

Capítulo 22

CUADRADOS MÁGICOS

1. El cuadrado mágico más pequeño

La composición de cuadrados mágicos es un entretenimiento matemático muy antiguo y aún hoy muy extendido. El problema consiste en buscar una disposición tal de los números sucesivos (empezando por el 1), en las casillas de un cuadrado cuadriculado, que las sumas de los números en todas las filas y columnas y siguiendo las dos diagonales del cuadrado sean iguales.

El cuadrado mágico más pequeño es el de 9 casillas; es fácil convencerse, haciendo la prueba, de que es imposible la existencia de un cuadrado mágico de cuatro casillas. He aquí una muestra de cuadrado mágico de 9 casillas:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Figura 253

Si sumamos en este cuadrado los números $4 + 3 + 8$, ó $2 + 7 + 6$, ó $3 + 5 + 7$, ó $4 + 5 + 6$, o cualquier otra fila, columna o diagonal, en todos los casos obtendremos la misma suma, 15. Este resultado puede preverse antes de componer el propio cuadrado, porque las tres filas del cuadrado, la superior, la de en medio y la inferior, deben contener todos sus 9 números, que en conjunto dan la suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Por otra parte, esta suma deberá ser igual, evidentemente, al triple de la suma de una fila. De aquí se deduce que cada fila debe sumar:

$$45 : 3 = 15.$$

De un modo semejante se puede determinar a priori la suma de los números de una fila o columna de cualquier cuadrado mágico, cualquiera que sea el número de casillas de que conste. Para esto hay que dividir la suma de todos los números del cuadrado por el número de sus filas.

2. Rotaciones y reflexiones

Una vez compuesto un cuadrado mágico, es fácil obtener sus variantes, es decir, hallar una serie de nuevos cuadrados mágicos.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Figura 254

Por ejemplo, si se ha compuesto el cuadrado de la figura 254, haciéndolo girar mentalmente un cuarto de vuelta completa (es decir, 90°), se obtiene otro cuadrado mágico (figura 255):

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Figura 255

Los sucesivos giros, de 180° (media vuelta completa) y de 270° (tres cuartos de vuelta completa), dan otras dos variantes del cuadrado inicial.

Cada uno de los nuevos cuadrados mágicos obtenidos puede a su vez modificarse, si nos lo figuramos como si viéramos su imagen reflejada en un espejo.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 256

En la figura. 256 se muestra el cuadrado inicial y una de sus imágenes especulares. Sometiendo un cuadrado de 9 casillas a todas las rotaciones y reflexiones, obtenemos las siguientes modificaciones o variantes suyas (figura 257):

6	1	8
7	5	3
2	9	4

1

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

3

Figura 257

6	7	2	
1	5	9	
8	3	4	4

4	9	2	
3	5	7	
8	1	6	5

2	9	4	
7	5	3	
6	1	8	6

8	3	4	
1	5	9	
6	7	2	7

4	3	8	
9	5	1	
2	7	6	8

Figura 257 bis

Esta es la colección completa de todos los cuadrados mágicos que pueden formarse con los nueve primeros números.

3. El procedimiento de Bachet

Vamos a dar a conocer un viejo procedimiento de componer cuadrados mágicos impares, es decir, cuadrados con cualquier número impar de casillas: 3×3 ; 5×5 ; 7×7 , etc. Este procedimiento fue propuesto en el siglo XVII por el matemático francés Bachet. Como el procedimiento de Bachet sirve, entre otras cosas, para el cuadrado de 9 casillas, resulta conveniente empezar su descripción por este ejemplo, por ser más simple. Así, pues, comenzamos a componer el cuadrado mágico de 9 casillas por el procedimiento de Bachet. Después de dibujar un cuadrado cuadriculado en nueve casillas, escribimos en orden creciente los números del 1 al 9, disponiéndolos en filas oblicuas, a tres en cada fila, como puede verse en la figura. 258.

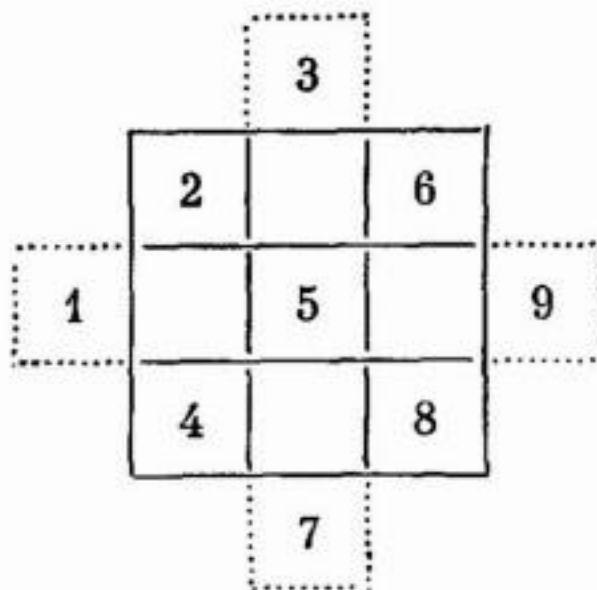


Figura 258

Los números que quedan fuera del cuadrado, los escribimos dentro de él, de forma que pasen a los lados opuestos del cuadrado (pero permaneciendo en las mismas columnas o filas en que estaban). Como resultado obtenemos el cuadrado:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Figura 259

Apliquemos la regla de Bachet a la composición de un cuadrado de 5×5 casillas. Empezaremos por la disposición:

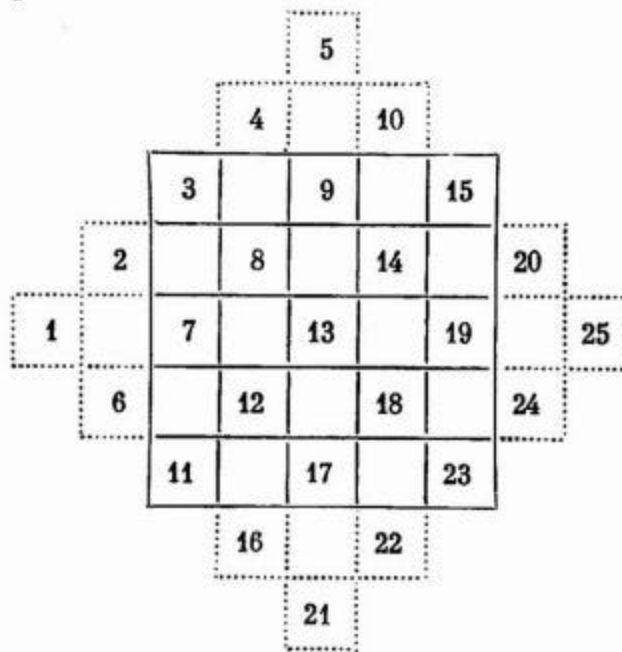


Figura 260

Queda solamente poner dentro del cuadrado los números que han quedado fuera de su marco.

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Figura 261

Para esto hay que desplazar mentalmente las figuras formadas por los números que están fuera del cuadrado («terrazas»), de modo que pasen a ocupar dentro de éste los lados opuestos. De esta manera se obtiene un cuadrado mágico de 25 casillas (figura 261). La base de este procedimiento tan sencillo es bastante complicada, pero los lectores pueden convencerse en la práctica de que el procedimiento es correcto. Después de componer un cuadrado mágico de 25 casillas, por medio de rotaciones y reflexiones puede usted obtener todas sus modificaciones.

4. El procedimiento hindú

El procedimiento de Bachet o, como también se llama el «procedimiento de las terrazas», no es el único para componer cuadrados con número impar de casillas. De los otros

procedimientos que existen, es relativamente fácil uno muy antiguo ideado, al parecer, en la India antes de nuestra era. Este procedimiento puede resumirse en seis reglas. Lea usted atentamente todas estas reglas y fíjese después en cómo se aplican en el ejemplo de cuadrado mágico de 49 casillas representado en la figura. 262.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Figura 262

1. En la mitad de la fila superior se escribe la cifra 1, y en la casilla más baja de la columna inmediata de la derecha, la cifra 2.
2. Los números siguientes se escriben por orden en dirección diagonal hacia arriba.
3. Cuando se llega hasta el borde derecho del cuadrado, se pasa a la casilla extrema izquierda de la fila inmediata superior.
Cuando se llega hasta el borde superior del cuadrado, se pasa a la casilla más baja de la columna inmediata de la derecha.

Observación. Cuando se llega hasta la casilla del ángulo superior derecho, se pasa al izquierdo inferior.

5. Cuando se llega a una casilla que ya está ocupada, se pasa a la casilla que se encuentra inmediatamente debajo de la última casilla llenada.

- 6.- Si la última casilla llenada se encuentra en la fila inferior del cuadrado, se pasa a la casilla más alta de la misma columna.

Guiándose por estas reglas se pueden componer rápidamente cuadrados mágicos con cualquier número impar de casillas.

Si el número de casillas del cuadrado no es divisible por 3, la composición del cuadrado mágico puede comenzarse no por la regla 1, sino por otra regla.

La unidad puede escribirse en cualquier casilla de la fila diagonal que va desde la casilla central de la columna extrema izquierda a la casilla central de la fila más alta del cuadrado. Todos los números siguientes se escriben de acuerdo con las reglas 2 - 5.

Esto da la posibilidad de componer por el procedimiento hindú no un cuadrado, sino varios. Como ejemplo damos el siguiente cuadrado mágico de 49 casillas (figura 263).

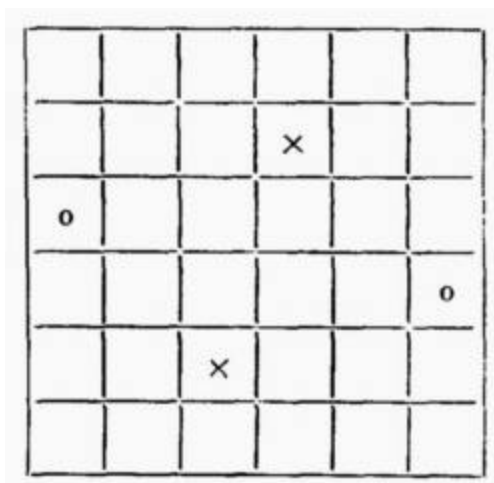


Figura 263

Ejercicio. Componga por el sistema hindú varios cuadrados mágicos de 25 y 49 casillas. Con los cuadrados obtenidos componga varios más por medio de rotaciones y reflexiones.

5. Cuadrados con número par de casillas

Para componer los cuadrados mágicos de casillas aún no se ha hallado una regla general y cómoda. Sólo existe un procedimiento relativamente fácil para aquellos cuadrados pares cuyo número de casillas es divisible por 16; el número de casillas de los lados de estos cuadrados es divisible por 4, es decir, sus lados constan de 4, 8, 12, etc., casillas. Convengamos en qué casillas vamos a llamar «opuestas» entre sí. En la figura. 264 se muestran dos pares de casillas opuestas, que pueden servir de ejemplo: un par se señala con crucecitas y otro con circulitos.

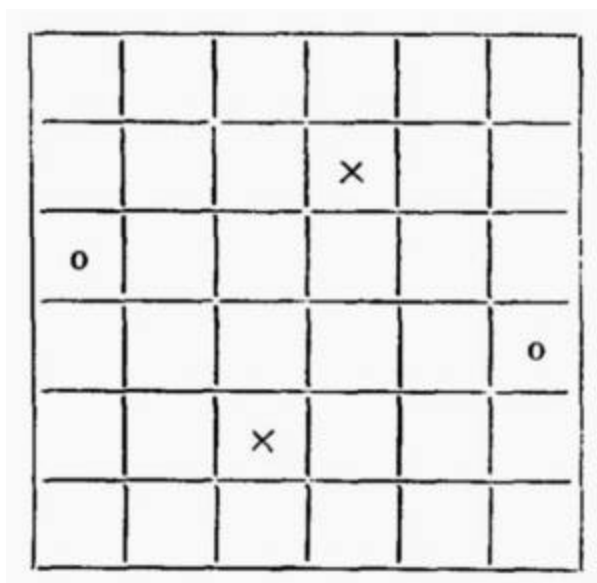


Figura 264

Vemos que si una casilla se encuentra en el cuarto puesto por la izquierda, de la segunda fila por arriba, la casilla opuesta a ella se encontrará en el cuarto puesto por la derecha de la segunda fila por abajo. (Al lector le conviene entrenarse hallando varios pares más de casillas opuestas). Advertimos que para las casillas tomadas en una fila diagonal, las casillas opuestas se encuentran en esta misma diagonal.

El procedimiento de componer cuadrados con el número indicado de casillas por lado lo explicaremos poniendo como ejemplo el cuadrado de 8×8 casillas. Se empieza por escribir ordenadamente en las casillas todos los números del 1 al 64 (figura 265).

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Figura 265

En el cuadrado obtenido, las filas diagonales dan la misma suma, 260, que es precisamente la que debe dar el cuadrado mágico de 8×8 casillas. (Compruebe esto). Pero las filas y las columnas de este cuadrado dan otras sumas. Así, la primera fila por arriba da en total 36, es decir, 224 menos de lo necesario ($260 - 36$); la fila octava, es decir, la más baja, da como suma 484, o sea, 224 más de lo necesario ($484 - 260$).

Teniendo en cuenta que cada número de la octava fila es 56 unidades mayor que el que se halla sobre él en la primera fila y que $224 = 4 \times 56$, llegamos a la conclusión de que las sumas de estas filas pueden igualarse si la mitad de los números de la primera fila intercambian sus puestos con los números que se encuentran debajo de ellos en la octava fila; por ejemplo, los números 1, 2, 3, 4 intercambian sus puestos con los números 57, 58, 59 y 60.

Lo dicho acerca de las filas primera y octava es cierto también para las filas segunda y séptima, tercera y sexta y, en general, para cada par de filas equidistantes de las filas extremas. Haciendo el intercambio de números en todas las filas, se obtiene un cuadrado cuyas filas dan sumas iguales.

Pero es necesario que las columnas también den la misma suma. En la disposición inicial de los números podríamos haber logrado esto haciendo un intercambio de números semejante al que acabamos de hacer con los números de las filas. Pero ahora, después de las permutaciones hechas en las filas, el problema se complica. Para hallar rápidamente los números que hay que intercambiar, existe el siguiente procedimiento, que puede utilizarse desde el principio: en vez de las permutaciones -en las filas y en las columnas-,

intercambian sus puestos los números opuestos entre sí. Sin embargo, esta regla es insuficiente, ya que hemos establecido que deben intercambiarse no todos los números de la fila, sino únicamente la mitad; los demás números continúan en sus puestos. Pero, ¿qué pares de números opuestos son los que hay que intercambiar?

A esta pregunta responden las cuatro reglas siguientes:

1. El cuadrado mágico debe dividirse en cuatro cuadrados, como muestra la figura. 266.

1×	2	3	4×	5×	6	7	8×
9×	10×	11	12	13	14	15×	16×
17	18×	19×	20	21	22×	23×	24
25	26	27×	28×	29×	30×	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Figura 266

2. En el cuadrado superior de la izquierda se señalan con crucechitas la mitad de todas las casillas, de manera que en cada columna y en cada fila de este cuadrado resulte señalada exactamente la mitad de las casillas que figuran en ella. Esto puede hacerse por diversos procedimientos, por ejemplo, como se ve en la figura. 266.

3. En el cuadrado superior de la derecha se señalan con crucechitas las casillas simétricas a las que se señalaron en el cuadrado superior de la izquierda.

4. Ahora no queda más que intercambiar los números que se encuentran en las casillas señaladas, con los números que se hallan en las casillas opuestas.

Como resultado de todas las permutaciones realizadas se obtiene el cuadrado mágico de 64 casillas que se representa en la figura. 267.

64	2	3	61	60	6	7	57
56	55	11	12	13	14	50	59
17	47	46	20	21	43	42	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	23	22	44	45	19	18	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	58	59	5	4	62	63	1

Figura 267

Pero en el cuadrado superior de la izquierda podríamos haber marcado las casillas de muchas maneras distintas, sin infringir la regla 2.

Esto puede hacerse, por ejemplo, como muestran los dibujos de la figura. 268.

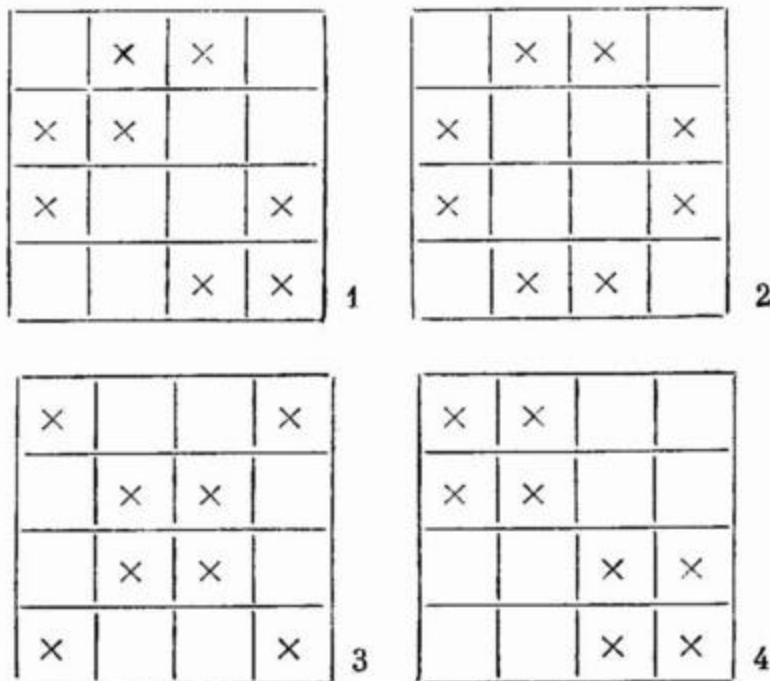


Figura 268

El lector hallará, indudablemente, otras muchas formas de distribuir las crucecitas en las casillas del cuadrado superior de la izquierda.

Aplicando después las reglas 3 y 4, pueden obtenerse varios cuadrados mágicos más, de 64 casillas.

Por este mismo procedimiento pueden construirse cuadrados mágicos de 12×12 , 16×16 , etc., casillas.

Proponemos al lector que haga esto por sí mismo.

6. Por qué se llaman así los cuadrados mágicos

La primera mención acerca de un cuadrado mágico se encuentra en un antiguo libro oriental que data de los años 4000-5000 antes de nuestra era. Los cuadrados mágicos eran más conocidos en la antigua India. La afición a los cuadrados mágicos pasó de la India a los pueblos árabes, los cuales atribuían a estas combinaciones numéricas propiedades misteriosas.

En Europa occidental los cuadrados mágicos eran en la edad media patrimonio de los representantes de las pseudo ciencias, los alquimistas y los astrólogos. De las viejas ideas supersticiosas es de donde estos cuadrados numéricos recibieron su denominación de «mágicos» -es decir, pertenecientes a la magia-, tan extraña a las matemáticas. Los astrólogos y los alquimistas creían que una tablilla con la representación de un cuadrado mágico era capaz de salvar de la desgracia a la persona que la llevaba como talismán. La composición de los cuadrados mágicos no es sólo una distracción. Su teoría fue elaborada por muchos matemáticos eminentes.

Esta teoría encuentra aplicación en ciertos problemas matemáticos importantes. Así, por ejemplo, existe un procedimiento de resolución de sistemas de ecuaciones con muchas incógnitas que utiliza las deducciones de la teoría de los cuadrados mágicos.