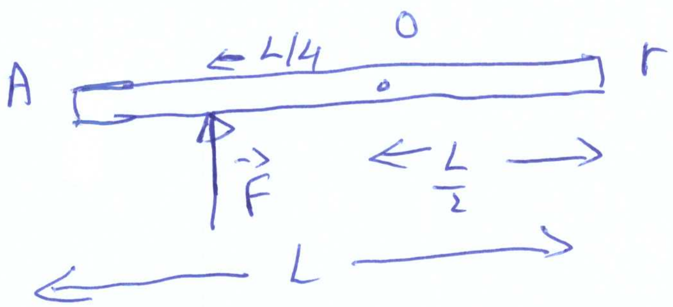
Πρόβλημα

(κάτοψη)



Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M είναι τοποθετημένη σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο. Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και επιπέδου είναι μ. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτή που διέρχεται από το κέντρο της $I_{cm} = \frac{1}{12} m\ell^2$.
Σε απόσταση $\frac{L}{4}$ από το μέσο της ράβδου ασκείται δύναμη $\vec{F}$ οριζόντια και κάθετη στη ράβδο. Η ράβδος ηρεμεί.

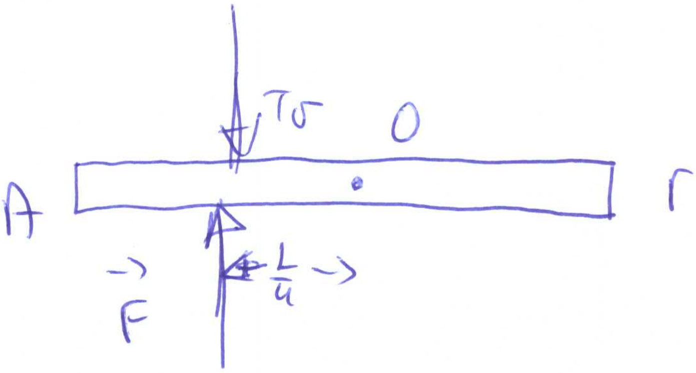
α) Ποιο το σημείο εφαρμογής της στατικής τριβής;

β) Να βρεθεί η σχέση $|dT_\sigma|$ σε συνάρτηση με την απόσταση x από το άκρο A της ράβδου. dT_σ είναι η στοιχειώδης στατική τριβή που ασκείται σε στοιχειώδες μήκος dx σε απόσταση x από το A

γ) Για ποιές τιμές της F η ράβδος δεν θα κινηθεί;

Λυση

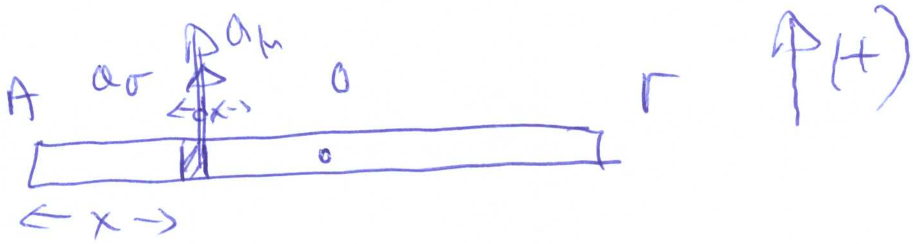
α)



Αφού το κέντρο μάζας της ράβδου ηρεμεί θα έχουμε $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow F - T_\sigma = 0 \Rightarrow T_\sigma = F$

Εάν το το σημείο εφαρμογής της $\vec{T_\sigma}$ ήταν διαφορετικό από αυτό της $\vec{F}$ θα είχαμε ζεύγος δυνάμεων και προφανώς η ράβδος δε θα ισορροπούσε. Άρα το σημείο εφαρμογής της $\vec{T_\sigma}$ ταυτίζεται με αυτό της $\vec{F}$.

β)



Έστω στοιχειώδες τμήμα με μήκος dx που απέχει x από το άκρο A της ράβδου. Θα βρούμε το μέτρο της στοιχειώδους δύναμης dF που ασκείται στο τμήμα αυτό (εκτός της τριβής).

Εάν η ράβδος ήταν ελεύθερη (χωρίς τριβές) το τμήμα αυτό θα είχε μία επιτάχυνση $a_\mu = \frac{F}{M}$ εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης. Εξαιτίας της στροφικής θα είχε $a_\sigma = a_\gamma \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)$

όμως $a_\gamma = \frac{F\, L/4}{I} = \frac{F\, L/4}{\frac{1}{12} M L^2} \Rightarrow$

$$a_\gamma = \frac{3F}{ML}$$

Άρα $a_\sigma = \frac{3F}{ML}\left(\frac{L}{2} - x\right) = \frac{3F}{M}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right)$

Άρα $a_{o\lambda} = a_\mu + a_\sigma \Rightarrow a_{o\lambda} = \frac{F}{m} + \frac{3F}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right)$

$$\Rightarrow a_{o\lambda} = \frac{F}{m}\left(1 + \frac{3}{2} - \frac{3x}{L}\right) \Rightarrow a_{o\lambda} = \frac{F}{M}\left(\frac{5}{2} - \frac{3x}{L}\right)$$

Άρα $dF = dm\, a_{o\lambda} \Rightarrow$

$$dF = \rho\, dx\, a_{o\lambda} \xRightarrow[\rho = \frac{M}{L}]{} dF = \frac{M}{L} a_{o\lambda}\, dx \Rightarrow$$

$$dF = \frac{M}{L}\frac{F}{M}\left(\frac{5}{2} - \frac{3x}{L}\right) dx \Rightarrow$$

$$dF = \frac{F}{L}\left(\frac{5}{2} - \frac{3x}{L}\right) dx$$

Έχουμε $dF > 0$ για $\frac{5}{2} - \frac{3x}{L} > 0 \Rightarrow$

$x < \frac{5L}{6}$ ενώ $dF < 0$ για $x > \frac{5L}{6}$

Αυτό σημαίνει ότι για

$0 \le x < \frac{5L}{6}$ τα στοιχειώδη τμήματα

της ευθείας δέχονται δύναμη ίδιας φοράς

με την F ενώ για $\frac{5L}{6} < x < L$

αντίθετη από αυτή.

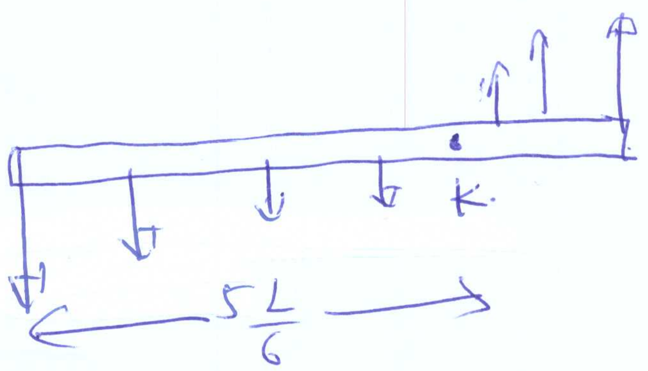
Αφού κάθε στοιχειώδες τμήμα ισορροπεί

η στοιχειώδης στατική τριβή dT_σ

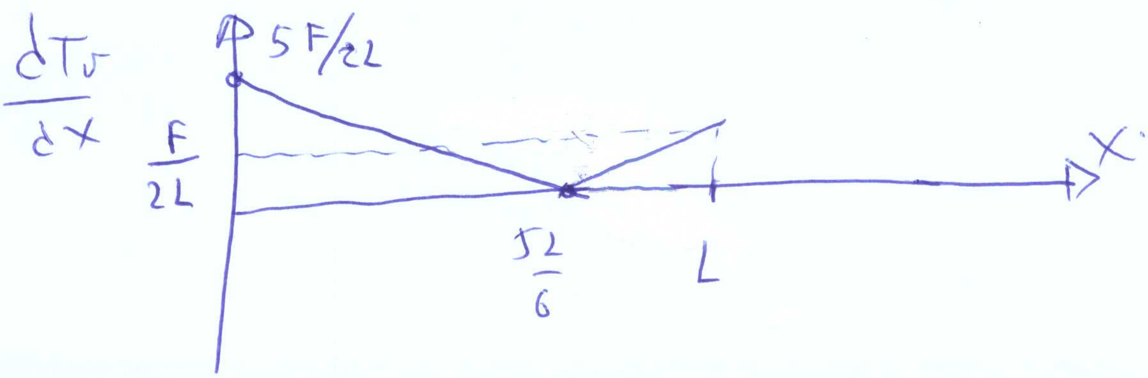
θα είναι αντίθετη της dF

και το μέτρο $dT_\sigma = |dF| \Rightarrow$

$$dT_\sigma = \frac{F}{L}\left|\frac{5}{2} - \frac{3x}{L}\right| dx \qquad 0 \le x \le L$$



Στο σχήμα φαίνονται μερικά από τα στοιχειώδη διανύσματα $\vec{dT_\sigma}$



γ) Για να μη κινηθεί η ράβδος πρέπει για κάθε στοιχειώδες τμήμα να ικανοποιείται η σχέση

$$dT_\sigma \le dT_{\tau\rho} \Rightarrow \frac{F}{L}\left|\frac{5}{2}-\frac{3x}{L}\right|dx \le \mu\, dm\, g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F}{L}\left|\frac{5}{2}-\frac{3x}{L}\right|dx \le \mu\, \rho\, dx\, g \Rightarrow$$

$$\frac{F}{L}\left|\frac{5}{2}-\frac{3x}{L}\right| \le \mu \frac{M}{L} g \Rightarrow$$

$$F \le \frac{\mu M g}{\left|\frac{5}{2}-\frac{3x}{L}\right|}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ανισότητα για κάθε x με $0 \le x \le L$ πρέπει να ισχύει για το x εκείνο που το δεύτερο μέλος της γίνεται ελάχιστο. Άρα για $x=0$. Οπότε

$$F \le \frac{\mu M g}{5/2} \Rightarrow F \le \frac{2\mu M g}{5} \Rightarrow \boxed{F_{max} = \frac{2\mu M g}{5}}$$