



Πειραματική μελέτη του ήχου ενός μοτέρ

Πειραματική ομάδα φυσικής 2ου ΓΕΛ Χαλανδρίου*

Απρίλιος 2025

* Μέλη με αλφαβητική σειρά: Γεώργιος Καρυδιανάκης¹, Ηλιάννα Κάσση²,
Μελίνα Μάιπα- Κάππα³, Έλενα Σταυροπούλου⁴, Ευάγγελος Χήρας⁵

¹ Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, τμήμα Φυσικής. sph2100059@uoa.gr

² ilianakassi@outlook.com ³ melinamaipa@gmail.com ⁴ elstavropoulou8@gmail.com ⁵ vaggelischiras81@gmail.com

Αφιερώνεται στους καθηγητές μας, Χ. Αβραμίδη, Σ. Βαζαίου & Γ. Χεραλιακό

Περίληψη

Μελετάται η απόκριση ενός ηλεκτροκινητήρα (μοτέρ) σε διάφορες τάσεις και αντιστάσεις. Εξάγονται πειραματικές σχέσεις που συσχετίζουν τις χαρακτηριστικές συχνότητες του μοτέρ με όλα τα βασικά μεγέθη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος (τάση, αντίσταση, ένταση). Τέλος, η σχέση διορθώνεται για να λάβει υπόψη την αντίσταση των καλωδίων, επιδεικνύοντας τον τρόπο με τον οποίο το πείραμα αυτό αποτελεί παράλληλα μία εναλλακτική μέθοδο μέτρησης των αντιστάσεων των καλωδίων, χωρίς τη χρήση ωμόμετρου ή πολύμετρου.

Λέξεις- κλειδιά: Ηλεκτροκινητήρας (μοτέρ), ηλεκτρικό κύκλωμα, συχνотική ανάλυση

1 Εισαγωγή

Οι ηλεκτροκινητήρες αποτελούν έναν από τους πιο ευρέως χρησιμοποιούμενους μηχανισμούς, ενώ τα περισσότερα σχολικά εργαστήρια φυσικής διαθέτουν τουλάχιστον έναν. Πρόκειται λοιπόν για ένα πολύ προσιτό όργανο, γεγονός που το καθιστά κατάλληλο για τη διενέργεια ενός απλού πειράματος.

Τα περισσότερα σχολικά εργαστήρια είναι εξοπλισμένα με μονωμένα καλώδια. Η ιδιότητα αυτή των καλωδίων είναι βεβαίως απαραίτητη για λόγους ασφαλείας, τους προσδίδει όμως μία αντίσταση που συχνά (ιδιαίτερα σε κυκλώματα με περίπλοκη συνδεσμολογία) γίνεται σημαντική και προκαλεί σφάλματα εάν δε ληφθεί υπόψη.

Η δομή της εργασίας είναι η ακόλουθη: στο Θεωρητικό μέρος παρουσιάζουμε τις βασικές εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για να εξαχθούν και να ερμηνευτούν τα αποτελέσματά μας. Στο Πειραματικό μέρος μελετούμε διαδοχικά την εξάρτηση της συμπεριφοράς του μοτέρ από την τάση και την αντίσταση, καθώς και τη συνεισφορά των καλωδίων. Συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας στα Συμπεράσματα. Το Παράρτημα περιλαμβάνει μερικούς επι-

πλέον υπολογισμούς, οι οποίοι όμως ξεφεύγουν από την ύλη της Β' Λυκείου.

2 Θεωρητικό μέρος

Η **ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος** που διαρρέει έναν αγωγό, I , ορίζεται ως το πηλίκο του φορτίου q που διέρχεται από μία διατομή του σε χρονικό διάστημα t προς το χρονικό διάστημα αυτό. Δηλαδή:

$$I = \frac{q}{t} \quad (1)$$

Η **ηλεκτρική τάση** ή διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων ενός ηλεκτρικού διπόλου ορίζεται ως το πηλίκο της ηλεκτρικής ενέργειας που καταναλώνεται, $\mathcal{E}$, ανά μονάδα ηλεκτρικού φορτίου q . Δηλαδή:

$$V = \frac{\mathcal{E}}{q} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) και (2) και ορίζοντας την **ηλεκτρική ισχύ** ως ηλεκτρική ενέργεια ανά μονάδα χρό-

νου, δηλαδή $P = \frac{\varepsilon}{t}$, καταλήγουμε:

$$P = V \cdot I \quad (3)$$

Με χρήση του γνωστού **νόμου του Ohm**

$$I = \frac{V}{R} \quad (4)$$

η παραπάνω σχέση γράφεται και ως:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (5)$$

Αυτή η σχέση αποτελεί τη ‘γέφυρα’ με το πειραματικό μέρος, αφού εκεί τόσο η τάση όσο και η αντίσταση είναι σε κάθε περίπτωση γνωστές. [1]

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί [1] ότι, όταν ω αντιστάσεις συνδέονται σε σειρά, η ισοδύναμη αντίσταση αποτελεί το άθροισμα των επιμέρους αντιστάσεων, δηλαδή:

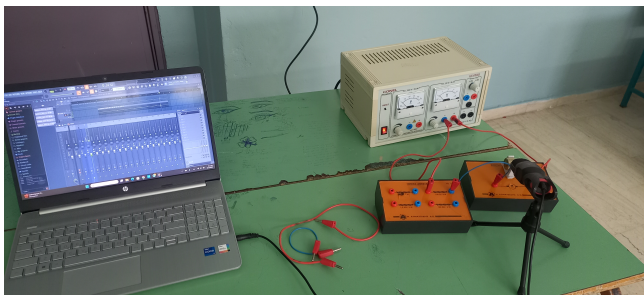
$$R_{\text{ισοδ}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (6)$$

3 Πειραματικό μέρος

3.1 Μελέτη εξάρτησης από την τάση

Η πειραματική μας διάταξη περιλάμβανε έναν ηλεκτροκινητήρα (μοτέρ), ένα τροφοδοτικό, καθώς και 2 αντιστάσεις (10 και 100 Ω). Οι μετρήσεις έγιναν ταυτόχρονα με δύο μικρόφωνα, 1 και 2. Στο εξής θα αναφερόμαστε σε μετρήσεις της συχνότητας f από το μικρόφωνο 1 ως f^1 , και ομοίως για το μικρόφωνο 2. Η φασματική ανάλυση και επεξεργασία του ήχου πραγματοποιήθηκε με χρήση του λογισμικού FL Studio.

Η πειραματική διάταξη στο σύνολό της παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.



Εικόνα 1: Η πειραματική διάταξη.

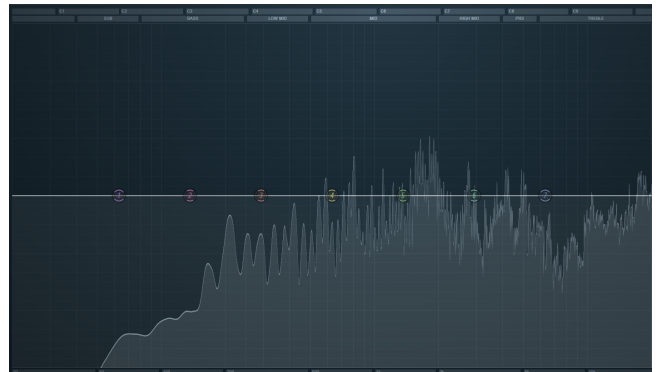
Ως προς την τάση, λάβαμε τιμές στο εύρος 5 – 15 V όπου το μοτέρ φαινόταν να λειτουργεί κανονικά.

Το φάσμα του εξωτερικού ήχου (“θορύβου”) της αίθουσας φαίνεται στην Εικόνα 2.



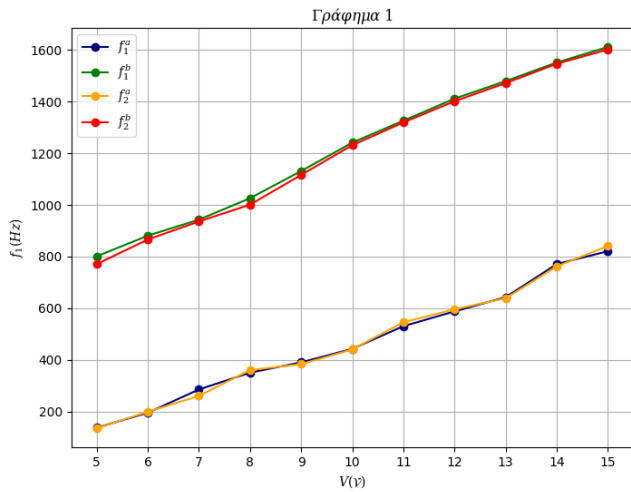
Εικόνα 2: Το φάσμα του εξωτερικού ήχου επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό το αποτέλεσμα αφού, παρά την προσεκτική επιλογή του χώρου ώστε να μειωθούν οι περιττές αντηχήσεις και ανακλάσεις, υπάρχουν διάφοροι παράγοντες που προκαλούν θόρυβο: ο στατικός ήχος του τροφοδοτικού σε λειτουργία ($\sim 200 - 1500 \text{ Hz}$) είναι εξ ορισμού απαραίτητος κατά τη διάρκεια του πειράματος. Το λεγόμενο hiss ($> 15 \text{ kHz}$) οφείλεται στο μικρόφωνο και είναι επίσης αναπόφευκτο. Οι υπόλοιπες συχνότητες οφείλονται σε άλλους, δευτερεύουσας σημασίας παράγοντες.

Το φάσμα του ήχου που ηχογραφήθηκε με το μοτέρ σε χρήση, για μία ενδεικτική τιμή της τάσης $V = 5 \text{ V}$, φαίνεται στην Εικόνα 3.



Εικόνα 3: Ενδεικτική απεικόνιση φάσματος. Το μικρόφωνο 2 προσέφερε λήψεις σε συχνότητες έως και 20 kHz, ενώ το μικρόφωνο 1 πρακτικά περιοριζόταν σε συχνότητες μικρότερες των 8.5 kHz.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων συνοψίζονται στα Γραφήματα 1 και 2. Πίνακες με τις ακριβείς τιμές από τις οποίες παράγονται τα γραφήματα παρατίθενται στο Παράρτημα.



Η συχνότητα συναρτήσει της τάσης για $R = 100\Omega$ μοιάζει σε καλή προσέγγιση με ευθεία.

Πραγματοποιώντας γραμμική προσαρμογή (βρίσκοντας, δηλαδή, την ευθεία που προσεγγίζει καλύτερα τις παραπάνω δειγματοληψίες) καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$f = 67 \cdot V - 205$$

$$f = 68 \cdot V - 215$$

$$f = 85 \cdot V + 372$$

$$f = 86 \cdot V + 343$$

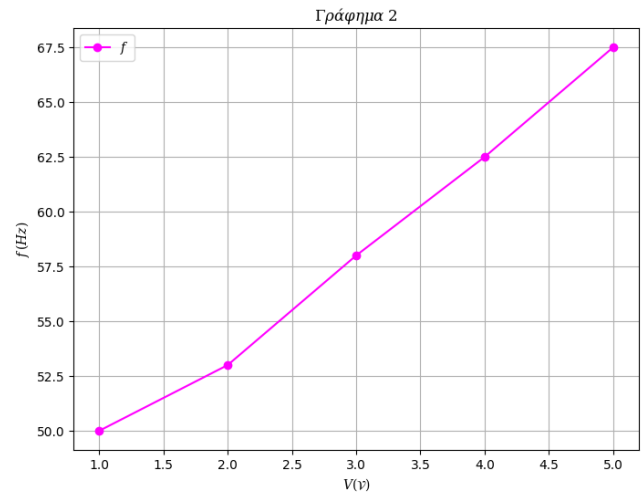
Η προσθετική σταθερά δεν έχει, βεβαίως, σημασία, αφού αφορά τη συχνότητα που επιλέξαμε να καταγράψουμε ως χαρακτηριστική του ήχου. Η κλίση, από την άλλη, έχει μέση τιμή $76,5 \frac{\text{Hz}}{\text{V}}$ και αποτελεί τον ‘καρπό’ της πειραματικής διαδικασίας.

3.2 Μελέτη εξάρτησης από την αντίσταση

Διαπιστώσαμε προηγουμένως ότι, για δεδομένη τιμή της αντίστασης, η συχνότητα είναι ανάλογη της τάσης (ισοδύναμα, από το νόμο του Ohm (4), ανάλογη της έντασης- αυτό θα αποδειχθεί κομβικό σύντομα).

Επόμενο βήμα αποτελεί η μεταβολή της αντίστασης, ώστε να εξακριβώσουμε την αντίστοιχη εξάρτηση. Αναμένουμε άλλωστε να υπάρχει κάποια συσχέτιση, αφού στην πραγματικότητα η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το μοτέρ είναι αυτή που καθορίζει τη συχνότητα περιστροφής του. Από τη σχέση (4) γίνεται σαφές πώς η σχέση θα είναι της μορφής $f = \frac{A}{R}$, όπου η A είναι σταθερά υπό προσδιορισμό.

Οι μετρήσεις απεικονίζονται στο Γράφημα 2 και παρατίθενται στον Πίνακα 2 του Παραρτήματος.



Η κλίση τώρα υπολογίζεται ίση με μόλις $4,45 \frac{\text{Hz}}{\text{V}}$! Το γεγονός αυτό κάνει σαφή την ανάγκη μίας εξάρτησης της κλίσης και από την αντίσταση. Η εξάρτηση αυτή υπολογίζεται με αριθμητικές μεθόδους. Καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$f(V, R) = f_0 \left(84,5 - \frac{800,6}{R} \right) V \text{ (SI)} \quad (7)$$

(όπου f_0 η αυθαίρετη συχνότητα που επιλέγεται ως “χαρακτηριστική” του φάσματος του μοτέρ) η οποία ισχύει εφόσον η τιμή της αντίστασης R είναι επαρκώς μεγαλύτερη από την “προβληματική” τιμή $R_0 \approx 9.47\Omega$, για την οποία η έκφραση αυτή μηδενίζει ανεξαρτήτως της τάσης. Αυτό το αποτέλεσμα είναι εκ πρώτης όψεως προβληματικό, δεδομένου ότι η μία από τις δύο τιμές της αντίστασης που λάβαμε υπόψη 10Ω είναι “επικίνδυνα κοντά” σε αυτό το κάτω όριο. Όπως θα δείξουμε, όμως, αμέσως, η αντίσταση στην πραγματικότητα ουδέποτε δεν υπήρξε 10Ω .

3.3 Η αντίσταση των καλωδίων

Τα έως τώρα αποτελέσματά μας δεν έχουν λάβει υπόψη την αντίσταση των καλωδίων, η οποία όμως αναμένεται να αποτελέσει μία σημαντική διόρθωση. Συνδέουμε χωρίς καμία αντίσταση, διαδοχικά, το μοτέρ μέσω 2, 3 και 4 καλωδίων. Τα καλώδια είναι όμοια οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουν ίση αντίσταση R_κ . Χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική μας σχέση και θέτοντας αντίστοιχα $R = R_\kappa, 3R_\kappa$ και $4R_\kappa$, παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$R_\kappa = 1.5\Omega \quad (8)$$

Κατά τη διεξαγωγή των προηγούμενων πειραμάτων, 3 καλώδια ήταν συνδεδεμένα στο κύκλωμα. Η συνεισφορά τους

στην αντίσταση λοιπόν ήταν 4,5 Ω. Η σχέση (7) διορθώνεται (αφού τα καλώδια είναι εξ ορισμού συνδεδεμένα σε σειρά, άρα ισχύει η εξ. (6)) θέτοντας $R \rightarrow R + 3R_k$, από όπου παίρνουμε την τελική σχέση:

$$f(V, R) = f_0 \left(84.5 - \frac{800.6}{R + 4.5} \right) V \text{ (SI)} \quad (9)$$

Αυτή η νέα, διορθωμένη εξίσωση έχει ως “προβληματικό” σημείο το $R_0 = 4,97 \Omega$, που ούτως ή άλλως αποτελεί μία πολύ μικρή τιμή της αντίστασης (συγκρίσιμη με την αντίσταση των καλωδίων). Μάλιστα, εφόσον η αντίσταση του μοτέρ εξακολουθεί να μη λαμβάνεται υπόψη, είναι δεδομένο ότι το R_0 στην πραγματικότητα είναι ακόμα χαμηλότερο (ενδεχομένως μάλιστα να μηδενίζεται ή να λαμβάνει αρνητικές τιμές που δεν έχουν νόημα- σε αυτή την περίπτωση η πλήρης σχέση θα έχει ισχύ για κάθε R). Αξίζει να επαναλάβουμε ότι, στην εξίσωση (9), ως R συμβολίζεται η αντίσταση του αντιστάτη και όχι η πλήρης αντίσταση του κυκλώματος.

Μία τελευταία παρατήρηση είναι η εξής: Τα καλώδια που συνδέθηκαν σε αυτό το τελευταίο πείραμα ήταν όλα όμοια, όμως ορισμένα από τα καλώδια των προηγούμενων πειραμάτων είχαν μεγαλύτερες διαστάσεις. Είναι πιθανό λοιπόν η τιμή να είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από 4,5 Ω. Σε κάθε περίπτωση, η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε αποτελεί μία αποδοτική μέθοδο μέτρησης της αντίστασης των καλωδίων χωρίς πολύμετρο ή ωμόμετρο και μπορεί εύκολα να επαναληφθεί ώστε να μετρηθεί η αντίσταση όλων των

καλωδίων του εργαστηρίου.

4 Συμπεράσματα

Το μοτέρ μελετήθηκε πλήρως, με αποτέλεσμα τον προσδιορισμό της χαρακτηριστικής εξίσωσης (9), η οποία μπορεί με χρήση του νόμου του Ohm (4) να γραφεί ισοδύναμα και ως:

$$f(I, R) = f_0 \cdot I \cdot R \left(\frac{84.5R - 420.3}{R + 4.5} \right) \text{ (SI)} \quad (10)$$

ή και ως:

$$f(I, V) = f_0 \cdot V \left(\frac{84.5056V - 420.2808I}{V + 4.5I} \right) \text{ (SI)} \quad (11)$$

Θα μπορούσαμε να γράψουμε και άλλες ισοδύναμες μορφές της εξίσωσης, οι οποίες να περιλαμβάνουν την ισχύ, μέσω της εξίσωσης (3) ή (5).

Βιβλιογραφία

- [1] Ν. Αλεξάκης et al. *Φυσική Γενικής Παιδείας Β' Λυκείου*. Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων “ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ”, 2013. URL: https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2682/Fysiki_B-Lykeiou-GP_html-empl/.

Παράρτημα I: Πίνακες μετρήσεων

Πίνακας 1: $R = 100 \Omega$				
$V(V)$	$f_a^1(Hz)$	$f_a^2(Hz)$	$f_b^1(Hz)$	$f_b^2(Hz)$
5	137	135	800	770
6	195	202	880	865
7	285	260	942	935
8	350	360	1025	1000
9	390	383	1130	1115
10	442	440	1240	1230
11	530	545	1325	1318
12	587	595	1410	1400
13	642	638	1478	1470
14	770	761	1550	1545
15	820	840	1610	1600

Πίνακας 2: $R = 10 \Omega$	
$V(V)$	$f(Hz)$
1	50
2	53
3	58
4	62,5
5	67,5

Παράρτημα II: Υπολογισμός της μάζας του μοτέρ

Το εδάφιο αυτό παρατίθεται ως Παράρτημα καθώς αποτελεί ύλη της Γ' Λυκείου, και συγκεκριμένα από το κεφάλαιο του Στερεού Σώματος.

Η σχέση (5) μπορεί να μας δώσει την ηλεκτρική ισχύ (ενέργεια ανά χρόνο) που προσφέρεται στο μοτέρ. Μπορούμε να βρούμε την ενέργεια εάν εκτιμήσουμε το χρόνο $t = 1 s$ λειτουργίας και να την εξισώσουμε με τη μηχανική (κινητική) ενέργεια που αποκτά το μοτέρ, το οποίο μπορούμε σε καλή προσέγγιση να θεωρήσουμε έναν περιστρεφόμενο κύλινδρο. Έτσι έχουμε:

$$\frac{V^2}{R}t = \alpha \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (12)$$

όπου α ο συντελεστής απόδοσης (δηλ. το κλάσμα της ηλεκτρικής ισχύος που πράγματι λαμβάνει το μοτέρ, και όχι π.χ. οι απώλειες λόγω θερμότητας) και $I = \frac{1}{2} M r^2$ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου (M η μάζα του και r η ακτίνα του). Αντικαθιστώντας την ακτίνα του μοτέρ μας, $r = 1,1 cm$ και θέτοντας (ενδεικτικά, απλώς για να αποκτήσουμε μια εκτίμηση) $\alpha = 1$, παίρνουμε:

$$M = \frac{4V^2}{r^2 R \omega^2 \alpha} \approx 33,9 g \quad (13)$$

Η τιμή αυτή συμφωνεί με τη διαισθητική εκτίμησή μας, επομένως αποτελεί ένα είδος επαλήθευσης των προηγούμενων υπολογισμών μας. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ζυγίσουμε το μοτέρ και να υπολογίσουμε από εκεί ακριβώς το συντελεστή απόδοσης.