιστροφής του δίσκου, αυξάνεται το πλάτος ταλάντωσης της ράβδου, όταν $\omega = \omega_0$ η ράβδος ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος

για τιμές συχνότητας μεγαλύτερες από $f_0 = \omega_0/2\pi = 10/\pi \text{ Hz}$ το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται

για πολύ μεγάλες τιμές της συχνότητας περιστροφής του δίσκου το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται και για πάρα πολύ μεγάλες τιμές της συχνότητας το πλάτος μηδενίζεται διότι ο ταλαντωτής δεν προλαβαίνει να παρακολουθήσει την κίνηση του δίσκου

(γ)

ισορροπία ράβδου : $mg = k \Delta l_0 \Rightarrow 0,1 \text{ kg } 10 \text{ m/s}^2 = 40 \text{ N/m } \Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = 1/40 \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$
 επιμήκυνση ελατηρίου

μέγιστη επιτάχυνση έχει η ράβδος όταν βρίσκεται στο πάνω άκρο ή στο κάτω άκρο της ταλάντωσής της

$$U_{\max, \text{ελατ}} = \frac{1}{2} 40 (0,275 + 0,025)^2 = 20 \cdot 0,3^2 = 1,8 \text{ J}$$

$$U_{\min, \text{ελατ}} = \frac{1}{2} 40 (0,275 - 0,025)^2 = 20 \cdot 0,25^2 = 1,25 \text{ J}$$

(δ)

όταν οι ακίδες των άκρων της ράβδου ακουμπούν την επιφάνεια του υγρού δημιουργούνται κύματα, ίδιας συχνότητας με την συχνότητα ταλάντωσης της ράβδου, τα σημεία Α' και Γ' γίνονται πηγές εγκάρσιων κυμάτων που διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού

μετά τη συμβολή των κυμάτων από τις πηγές Α' και Γ' το μέγιστο πλάτος ταλαντώσεως είναι 2mm άρα για κάθε κύμα είναι 1mm

$$y_{A'}(t) = 0,001 \eta\mu(10.t) = y_{\Gamma'}(t) \text{ (S.I.)} \quad v_{A'}(t) = 0,01 \sigma\upsilon\nu(10.t) = v_{\Gamma'}(t) \text{ (S.I.)}$$

$$\lambda = v T = v \cdot 2\pi / \omega = 2\pi \cdot 1/\pi \text{ m/s} / 10 \text{ rad/s} \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m} \text{ μήκος κύματος}$$

για το σημείο Σ έχουμε για το κύμα από το σημείο Α' :

$$t_1 = r_1 / v = 0,3 \text{ m} / 1/\pi \text{ m/s} = 0,3\pi \text{ s}$$

$$y_1(t) = 0,001 \eta\mu(10.t - 2\pi \cdot 0,3/0,2) = 0,001 \eta\mu(10.t - 3\pi) \quad t \geq 0,3\pi \text{ s}$$

$$v_1(t) = 0,01 \sigma\upsilon\nu(10.t - 3\pi) = -0,01 \sigma\upsilon\nu(10.t) \quad t \geq 0,3\pi \text{ s}$$

για το κύμα από το σημείο Γ' :

$$t_2 = r_2 / v = 0,4 \text{ m} / 1/\pi \text{ m/s} = 0,4\pi \text{ s}$$

$$y_2(t) = 0,001 \eta\mu(10.t - 2\pi \cdot 0,4/0,2) = 0,001 \eta\mu(10.t - 4\pi) \quad t \geq 0,4\pi \text{ s}$$

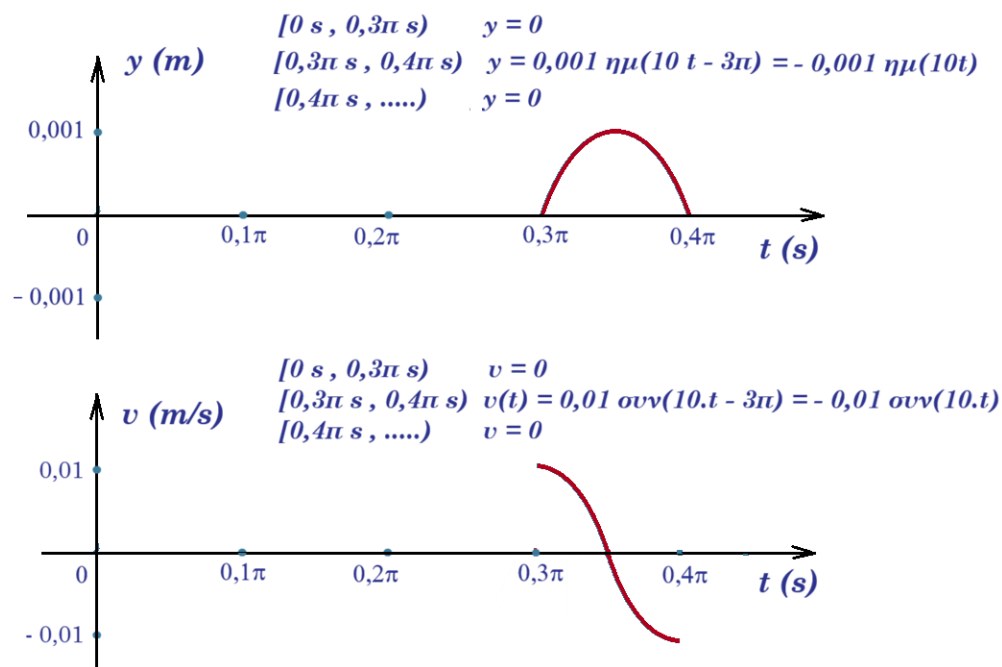
$$\begin{aligned} \text{συμβολή: } y_1(t) + y_2(t) &= 0,001 \eta\mu(10.t - 3\pi) + 0,001 \eta\mu(10.t - 4\pi) = \\ &= 0,002 \sigma\upsilon\nu(\pi/2) \eta\mu(10.t - 7\pi/2) = 0 \end{aligned}$$

$$r_2 - r_1 = 0,4 - 0,3 = 0,1 \text{ m} = \lambda/2 \text{ όταν φθάσουν και τα δύο κύματα θα έχουμε ακινησία}$$

$$0 \text{ s} \leq t < 0,3\pi \text{ s} \quad y = 0$$

$$0,3\pi \text{ s} \leq t < 0,4\pi \text{ s} \quad y = 0,001 \eta\mu(10 t - 3\pi)$$

$$t \geq 0,4\pi \text{ s} \quad y = 0$$



(ε) σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος 2 mm

$$x_1 - x_2 = N \lambda \quad x_1 + x_2 = 0,6 \text{ m}$$

$$2 x_1 = 0,6 \text{ m} + N 0,2 \Rightarrow x_1 = 0,3 \text{ m} + N 0,1$$

$$0 \leq x_1 \leq 0,6 \text{ m} \Rightarrow 0 \leq 0,3 \text{ m} + N 0,1 \leq 0,6 \Rightarrow -0,3 \leq N 0,1 \leq 0,3 \Rightarrow -3 \leq N \leq +3 \quad N = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$N = -3 \quad x_1 = 0,3 \text{ m} - 3 \cdot 0,1 = 0 \quad \text{άκρο } A' \quad x_2 = 0,6 \text{ m}$$

$$N = -2 \quad x_1 = 0,3 \text{ m} - 2 \cdot 0,1 = 0,1 \text{ m} \quad x_2 = 0,5 \text{ m}$$

$$N = -1 \quad x_1 = 0,3 \text{ m} - 1 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ m} \quad x_2 = 0,4 \text{ m}$$

$$N = 0 \quad x_1 = 0,3 \text{ m} \quad \text{μέσον } M \quad x_2 = 0,3 \text{ m}$$

$$N = 1 \quad x_1 = 0,3 \text{ m} + 1 \cdot 0,1 = 0,4 \text{ m} \quad x_2 = 0,2 \text{ m}$$

$$N = 2 \quad x_1 = 0,3 \text{ m} + 2 \cdot 0,1 = 0,5 \text{ m} \quad x_2 = 0,1 \text{ m}$$

$$N = 3 \quad x_1 = 0,3 \text{ m} + 3 \cdot 0,1 = 0,6 \text{ m} \quad \text{άκρο } \Gamma' \quad x_2 = 0 \text{ m}$$

και όλα τα σημεία της ευθείας εκτός του ευθυγράμμου τμήματος $A'\Gamma'$ διότι η διαφορά των αποστάσεων από τα A', Γ' είναι $x_1 - x_2 = (A'\Gamma') = 0,6 \text{ m} = 3 \cdot 0,2 \text{ m} = 3 \lambda$

ακίνητα σημεία: 0,05m 0,15m 0,25m 0,35m 0,45m 0,55m