

Η ΓΕΝΝΑΙΟΔΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ
ΚΑΘΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΜΑΖΩΝ

Είναι γνωστό ότι στην κεντρική ελαστική κρούση σώματος Α με ακίνητο Β η ταχύτητα του ακίνητου σώματος μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση

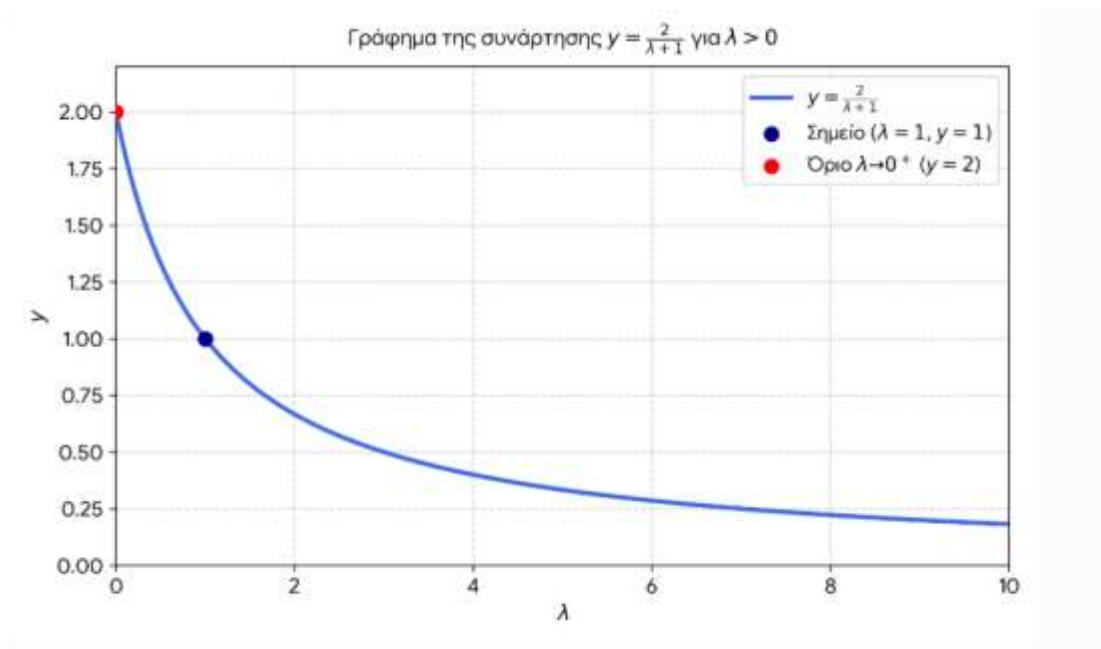
$$u_B' = \frac{2m_A}{m_A + m_B} u_A \quad (1)$$

και αν συμβολίσουμε τον λόγο των μαζών ως $\lambda = \frac{m_A}{m_B}$, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$u_B' = \frac{2\lambda}{\lambda + 1} u_A \quad (1\alpha)$$

Το ποσοστό της ορμής την οποία μεταφέρει το κινούμενο σώμα Α στο ακίνητο θα είναι

$$\pi_p \% = \frac{p_B'}{p_A} \cdot 100\% = \frac{m_B u_B'}{m_A u_A} \cdot 100\% = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda + 1} \cdot 100\% = \frac{2}{\lambda + 1} \cdot 100\% \quad (2)$$



Το διάγραμμα της συνάρτησης $y(\lambda) = \frac{2}{\lambda + 1}$ με $\lambda > 0$ δείχνει ότι όταν $m_A = m_B$ δηλαδή $\lambda = 1$, τότε το κινούμενο σώμα Α μεταφέρει το 100% της ορμής του στο ακίνητο σώμα Β, συμβαίνει δηλαδή ανταλλαγή ταχυτήτων, όπως αναμένεται.

Αν όμως $m_A \ll m_B$ δηλαδή $\lambda \ll 1$ τότε το ποσοστό τείνει στο 200%. Και αυτό είναι λογικό, αφού το κινούμενο σώμα ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου οπότε η μεταβολή

της ορμής του έχει μέτρο $|\Delta p_A| = |p_A' - p_A| = |-m_A u_A - (+m_A u_A)| = 2m_A u_A = 2p_A$. Αφού και το ακίνητο σώμα θα υποστεί αντίθετη μεταβολή ορμής, αυτή θα έχει επίσης μέτρο $|\Delta p_B| = p_B' = 2p_A$. Άρα $\frac{p_B'}{p_A} \cdot 100\% = \frac{2p_A}{p_A} \cdot 100\% = 200\%$

Αν όμως $m_A > m_B$ δηλαδή $\lambda > 1$, το ποσοστό μεταφοράς ορμής βαίνει μειούμενο και μηδενίζεται όταν $\lambda \rightarrow \infty$.

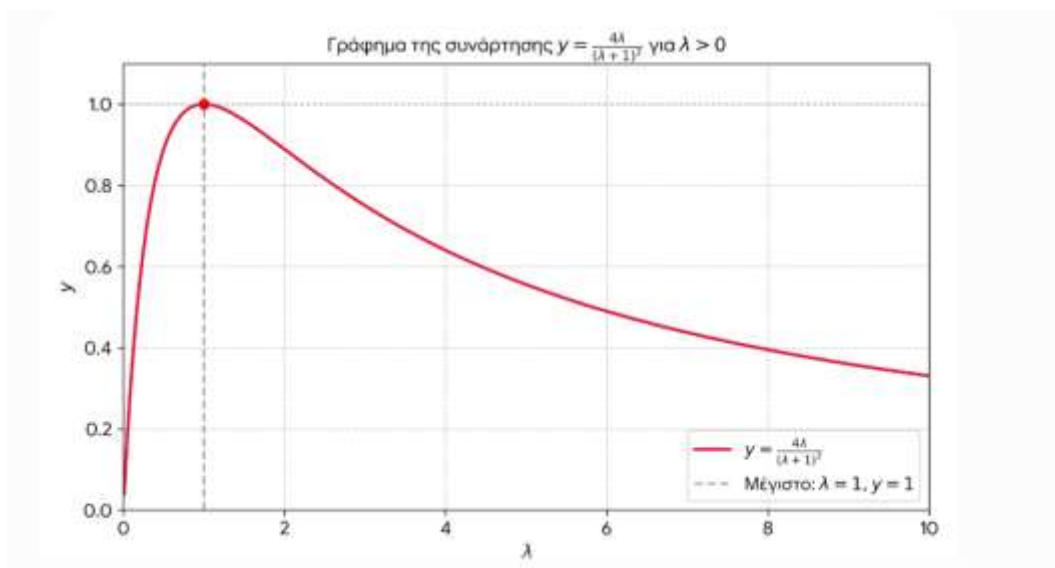
Βλέπε και το σχετικό ερώτημα 24 από τα επαναληπτικά θέματα του κεφαλαίου των κρούσεων στην πλατφόρμα study4exams.

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του κινούμενου σώματος Α το οποίο μεταφέρεται στο αρχικά ακίνητο σώμα Β είναι

$\pi_K \% = \frac{K_B'}{K_A} \cdot 100\%$ και με τη βοήθεια της σχέσης (1) προκύπτει ότι

$$\pi_K \% = \frac{4m_A}{(m_A + m_B)^2} \cdot 100\% \quad (3)$$

Αν αξιοποιηθεί η σχέση (1α) η τελευταία σχέση γράφεται $\pi_K \% = \frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2} 100\% \quad (3α)$



Το διάγραμμα της συνάρτησης $y(\lambda)$ δείχνει και πάλι ότι όταν $m_A = m_B$ δηλαδή $\lambda = 1$, τότε το κινούμενο σώμα Α μεταφέρει το 100% της κινητικής του ενέργειας στο ακίνητο σώμα Β, συμβαίνει δηλαδή ανταλλαγή ταχυτήτων, όπως αναμένεται.

Αν τώρα $m_A \ll m_B$ δηλαδή $\lambda \ll 1$ τότε το ποσοστό τείνει στο 0. Αυτό είναι λογικό, αφού τότε το κινούμενο σώμα ανακλάται με ταχύτητα μέτρου u_A και το αρχικά ακίνητο σώμα B παραμένει πρακτικά ακίνητο.

Αν, αντίθετα, $m_A > m_B$ δηλαδή $\lambda > 1$, το ποσοστό μεταφοράς κινητικής ενέργειας βαίνει μειούμενο με μικρότερο ρυθμό σε σχέση με το ποσοστό μεταφοράς ορμής και μηδενίζεται όταν $\lambda \rightarrow \infty$.

Η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να προβλέπουμε το μεταφερόμενο ποσοστό κινητικής ενέργειας προς το ακίνητο σώμα σε συνήθεις περιπτώσεις. Για $\lambda = \frac{1}{2}$ το ποσοστό είναι 88,9%, για $\lambda = \frac{1}{3}$ είναι 75%, για $\lambda = \frac{1}{4}$ είναι 64% κ.λ.π. Βλέπε και το πρόβλημα 5.28 του σχολικού βιβλίου στο οποίο ένα κινούμενο νετρόνιο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητους πυρήνες.

Παρατηρούμε ότι η σχέση (3) είναι συμμετρική ως προς τις μάζες. Αυτό σημαίνει ότι είτε $m_A = \lambda m_B$ είτε $m_B = \lambda m_A$ το ποσοστό θα είναι το ίδιο. Αν π.χ. η μάζα του ακίνητου σώματος B είναι τριπλάσια εκείνης του κινούμενου σώματος A το ποσοστό της μεταφερόμενης κινητικής ενέργειας στο σώμα B είναι 75%. Το ίδιο ποσοστό προκύπτει αν η μάζα του κινούμενου σώματος A είναι τριπλάσια εκείνης του ακίνητου B.

Μαθηματικά αυτό είναι αναμενόμενο και ως εξής:

Αν κ είναι το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του A το οποίο μεταφέρεται στο B

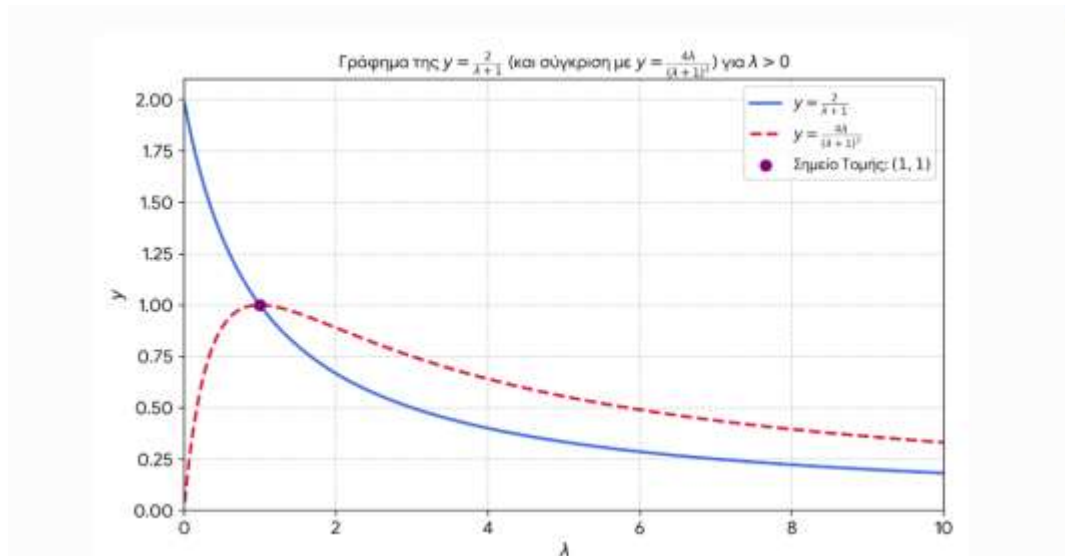
$$\text{τότε } \frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2} = \kappa \Rightarrow 4\lambda = \kappa(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \Rightarrow 4\lambda = \kappa\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \kappa \Rightarrow \kappa\lambda^2 + (2\kappa - 4)\lambda + \kappa = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa\lambda^2 + 2(\kappa - 2)\lambda + \kappa = 0$$

Το τριώνυμο αυτό έχει άθροισμα ριζών $S = -\frac{2(\kappa-2)}{\kappa}$ και αφού $0 < \kappa < 1$ είναι $S > 0$.

Επίσης το γινόμενο των ριζών είναι $P = \frac{\kappa}{\kappa} = 1$, δηλαδή οι δύο ρίζες είναι:

α) ομόσημες αφού $P > 0$ β) θετικές, αφού $S > 0$ και γ) αντίστροφες αφού $P = 1$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στην παραπάνω κρούση να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του λόγου λ αν το κλάσμα της της αρχικής κινητικής ενέργειας του κινούμενου σώματος Α το οποίο μεταφέρεται στο αρχικά ακίνητο σώμα Β είναι ίσο με 0,36.

$$\frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2} = 0,36 \Rightarrow 4\lambda = 0,36 (\lambda^2 + 2\lambda + 1) \Rightarrow \lambda = 0,09 (\lambda^2 + 2\lambda + 1) \Rightarrow \lambda = 0,09\lambda^2 + 0,18\lambda + 0,09 = 0$$

$$\Rightarrow 0,09\lambda^2 + 0,18\lambda - \lambda + 0,09 = 0 \Rightarrow 0,09\lambda^2 - 0,82\lambda + 0,09 = 0 \Rightarrow 9\lambda^2 - 82\lambda + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{82 \pm \sqrt{82^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9}}{18} = \frac{82 \pm \sqrt{82^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9}}{18} = \frac{82 \pm \sqrt{6724 - 4 \cdot 9 \cdot 9}}{18} = \frac{82 \pm \sqrt{6400}}{18} = \frac{82 \pm 80}{18} = \frac{1}{9} \text{ ή } 9$$

Άρα είτε $m_B = 9m_A$ είτε $m_A = 9m_B$