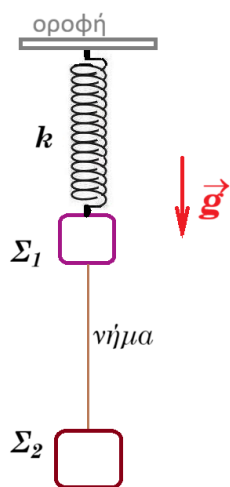


Στο σχήμα, ένα κατακόρυφο, αμελητέας μάζας, ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$ είναι στερεωμένο σε οροφή. Στο κάτω άκρο του είναι στερεωμένο ένα σώμα Σ_1 , μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$. Από το σώμα Σ_1 μέσω ενός μη εκτατού νήματος, αμελητέας μάζας είναι κρεμασμένο ένα δεύτερο σώμα Σ_2 , μάζας $m_2 = 3 \text{ kg}$. Το σύστημα των σωμάτων αρχικά ισορροπεί.



Τη στιγμή $t_0 = 0$ κόβουμε το νήμα. Το σώμα Σ_1 θα εκτελέσει Α.Α.Τ. και το σώμα Σ_2 ελεύθερη πτώση.

Μελετήστε την κίνηση του Σ_1 .

ισορροπία σωμάτων Σ_1, Σ_2 : $(m_1 + m_2)g = k \Delta l_0 \Rightarrow 4 \text{ kg } 10 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ N/m } \Delta l_0$
 $\Rightarrow \Delta l_0 = 0,4 \text{ m}$ αρχική επιμήκυνση ελατηρίου

σώμα Σ_2 : $y = \frac{1}{2} g t^2$ $v_2 = g t$

ισορροπία Σ_1 : $m_1 g = k \Delta l_1 \Rightarrow 1 \text{ kg } 10 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ N/m } \Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1 \text{ m}$
 επιμήκυνση ελατηρίου

τη στιγμή που κόβουμε το νήμα τα σώματα είναι ακίνητα, το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta l_0 = 0,4 \text{ m}$ οπότε το σώμα Σ_1 βρίσκεται χαμηλότερα από την θέση ισορροπίας του όταν είναι μόνο του, κατά $\Delta l_0 - \Delta l_1 = 0,4 \text{ m} - 0,1 \text{ m} = 0,3 \text{ m}$

θεωρούμε θετική κατεύθυνση την κατακόρυφη προς τα προς τα κάτω

το Σ_1 εκτελεί Α.Α.Τ. με κυκλική συχνότητα $\omega^2 = k / m_1 = 100 \text{ N/m} / 1 \text{ kg} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$

χρόνος μιας περιόδου ταλάντωσης $T = 2\pi / \omega = \pi / 5 \text{ s}$ συχνότητα ταλάντωσης $f = 5 / \pi \text{ Hz}$

απομάκρυνση από θέση ισορροπίας $x = 0,3 \eta\mu(10t + \pi/2)$ $\eta\mu(10t + \pi/2) = x / 0,3$

ταχύτητα σώματος Σ_1 $v = 3 \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2)$

επιτάχυνση σώματος Σ_1 $a = -30 \eta\mu(10t + \pi/2) = -30 x / 0,3 \Rightarrow a = -100 x$

$$\Sigma F = m_1 a \Rightarrow m_1 g + F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = m_1 a \Rightarrow 10 + F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = -30 \eta\mu(10t + \pi/2) \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = -10 - 30 \eta\mu(10t + \pi/2) = F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}(t) \quad \text{δύναμη που δέχεται το } \Sigma 1 \text{ από το ελατήριο}$$

συναρτήσει του χρόνου

$$\eta \quad F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = -10 - 100x = -100(x + 0,1) = F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}(x) \quad -0,3m \leq x \leq +0,3m \quad \text{δύναμη που δέχεται το}$$

$\Sigma 1$ από το ελατήριο συναρτήσει της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του

$$\text{δυναμική ενέργεια ελατηρίου : } U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}(x) = \frac{1}{2} 100 (x + 0,1)^2 = 50 (x + 0,1)^2$$

$$\text{κινητική ενέργεια } \Sigma 1 : K = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 3^2 \sigma\upsilon\nu^2(10t + \pi/2) = 4,5 \sigma\upsilon\nu^2(10t + \pi/2) =$$

$$4,5 - 4,5 \eta\mu^2(10t + \pi/2) = 4,5 - 4,5 (x / 0,3)^2 = 4,5 - 4,5 x^2 / 0,09 = 4,5 - 50 x^2$$

$$\text{δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του } \Sigma 1 : U_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,3^2 \eta\mu^2(10t + \pi/2) =$$

$$4,5 \eta\mu^2(10t + \pi/2) = 50 x^2$$

$$\text{μηχανική ενέργεια της ταλάντωσης του } \Sigma 1 : E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,3^2 = 4,5 \text{ J}$$

$$\text{έχουμε : } K + U_{\tau\alpha\lambda} = 4,5 \text{ J} = E_{\tau\alpha\lambda}$$

$$\text{δυναμική ενέργεια βαρύτητας του } \Sigma 1 : \quad (\text{θεωρούμε επίπεδο αναφοράς } U_{\beta\alpha\rho\nu\tau} \text{ το}$$

χαμηλότερο) $U_{\beta\alpha\rho\nu\tau}(x) = m_1 g h = m_1 g (A - x) = 10 (0,3 - x) \Rightarrow U_{\beta\alpha\rho\nu\tau}(x) = 3 - 10 x$

$$-0,3m \leq x \leq +0,3m$$

$$\text{ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας } \Sigma 1 : \quad dK/dt = m_1 v a = 1 \cdot 3 \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) [-30$$

$$\eta\mu(10t + \pi/2)] = -90 \eta\mu(10t + \pi/2) \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2)$$

$$\text{ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης του } \Sigma 1 : \quad dU_{\tau\alpha\lambda}/dt = k x v =$$

$$100 \cdot 0,3 \eta\mu(10t + \pi/2) \cdot 3 \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) = +90 \eta\mu(10t + \pi/2) \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2)$$

$$\text{παρατηρούμε ότι : } dU_{\tau\alpha\lambda}/dt = -dK/dt \quad \text{αυτό εξηγείται από την σχέση } K + U_{\tau\alpha\lambda} = 4,5 \text{ J} =$$

$$E_{\tau\alpha\lambda} = \text{σταθερή} \quad \text{οπότε } dU_{\tau\alpha\lambda}/dt + dK/dt = 0$$

$$\text{ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας του } \Sigma 1 : \quad dU_{\beta\alpha\rho\nu\tau}/dt = -m_1 g v =$$

$$-10 \cdot 3 \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) = -30 \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2)$$

$$\text{ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας ελατηρίου : } dU_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}/dt = k (x + \Delta l_1) v =$$

$$100 [0,3 \eta\mu(10t + \pi/2) + 0,1] \cdot 3 \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) = 90 \eta\mu(10t + \pi/2) \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) + 30$$

$$\sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2)$$

$$dU_{\beta\alpha\rho\nu\tau}/dt + dU_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}/dt = -30 \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) + 90 \eta\mu(10t + \pi/2) \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) + 30$$

$$\sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) = 90 \eta\mu(10t + \pi/2) \sigma\upsilon\nu(10t + \pi/2) = dU_{\tau\alpha\lambda}/dt = -dK/dt$$

$$\begin{aligned} \text{έχουμε ότι } U_{\betaαρυτ}(x) + U_{\epsilon\lambda\alpha\tau}(x) + K &= 3 - 10x + 50(x + 0,1)^2 + 4,5 - 50x^2 = \\ &= 3 - 10x + 50x^2 + 10x + 0,5 + 4,5 - 50x^2 = 3 + 0,5 + 4,5 = 8 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{αλλά ισχύει } U_{\epsilon\lambda\alpha\tau, \max} = \frac{1}{2} k (A + 0,1)^2 = 50 \cdot 0,4^2 = 50 \cdot 0,16 = 8 \text{ J}$$

$$\text{συμπέρασμα : } U_{\betaαρυτ}(x) + U_{\epsilon\lambda\alpha\tau}(x) + K = U_{\epsilon\lambda\alpha\tau, \max} = 8 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \text{μεταβολή της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας του Σ1 : } \Delta U_{\betaαρυτ} &= U_{\betaαρυτ}(x_2) - U_{\betaαρυτ}(x_1) \\ &= 3 - 10x_2 - (3 - 10x_1) = 10(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου : } \Delta U_{\epsilon\lambda\alpha\tau} &= U_{\epsilon\lambda\alpha\tau}(x_2) - U_{\epsilon\lambda\alpha\tau}(x_1) = \\ &= 50(x_2 + 0,1)^2 - 50(x_1 + 0,1)^2 = 50(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 0,2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{μεταβολή της κινητικής ενέργειας Σ1 : } \Delta K &= K_2 - K_1 = 4,5 - 50x_2^2 - (4,5 - 50x_1^2) = \\ &= 50(x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta U_{\betaαρυτ} + \Delta U_{\epsilon\lambda\alpha\tau} + \Delta K &= \\ &= 10(x_1 - x_2) + 50(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 0,2) + 50(x_1 - x_2)(x_2 + x_1) = \\ &= 10(x_1 - x_2) - 50(x_1 - x_2)(x_2 + x_1 + 0,2) + 50(x_1 - x_2)(x_2 + x_1) = \\ &= (x_1 - x_2) [10 - 50(x_2 + x_1 + 0,2) + 50(x_2 + x_1)] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{συμπέρασμα } \Delta U_{\betaαρυτ} + \Delta U_{\epsilon\lambda\alpha\tau} + \Delta K = 0$$

πράγματι επειδή : $U_{\betaαρυτ}(x) + U_{\epsilon\lambda\alpha\tau}(x) + K = U_{\epsilon\lambda\alpha\tau, \max} = 8 \text{ J} = \text{σταθερή ποσότητα τότε το άθροισμα των μεταβολών των μεγεθών θα ισούται με μηδέν}$