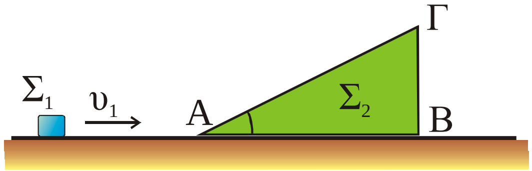
«Ελαστικές» αλληλεπιδράσεις



1. Το σώμα Σ_1 του σχήματος έχει μάζα $m_1 = 1kg$ και κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $\upsilon_1 = 4m/s$. Το σώμα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητο, έχει μάζα $m_2 = 3kg$ και μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές στο λείο δάπεδο. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, $\hat{A} = 30^o$ και $(A\Gamma) = 1,5m$. Το Σ_1 έχει αμελητέες διαστάσεις και μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές στην πλευρά ΑΓ του Σ_2.

Α. Να υπολογίσετε:

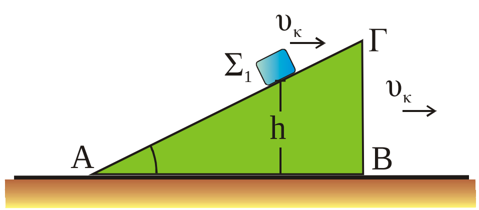
i) την ελάχιστη απόσταση μεταξύ του σημείου Γ και του σώματος Σ_1.

ii) το έργο της κάθετης δύναμης που ασκεί η πλευρά ΑΓ του Σ_2 στο Σ_1 μέχρι τη στιγμή που η απόσταση $(\Sigma_1\Gamma)$ γίνεται ελάχιστη.

Β. Ποιες θα είναι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων τη στιγμή που το Σ_1 θα επιστρέψει στο οριζόντιο δάπεδο;

Δίνεται $g = 10m/s^2$

ΛΥΣΗ



Α. i) Η απόσταση $(\Sigma_1\Gamma)$ γίνεται ελάχιστη τη στιγμή που το Σ_1 σταματά να ανεβαίνει προς το Γ και τα δύο σώματα αποκτούν ίσες ταχύτητες υ_κ. Το σύστημα είναι μονωμένο στην οριζόντια διεύθυνση ΑΒ και εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. υπολογίζουμε πρώτα την ταχύτητα υ_κ.

$$m_1\upsilon_1 + 0 = m_1\upsilon_\kappa + m_2\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\kappa = 1\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε. θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο.

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + U_2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_\kappa^2 + m_1gh + U_2 \Rightarrow h = 0,6m \quad \text{και}$$

$$\eta\mu\hat{A} = \frac{h}{(A\Sigma_1)} \Rightarrow (A\Sigma_1) = \frac{h}{\eta\mu 30^o} \Rightarrow (A\Sigma_1) = 1,2m \quad \text{άρα}$$

$$(\Sigma_1\Gamma) = (A\Gamma) - (A\Sigma_1) \Rightarrow \boxed{(\Sigma_1\Gamma) = 0,3m}$$

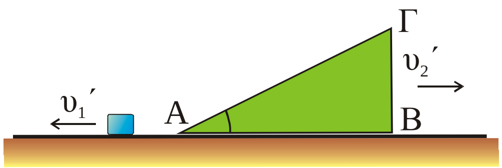
ii) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για το Σ_1 από τη στιγμή που φτάνει στο σημείο Α έως τη στιγμή που το $(\Sigma_1\Gamma)$ γίνεται ελάχιστο.

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = -m_1gh + W_N \Rightarrow \boxed{W_N = -1,5J}$$

Παρατήρηση

Το έργο της κάθετης δύναμης είναι διάφορο του μηδενός διότι η δύναμη $\vec{N}$ είναι βεβαίως κάθετη στην επιφάνεια ΑΓ, αλλά **δεν** είναι κάθετη στην τροχιά της κίνησης του σώματος Σ_1.

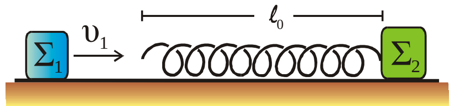
Β. Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο., Α.Δ.Μ.Ε. και κάνουμε την απόδειξη της ενότητας 5.3 (σελ. 156, 157) του σχετικού σχολικού βιβλίου Φυσικής Γ΄ Λυκείου. Το δεύτερο σώμα αρχικά είναι ακίνητο $(\upsilon_2 = 0)$ επομένως:



$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1' = -2m/s} \quad \text{και}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2' = 2m/s}$$

2. Το σώμα Σ_1 του σχήματος έχει μάζα $m_1 = 2kg$ και κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $\upsilon_1 = 15m/s$ στη διεύθυνση του οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς Κ=120N/m. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και είναι συνδεδεμένο στο αρχικά ακίνητο σώμα Σ_2, μάζας $m_2 = 3kg$, που είναι ελεύθερο να ολισθαίνει στο λείο δάπεδο. Να υπολογίσετε:



Α. τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

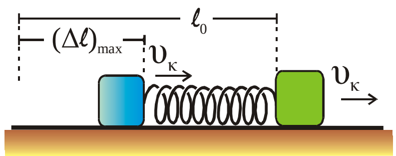
Β. τις τελικές ταχύτητες των δύο σωμάτων.

Γ. τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, τη στιγμή που η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 γίνεται ελάχιστη.

Δ. τη χρονική διάρκεια της συσπείρωσης του ελατηρίου.

ΛΥΣΗ

Α. Αφού αρχίσει η συσπείρωση του ελατηρίου, για όσο χρόνο η ταχύτητα του Σ_1 (που επιβραδύνεται) είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του Σ_2 (που επιταχύνεται) τα σώματα θα πλησιάζουν μεταξύ τους και η συσπείρωση του ελατηρίου θα αυξάνεται. Τη στιγμή που θα αποκτήσουν ίσες ταχύτητες υ_κ η απόσταση μεταξύ τους θα γίνει ελάχιστη, άρα και η συσπείρωση του ελατηρίου μέγιστη. Αμέσως μετά η ταχύτητα του Σ_2 θα γίνει μεγαλύτερη από την ταχύτητα του Σ_1, τα σώματα θα αρχίσουν να απομακρύνονται μεταξύ τους και η συσπείρωση του ελατηρίου θα αρχίσει να ελαττώνεται. Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο. και υπολογίζουμε πρώτα την ταχύτητα υ_κ.

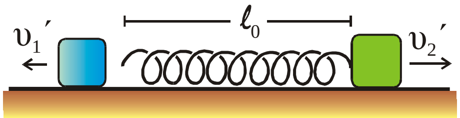


$$m_1 υ_1 + 0 = m_1 υ_κ + m_2 υ_κ \Rightarrow υ_κ = 6\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε. και υπολογίζουμε τη μέγιστη συσπείρωση.

$$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 = \frac{1}{2}m_1υ_κ^2 + \frac{1}{2}m_2υ_κ^2 + \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2_{max} \Rightarrow (\Delta\ell)_{max} = 1,5m$$

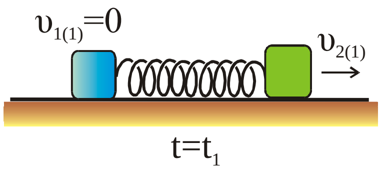
Β. Εργαζόμαστε όπως στο ερώτημα Β του προηγούμενου θέματος 1, επομένως:



$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 \Rightarrow υ_1' = -3m/s \quad \text{και}$$

$$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 \Rightarrow υ_2' = 12m/s$$

Γ. Η φορά της κίνησης του σώματος $Σ_1$ αλλάζει, επομένως κάποια στιγμή μένει ακίνητο.



Με πιο αυστηρή μαθηματική διατύπωση η ταχύτητα $υ_1(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση εξ αιτίας της αδράνειας $(m_1 = 2kg)$. Η πρώτη της παράγωγος (δηλαδή η επιτάχυνση) έχει τη φορά που θεωρούμε αρνητική, επομένως η $υ_1(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αρχικά είναι θετική και τελικά αρνητική, επομένως κάποια στιγμή $t = t_1$ μηδενίζεται (θεώρημα Bolzano).

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο. και υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος $Σ_2$.

$$m_1υ_1 + 0 = 0 + m_2υ_{2(1)} \Rightarrow υ_{2(1)} = 10\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε. και υπολογίζουμε την ενέργεια του ελατηρίου.

$$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 = \frac{1}{2}m_2υ_{2(1)}^2 + U_{ελ} \Rightarrow U_{ελ} = 75J$$

Δ. Αφού αρχίσει η συσπείρωση του ελατηρίου $(t = t_0 = 0)$ η κίνηση του συστήματος των δύο σωμάτων είναι σύνθετη. Το κέντρο μάζας τους κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και με Α.Δ.Ο. δείχνουμε: $υ_{cm} = υ_κ = 6m/s$

Συγχρόνως τα σώματα ταλαντώνονται με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{K(m_1 + m_2)}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$

Η συσπείρωση του ελατηρίου συνδέεται με την ταλάντωση των σωμάτων (δεν επηρεάζεται από την ε.ο.κ. του κέντρου μάζας) και διαρκεί μέχρι τη στιγμή $t = t_2$ που το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος, άρα:

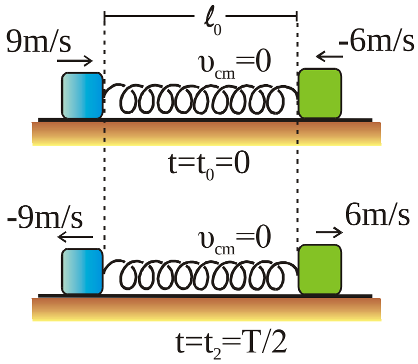
$$t = t_2 = \frac{T}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{10}s$$

Απόδειξη

Η περίοδος της ταλάντωσης δεν επηρεάζεται από την επιλογή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Θεωρούμε ότι το κέντρο μάζας του συστήματος των δύο σωμάτων είναι ακίνητο $(\upsilon_{cm}=0)$.

Στο σχήμα φαίνονται οι ταχύτητες των σωμάτων τη στιγμή που αρχίζει και τη στιγμή που τελειώνει η ταλάντωση, άρα και η συσπείρωση του ελατηρίου.

Η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδενική και διατηρείται σταθερή. Τα σώματα λοιπόν θα μένουν συγχρόνως ακίνητα, άρα:



$$T_1 = T_2 = T \ \ \textit{και} \ \ \omega_1 = \omega_2 = \omega \ \ (1)$$

Επίσης τα σώματα περνούν συγχρόνως με αντίθετες ορμές από τις θέσεις ισορροπίας τους, επομένως:

$$m_1\omega A_1 = m_2\omega A_2 \Rightarrow A_2 = A_1\frac{m_1}{m_2} \ \ (2)$$

Τη στιγμή που τα σώματα μένουν συγχρόνως ακίνητα στις ακραίες τους θέσεις και το ελατήριο εμφανίζει τη μέγιστη συσπείρωσή του θα ισχύει:

$$(\Sigma F_1)_{max} = (\Sigma F_2)_{max} = F_{\varepsilon\lambda\ max} \Rightarrow D_1A_1 = D_2A_2 = K(A_1 + A_2) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$D_1A_1 = K\left(A_1 + A_1\frac{m_1}{m_2}\right) \ \ \text{και} \ \ A_1 \neq 0 \ \ \text{άρα} \ \ D_1 = K\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \ (3)$$

Από την (1) *με την βοήθεια της* (3) *υπολογίζουμε την περίοδο της ταλάντωσης.*

$$T = T_1 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D_1}} \overset{(3)}{\Rightarrow} T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{K(m_1 + m_2)}}$$

Σχόλια

- Αν και φαίνονται διαφορετικά τα δύο θέματα είναι παρόμοια.
- Εκτός από το ερώτημα 2Δ τα υπόλοιπα ερωτήματα και των δύο θεμάτων βρίσκονται στο επίπεδο των Πανελλαδικών Εξετάσεων. Βέβαια μετά την εξαίρεση της άσκησης 49 από την διδακτέα ύλη δεν γίνεται (μάλλον) να ζητηθούν άμεσα. Όμως βοηθούν στην κατανόηση της διαδικασίας της αλληλεπίδρασης.

  Αν για παράδειγμα στο θέμα 1 αναπτυσσόταν τριβή μεταξύ των Σ_1 και Σ_2 η αλληλεπίδραση θα ήταν «ανελαστική» και όχι «ελαστική».

  Ακόμη και το ερώτημα 2Δ μπορεί να δείξει ότι όταν η σταθερά του ελατηρίου τείνει στο άπειρο, η περίοδος της ταλάντωσης τείνει στο μηδέν, δηλαδή έχουμε μια τυπική ελαστική κρούση!