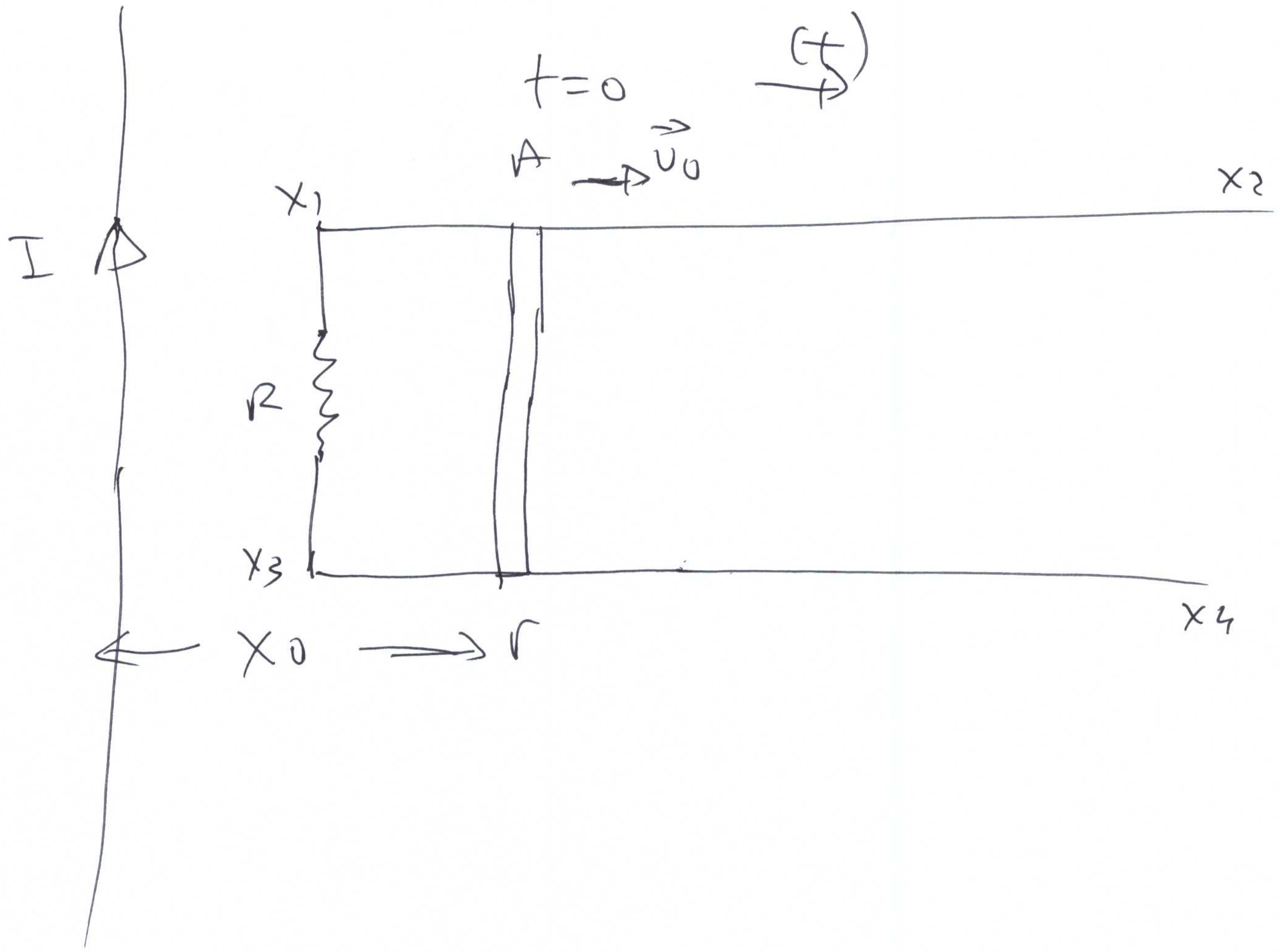
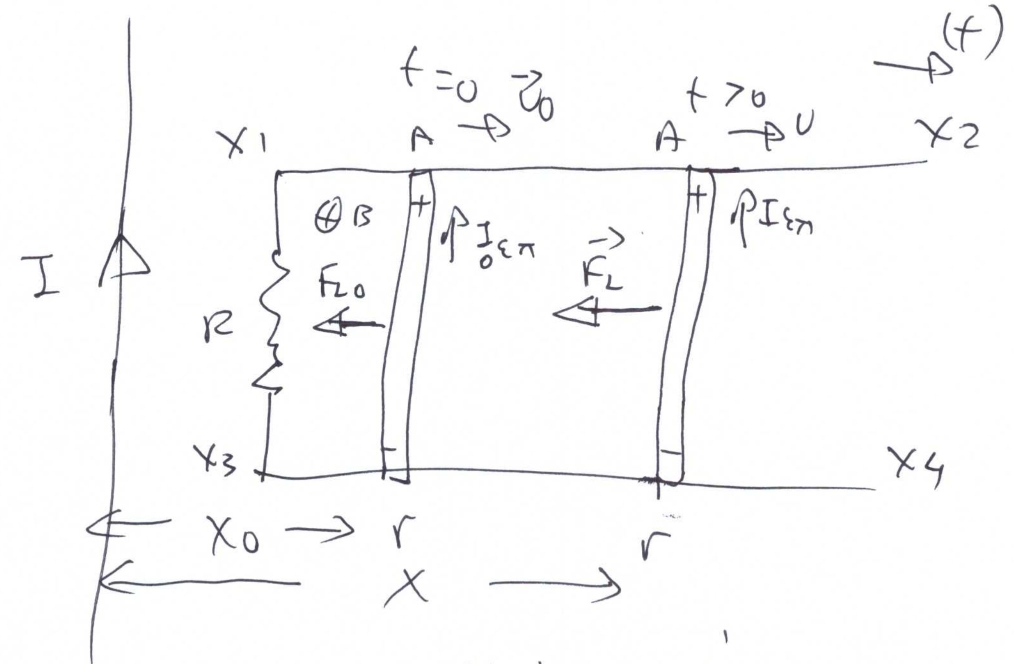
# Πρόβλημα




Ευθύγραμμος αγωγός ΑΓ μήκους (ΑΓ) = $\ell$ έχει τα άκρα του Α, Γ σε επαφή χωρίς τριβές με τους παράλληλους οριζόντιους αγωγούς $x_1x_2$, $x_3x_4$ αμελητέας αντίστασης. Οι αγωγοί γεφυρώνονται στα $x_1$, $x_3$ με αντιστάτη αντίστασης $R$. Ο αγωγός έχει αμελητέα αντίσταση και μάζα $m$. Ευθύγραμμος αγωγός «απείρου» μήκους είναι οριζόντιος και παράλληλος στον αγωγό ΑΓ. Η αρχική απόσταση των δύο αγωγών είναι $x_0$. Τη στιγμή $t=0$ δίνουμε στον ΑΓ οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_0$

1) Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα ώστε ο αγωγός να διαφύγει έκτος του μαγνητικού πεδίου του αγωγού απείρου μήκους




Απο Β νομο Νεύτωνα έχουμε

$$m\frac{dv}{dt} = -F_L \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -B\frac{Bv\ell}{R}\ell \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\cdot v \Rightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{B^2\ell^2}{mR} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 x^2}\frac{\ell^2}{mR} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\mu_0^2 I^2 \ell^2}{4\pi^2 mR}\frac{1}{x^2} = -\frac{A}{x^2}$$ με $A = \frac{\mu_0^2 I^2 \ell^2}{4\pi^2 mR}$

Άρα $dv = -\frac{A}{x^2}dx \Rightarrow \int dv = -A\int \frac{1}{x^2}dx + C \Rightarrow$

$$v = -A\left(-\frac{1}{x}\right) + C \Rightarrow v = \frac{A}{x} + C$$

Για $x = x_0 \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0$

Άρα $\upsilon_0 = \dfrac{A}{x_0} + C \Rightarrow C = \upsilon_0 - \dfrac{A}{x_0}$

Άρα:

$$\boxed{\upsilon = \frac{A}{x} + \upsilon_0 - \frac{A}{x_0}}$$

Για $x \to \infty$ πρέπει $\upsilon = 0 \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - \dfrac{A}{x_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon_0 = \frac{A}{x_0} \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = \frac{\mu_0^2 I^2 \ell^2}{4\pi^2 m R x_0}}$$

2) Για τη προηγούμενη τιμή να γραφεί η εξίσωση της ταχύτητας του αγωγού με το χρόνο

Έχουμε (αφού $\upsilon_0 = \dfrac{A}{x_0}$)

$$\upsilon = \frac{A}{x} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{A}{x} \Rightarrow x\,dx = A\,dt \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} = At + C_1 \xRightarrow[t=0]{x=x_0} \frac{x_0^2}{2} = C_1$$

Άρα

$$\frac{x^2}{2} = At + \frac{x_0^2}{2} \Rightarrow x^2 = 2At + x_0^2 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{2At + x_0^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{2At + x_0}}\, 2A \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{A}{\sqrt{2At + x_0}} \xRightarrow{A = \upsilon_0 x_0} \upsilon = \frac{\upsilon_0 x_0}{\sqrt{2\upsilon_0 x_0 t + x_0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{2v_0}{x_0}t + 1}}}$$

3) Να γραφεί η εξίσωση θέσης-χρόνου για τον αγωγό.

Έχουμε $\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{2v_0}{x_0}\cdot t+1}} \Rightarrow dx = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{2v_0}{x_0}\cdot t+1}}\,dt$

Θέτουμε $u = \frac{2v_0}{x_0}\cdot t + 1 \Rightarrow du = \frac{2v_0}{x_0}\,dt \Rightarrow$

$dt = \frac{x_0\,du}{2v_0}$ Άρα $dx = \frac{v_0}{\sqrt{u}}\,\frac{x_0}{2v_0}\,du \Rightarrow$

$dx = \frac{x_0}{2}u^{-1/2}\,du \Rightarrow x = \frac{x_0}{2}\int u^{-1/2}\,du + c \Rightarrow$

$x = \frac{x_0}{2}\,2\sqrt{u} + c \Rightarrow x = x_0\sqrt{\frac{2x_0}{v_0}\cdot t+1} + c \overset{t=0}{\underset{x=x_0}{\Longrightarrow}}$

$x_0 = x_0 + c \Rightarrow c = 0$ Άρα

$$\boxed{x = x_0\sqrt{\frac{2v_0}{x_0}\cdot t + 1}}$$

με $v_0 = \frac{\mu_0^2 I^2 l^2}{4\pi^2 m R x_0}$

4) Έστω ότι δίνουμε τη στιγμή $t=0$ αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0$ προς τα δεξιά και ασκούμε κατάλληλη δύναμη $\vec{F}$ οριζόντια στο μέσο του αγωγού και κάθετη σ' αυτόν ώστε ο αγωγός να απομακρύνεται με $\vec{\upsilon_0} = $ σταθ. Να βρεθεί το έργο της $\vec{F}$.

Προφανώς

$$F = F_L = \frac{B^2 \upsilon \ell^2}{R} = \frac{\mu_0 I^2 \ell^2 \upsilon_0}{4\pi^2 R x^2}$$

$$dW_F = F\,dx \Rightarrow dW_F = \frac{\mu_0 I^2 \ell^2 \upsilon_0}{R 4\pi^2 x^2} \Rightarrow$$

$$W_F = \frac{\mu_0 I^2 \ell^2 \upsilon_0}{4\pi^2 R} \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{\mu_0 I^2 \ell^2 \upsilon_0}{4\pi^2 R} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x_0}^{\infty} =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 \ell^2 \upsilon_0}{4\pi^2 R} \left[-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{x_0}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{W_F = \frac{\mu_0 I^2 \ell^2 \upsilon_0}{R \cdot 4\pi^2 x_0}}$$