

## Capítulo 1 PARA LOS RATOS LIBRES

### Tijeras y papel

- *De un corte, en tres partes*
- *¿Cómo poner de canto una tira de papel?*
- *Anillos en cantados*
- *Resultados inesperados de un corte a una cadena de papel*
- *¿Cómo meterse por una hoja de papel?*

Usted pensará, como es natural, lo mismo que yo pensaba hace tiempo, que en este mundo hay cosas que no sirven. Pero se equivoca: no hay trastos viejos que no sirvan para algo. Lo que no vale para una cosa, vale para otra, y lo que no sirve para nada útil, puede servir para distraerse.

En el rincón de un cuarto recién reparado me encontré una vez con varias tarjetas postales viejas y un montón de tiras estrechas de las que suelen recortarse de los papeles pintados cuando se empapan las habitaciones. «Esto, pensé yo, no vale más que para quemarlo en la estufa». Pero resultó que hasta estas cosas, tan inútiles al parecer, pueden servir de pasatiempo interesante. Mi hermano mayor me enseñó una serie de ingeniosos rompecabezas que pueden hacerse con este material.

Empezó por las tiras de papel. Me dio una que tendría unos tres palmos de largo y me dijo:

- Coge unas tijeras y corta esta tira en tres partes...

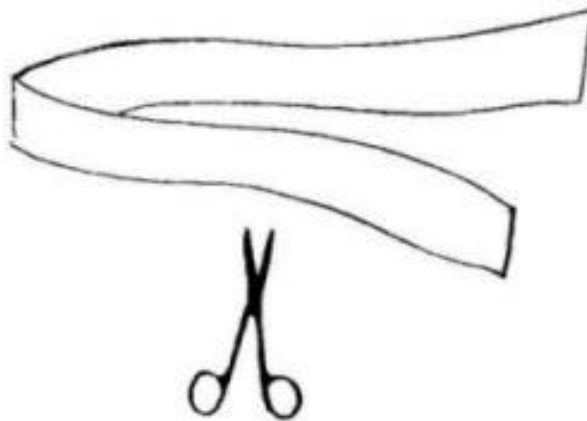


Figura 1

Me disponía ya a cortar, cuando mi hermano me detuvo:

- Espera que aún no he terminado. Córdala en tres partes, pero de un solo tajo.

Esto ya era más difícil. Intenté hacerlo de varias formas y me convencí de que el problema que me había puesto era embarazoso. Al fin llegué a la conclusión de que no se podía resolver.

- ¿Qué quieres, reírte de mí? le dije. Esto es imposible.

- Piénsalo mejor, quizá comprendas lo que hay que hacer.

- Lo que yo he comprendido ya es que este problema no tiene solución.

- Pues, lo has comprendido mal. Dame.

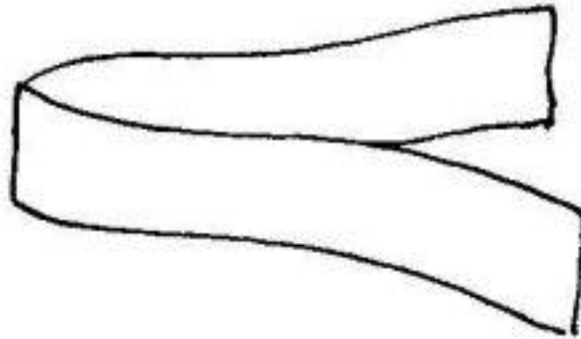
Mi hermano me quitó la tira y las tijeras, dobló el papel y lo cortó por la mitad. Resultaron tres trozos.

- ¿Ves?

- Si, pero has doblado el papel.

- ¿Y por qué no lo doblaste tú?

- Porque no me dijiste que se podía doblar.  
 - Pero tampoco te dije que no se podía. Así que, reconoce que no has sabido resolver el problema.  
 - Ponme otro. Ya verás como no me coges más.  
 - Toma esta otra tira. Ponla de canto sobre la mesa.  
 - ¿Para que se quede en pie, o para que se caiga?, le pregunté, imaginándome que se trataba de una nueva trampa.  
 - Para que se quede en pie, claro está. Si no, no estaría de canto.  
 «Para que se quede ... de canto», pensé yo, y de repente se me ocurrió que la tira se podía doblar. La doblé y la puse sobre la mesa.



*Figura 2*

- Ahí la tienes, ¡de canto! De que no se podía doblar no dijiste nada.  
 - Está bien.  
 -¡Venga otro problema!  
 - Con mucho gusto. ¿Ves?, he pegado los extremos de varias tiras y han resultado unos anillos de papel. Coge un lápiz rojo y azul y traza a todo lo largo de la parte exterior del anillo una raya azul, y a lo largo de la parte interior, una raya roja.  
 -¿Y qué más?  
 - Eso es todo.  
 ¡Qué tarea más simple! Y, sin embargo, no me salió bien. Cuando cerré la raya azul y quise empezar la roja, me encontré con que, por descuido, había trazado rayas azules a los dos lados del anillo.  
 - Dame otro anillo, le dije desconcertado -. Este lo he estropeado sin querer.  
 Pero con el segundo anillo me ocurrió lo mismo: no me di cuenta de cómo rayé sus dos partes.  
 -¿Qué confusión es ésta?, también lo he estropeado. ¡Dame el tercero!  
 - Cógelo, no te preocupes.  
 Y, ¿qué piensa usted? Esta vez también resultaron rayados con trazo azul los dos lados del anillo. Para el lápiz rojo no quedó parte libre.  
 Me apesadumbré.  
 -¡Una cosa tan fácil y no puedes hacerla!, dijo mi hermano riéndose. A mí me sale enseguida.  
 Y, efectivamente, cogió un anillo y trazó rápidamente por su lado exterior una raya azul y por todo el interior, una raya roja.  
 Recibí un nuevo anillo y empecé, con el mayor cuidado posible a trazar la raya por una de sus partes.  
 Por fin, procurando no pasarme al otro lado inopinadamente, cerré el trazo. Y... otra vez fracasé: ¡las dos partes quedaron rayadas! Cuando las lágrimas se me saltaban ya, miré

confuso a mi hermano y, sólo entonces, por su sonrisa astuta, comprendí que pasaba algo anormal.

- Eh..., ¿has hecho un truco?, le pregunté.

- Sí. Los anillos están encantados, me respondió -. ¡Son maravillosos!

- ¿Maravillosos? Son anillos como otros cualesquiera. Pero tú les haces algo.

- Intenta hacer con ellos alguna otra cosa. Por ejemplo, ¿podrías cortar uno de estos anillos a lo largo, para que salieran dos más estrechos?

- ¡Vaya trabajo!

Corté el anillo, y ya me disponía a enseñarle a mi hermano la pareja obtenida, cuando vi con sorpresa que tenía en mis manos no dos anillos, sino uno más largo.

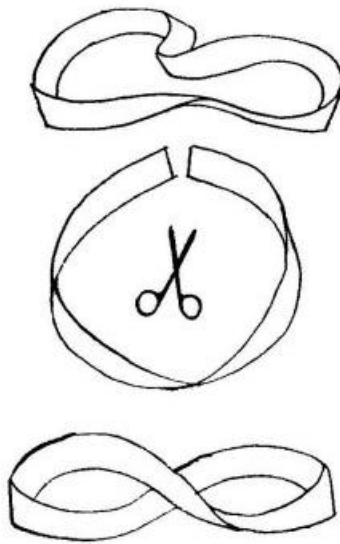
- ¿Qué, dónde están tus dos anillos?, me preguntó él con aire de burla.

- Dame otro anillo: probaré otra vez.

- ¿Para qué quieres otro? Corta ese mismo que acabas de obtener.

Así lo hice. Y esta vez conseguí, indudablemente, tener dos anillos en mis manos. Pero cuando quise separarlos, resultó que era imposible, ya que estaban enlazados. Mi hermano tenía razón: ¡aquel anillo estaba encantado de verdad!

- El secreto de este encantamiento es bien sencillo, replicó mi hermano.



*Figura 3*

Tú mismo puedes hacer anillos tan extraordinarios como éstos. Todo consiste en que, antes de pegar los extremos de la tira de papel, hay que volver uno de dichos extremos de esta forma (figura 3).

- ¿Y de esto depende todo?

- Exactamente. Pero yo, como es natural, rayé con el lápiz un anillo... ordinario. Aún resulta más interesante si el extremo de la tira se vuelve no una, sino dos veces.

Mi hermano confeccionó ante mis ojos un anillo de este último tipo y me lo dio.

- Córdalo a lo largo, me dijo, a ver que sale.

Lo corté y resultaron dos anillos, pero enlazados el uno al otro. ¡Tenía gracia! No se podían separar.

Yo mismo hice tres anillos más, iguales que éstos, y al cortarlos obtuve tres nuevos pares de anillos inseparables.

- Y ¿qué harías tú, me preguntó mi hermano, si tuvieras que unir estos cuatro pares de anillos de modo que formaran una larga cadena abierta?

- Eso es fácil: cortaría uno de los anillos de cada par, lo ensartaría y lo volvería a pegar.

-Es decir, ¿cortarías con las tijeras tres anillos? -aclaró mi hermano.  
-Tres, claro está -repuse yo.  
-Y ¿no es posible cortar menos de tres?  
-Si tenemos cuatro pares de anillos, ¿cómo quieres unirlos cortando sólo dos? Eso es imposible -aseguré yo.

En vez de responder, mi hermano cogió las tijeras que yo tenía en la mano, cortó los dos anillos de un mismo par y unió con ellos los tres pares restantes. Resultó una cadena de ocho eslabones. ¡Más fácil no podía ser!

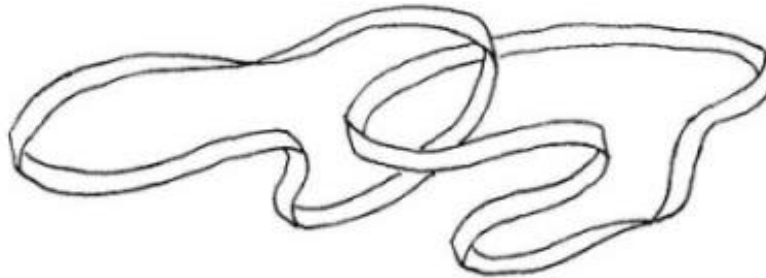


Figura 4

No se trataba de ninguna artimaña. Lo único que me sorprendió es que no se me hubiera ocurrido a mí una idea tan sencilla.

-Bueno, dejemos ya las tiras de papel. Creo que tienes por ahí unas tarjetas postales viejas. Tráelas, vamos a ver que hacemos con ellas. Prueba, por ejemplo, a recortar en una tarjeta el agujero más grande que puedas.

Horadé con las tijeras la tarjeta, y con mucho cuidado, recorté en ella un orificio rectangular, dejando solamente un estrecho marco de cartulina.

-Ya está. ¡Más grande no puede ser! -dije yo satisfecho, mostrándole a mi hermano el resultado de mi trabajo.

Pero él, por lo visto, pensaba de otro modo.

-Pues, es un agujero bastante pequeño. Apenas si pasa por él la mano.

-¿Y tú, qué querías, que se pudiera meter la cabeza por él? -repliqué con ironía.

-La cabeza y el cuerpo. Un agujero por el que se pueda meter uno entero: ese es el agujero que hace falta.

-¡Ja, ja! Un agujero que sea más grande que la propia tarjeta, ¿eso es lo que tú quieres?

-Exactamente. Muchas veces mayor que la tarjeta.

-Aquí no hay astucia que valga. Lo imposible es imposible.

-Pero lo posible es posible -dijo mi hermano y comenzó a cortar.

Aunque yo estaba convencido de que quería reírse de mí, observé con curiosidad lo que hacían sus manos. Dobló la tarjeta postal por la mitad, trazó con un lápiz dos rectas paralelas, próximas a los bordes largos de la tarjeta doblada, e hizo dos cortes junto a los otros dos bordes.

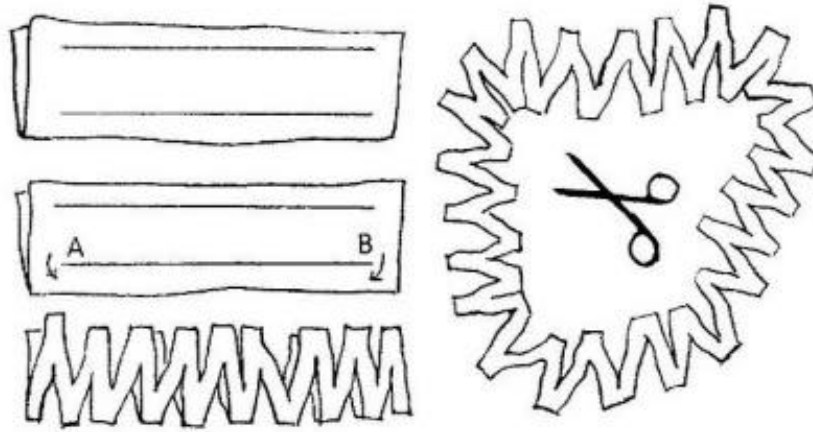


Figura 5

Después cortó el borde doblado, desde el punto A hasta el B, y empezó a dar cortes cercanos unos a otros, así:

-¡Listo! -anunció mi hermano.

-Pues, yo no veo ningún agujero.

-¡Mira!

Mi hermano extendió la cartulina. Y figúrese usted: ésta se desarrolló formando una cadeneta tan larga, que el hermano me la echó por la cabeza sin dificultad y ella cayó a mis pies rodeándome con sus zigzagues.

-¿Qué, se puede meter uno por ese agujero?

-¡Y dos también, sin apretarse -exclamé yo admirado!

Mi hermano dio con esto por terminados sus experimentos y rompecabezas y me prometió que en otra ocasión me enseñaría toda una serie de pasatiempos valiéndose exclusivamente de monedas.

### **Pasatiempos de monedas**

- *Moneda visible e invisible.*
- *Un vaso insondable*
- *¿Adónde fue a parar la moneda*
- *Problemas de distribución de monedas*
- *¿En qué mano está la moneda de diez copeikas?*
- *Juego de transposición de monedas*
- *Leyenda hindú*
- *Soluciones de los problemas*

-Ayer prometiste enseñarme unos trucos con monedas, le recordé a mi hermano cuando tomábamos el té de desayuno.

-¿Desde por la mañana vamos a empezar con los trucos? Bueno. Vacía este lavafrutas.

En el fondo de la vasija recién vacía puso mi hermano una moneda de plata:

-Mira al lavafrutas sin moverte de tu sitio y sin inclinarte hacia adelante. ¿Ves la moneda?

-Sí, la veo.

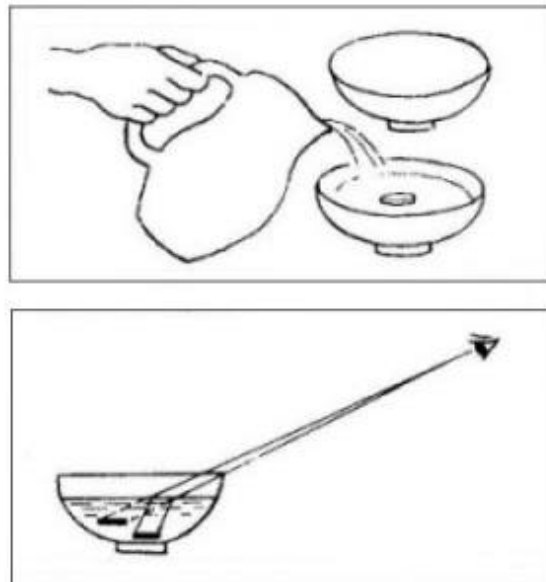
Mi hermano alejó un poco la vasija:

-¿Y ahora?

-Veo nada más que el borde de la moneda. Lo demás está oculto.

Alejando un poquitín más la vasija, consiguió mi hermano que yo dejase de ver la moneda, la cual quedó completamente oculta por la pared del lavafrutas.

-Estate tranquilo y no te muevas. Yo echo agua en la vasija. ¿Qué ocurre con la moneda?



*Figura 6*

-Otra vez la veo totalmente, como si hubiera subido junto con el fondo. ¿A qué se debe esto?

Mi hermano cogió un lápiz y dibujó en un papel el lavafrutas con la moneda. Y entonces todo quedó claro. Mientras la moneda se encontraba en el fondo de la vasija sin agua, ni un solo rayo de luz procedente de aquélla podía llegar a mi ojo, ya que la luz seguía líneas rectas y la pared opaca del lavafrutas se interponía en su camino entre la moneda y el ojo. Cuando echó el agua, la situación cambió: al pasar del agua al aire, los rayos de luz se quiebran (o como dicen los físicos: «se refractan») y salen ya por encima del borde del recipiente, pudiendo llegar al ojo. Pero nosotros estamos acostumbrados a ver las cosas solamente en el lugar de donde parten los rayos rectos y, por esto, suponemos inconscientemente que la moneda se encuentra no donde está en realidad, sino más alta, en la prolongación del rayo refractado. Por esto nos parece que el fondo de la vasija se elevó junto con la moneda.

-Te aconsejo que recuerdes este experimento -me dijo mi hermano-. Te servirá cuando te estés bañando. Si te bañas en un sitio poco profundo, donde se vea el fondo, no te olvides de que verás dicho fondo más arriba de donde está en realidad. Bastante más arriba: aproximadamente en toda una cuarta parte de la profundidad total. Donde la profundidad verdadera sea, por ejemplo, de 1 metro, te parecerá que sólo es de 75 centímetros. Por esta causa ya han ocurrido no pocas desgracias con los niños que se bañan: se dejan llevar por la engañosa visión y no calculan bien la profundidad.

-Yo me he dado cuenta de que, cuando vas en barca por un sitio así, donde se ve el fondo, parece que la profundidad mayor se encuentra precisamente debajo de la barca y que alrededor es mucho menor. Pero llegas a otro sitio, y otra vez la profundidad es menor alrededor y mayor debajo de la barca. Da la sensación de que el sitio más profundo se traslada con la barca. ¿Por qué ocurre esto?

-Ahora no te será difícil comprenderlo. Los rayos que salen del agua casi verticalmente, cambian de dirección menos que los demás, por lo que en estos puntos parece que el fondo está menos elevado que en otros, de los cuales llegan a nuestro ojo rayos oblicuos. Es natural que, en estas condiciones, el sitio más profundo nos parezca que está precisamente debajo de la barca, aunque el fondo sea llano. Y ahora hagamos otro experimento de un tipo completamente distinto.

Mi hermano llenó un vaso de agua hasta los mismos bordes:

-¿Qué crees que ocurrirá si ahora echo en este vaso una moneda de veinte copeikas?

-Está claro: el agua rebosará.

-Hagamos la prueba.

Con mucho cuidado, procurando no agitar el agua, mi hermano dejó caer una moneda en el vaso lleno. Pero no se derramó ni una sola gota.

-Intentemos ahora echar otra moneda de veinte copeikas -dijo mi hermano.

-Entonces es seguro que se derramará -le advertí yo con certeza.

Y me equivoqué: en el vaso lleno cupo también la segunda moneda. A ella siguió una tercera y luego una cuarta.

-¡Este vaso es insondable! -exclamé yo.

Mi hermano, en silencio y sin inmutarse, continuaba echando en el vaso una moneda tras otra. La quinta, sexta y séptima moneda de veinte copeikas cayeron en el fondo del vaso sin que el agua se derramara. Yo no podía creer lo que mis ojos veían. Estaba impaciente por saber el desenlace.

Pero mi hermano no se daba prisa a explicármelo. Dejaba caer con precaución las monedas y no paró hasta la decimoquinta moneda de veinte copeikas.

-Por ahora basta -dijo por fin-. Mira cómo ha subido el agua sobre los bordes del vaso.

Efectivamente: el agua sobresalía de la pared del vaso aproximadamente el grueso de una cerilla, redondeándose junto a los bordes como si estuviera en una bolsita transparente.

-En esta «hinchazón» está la clave del secreto, continuó diciendo mi hermano. Ahí es a donde fue a parar el agua que desplazaron las monedas.

-¿Y 15 monedas han desplazado tan poca agua?, dije yo sorprendido. El montón de 15 monedas de veinte copeikas es bastante alto, mientras que aquí sólo sobresale una capa delgada cuyo espesor apenas si es mayor que el de una de dichas monedas.

-Ten en cuenta no sólo el espesor de la capa, sino también su área. Supongamos que el espesor de la capa de agua no sea mayor que el de una moneda de veinte copeikas. Pero, ¿cuántas veces es mayor su anchura?

Yo calculé que el vaso sería unas cuatro veces más ancho que la moneda de veinte copeikas.

-Cuatro veces más ancho y con el mismo espesor. Quiere decir -resumí yo-, que la capa de agua es solamente cuatro veces mayor que una moneda de veinte copeikas. En el vaso podrían haber cabido cuatro monedas, pero tú has echado ya 15 y, por lo que veo, piensas echar más. ¿De dónde sale el sitio para ellas?

-Es que tú has calculado mal. Si un círculo es cuatro veces más ancho que otro, su área no es cuatro veces mayor, sino 16 veces.

-¿Cómo es eso?

-Tú debías saberlo. ¿Cuántos centímetros cuadrados hay en un metro cuadrado? ¿Cien?

-No:  $100 * 100 = 10\,000$ .

-¿Ves? Pues, para los círculos sirve esa misma regla: si la anchura es doble, el área es cuatro veces mayor; si la anchura es triple, el área es nueve veces mayor; si la anchura es cuádruplo, el área es 16 veces mayor y así sucesivamente. Por lo tanto, el volumen del agua que sobresale de los bordes del vaso es 16 veces mayor que el volumen de una moneda de veinte copeikas. ¿Comprendes ahora de donde salió el sitio para que las monedas cupieran en el vaso? Y todavía hay más, porque el agua puede llegar a sobresalir de los bordes unas dos veces el espesor de esta moneda.

-¿Será posible que metas en el vaso 20 monedas?

-Y más, siempre que se introduzcan con cuidado y sin mover el agua.

-¡Jamás hubiera creído que en un vaso lleno de agua hasta los bordes pudieran caber tantas monedas!

Pero tuve que creerlo cuando con mis propios ojos vi este montón de monedas dentro del vaso.

-¿Podrías tú, me dijo mi hermano, colocar once monedas en 10 platillos, de modo que en cada platillo no haya más que una moneda?

-¿Los platillos tendrán agua?

-Como quieras. Pueden estar secos -respondió mi hermano, echándose a reír y colocando 10 platillos uno detrás de otro.

-¿Esto también es un experimento físico?

-No, psicológico. Empieza.

-11 monedas en 10 platillos y ... una en cada uno. No, no puedo, dije, y capitulé en el acto.

-Prueba, yo te ayudaré. En el primer platillo pondremos la primera moneda y, temporalmente, la undécima.

Yo coloqué en el primer platillo dos monedas y esperé perplejo el desenlace.

-¿Has puesto las monedas? Está bien. La tercera moneda ponla en el segundo platillo. La cuarta, en el tercero; la quinta, en el cuarto, y así sucesivamente.

Hice lo que me decía. Y cuando la décima moneda la puse en el noveno platillo, vi con sorpresa que aún estaba libre el décimo.

-En él pondremos la undécima moneda que temporalmente dejamos en el primer platillo -dijo mi hermano, y cogiendo del primer platillo la moneda sobrante, la depositó en el décimo.

Ahora había 11 monedas en 10 platillos. Una en cada uno. ¡Era como para volverse loco! Mi hermano recogió con presteza las monedas y no quiso explicarme lo que pasaba.

-Tú mismo debes adivinarlo. Esto te será más útil e interesante que si conoces las soluciones acabadas.

Y sin atender a mis ruegos, me propuso un nuevo problema:

-Aquí tienes seis monedas. Colócalas en tres filas, de manera que en cada fila haya tres monedas.

-Para eso hacen falta nueve monedas.

-Con nueve monedas cualquiera puede hacerlo. No, hay que conseguirlo con seis.

-¿Otra vez algo inconcebible?

-¡Que pronto te das por vencido! Mira que sencillo es.

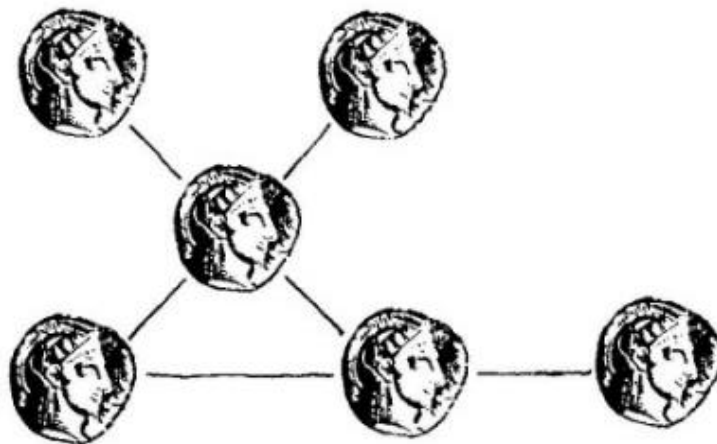


Figura 7

Cogió las monedas y las dispuso del modo siguiente:

-Aquí hay tres filas y en cada una de ellas hay tres monedas -me explicó.

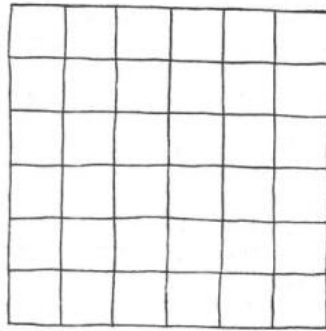
-Pero estas filas se cruzan.

-¿Y qué? ¿Dijimos acaso que no podían cruzarse?

-Si hubiera sabido que se podía hacer así, lo habría adivinado yo mismo.



-Bueno, pues, adivina cómo se resuelve este mismo problema por otro procedimiento. Pero no ahora, sino después, cuando tengas tiempo libre. Y aquí tienes tres problemas más del mismo tipo.



*Figura 8*

Primero: coloca nueve monedas en 10 filas, a tres monedas en cada fila. Segundo: distribuye 10 monedas en cinco filas, de modo que haya cuatro monedas en cada una. Y el tercero es el siguiente. Yo dibujo un cuadrado con 36 casillas. Hay que poner en él 18 monedas, a una por casilla, de manera que en cada fila longitudinal o transversal haya tres monedas... Espera, acabo de acordarme de otro truco con monedas. Empuña una moneda de 15 copeikas con una mano y otra de diez con la otra, pero no me enseñes ni me digas qué moneda tienes en cada mano. Yo mismo lo adivinaré. Lo único que tienes que hacer es lo que sigue: duplica mentalmente el valor de la moneda que tienes en la mano derecha, triplica el de la que tienes en la izquierda y suma los dos valores así obtenidos. ¿Lo has hecho ya?

-Sí.

-¿El número que resulta, es par o impar?

-Impar.

-La moneda de diez copeikas la tienes en la mano derecha y la de quince, en la izquierda - dijo mi hermano inmediatamente y acertó.

Repetimos el juego. El resultado fue esta vez par, y mi hermano, sin confundirse, dijo que la moneda de diez copeikas estaba en la mano izquierda.

-Acerca de este problema, reflexiona también cuando tengas tiempo -me aconsejó mi hermano-. Y para terminar te enseñaré un interesante juego con monedas.

Puso tres platillos en fila y colocó en el primero un montón de monedas: debajo, una de a rublo, sobre ella, una de cincuenta copeikas, encima, una de veinte, luego, una de quince, y finalmente, una de diez.

-Este montón de cinco monedas debe trasladarse al tercer platillo ateniéndose a las siguientes reglas. Primera regla: las monedas sólo se pueden trasladar de una a una. Segunda: se prohíbe colocar una moneda mayor sobre otra menor. Tercera: las monedas se pueden poner provisionalmente en el segundo platillo, pero cumpliendo las dos reglas anteriores, y al final todas las monedas deben estar en el tercer platillo y en el mismo orden que tenían al principio. Como ves, las reglas no son difíciles de cumplir. Cuando quieras puedes empezar.

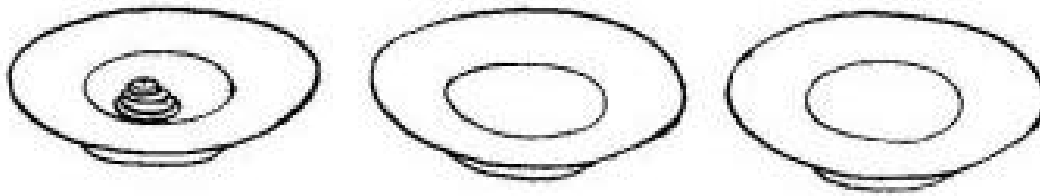


Figura 9

Comencé a transponer las monedas. Puse la de diez copeikas en el tercer platillo, la de quince, en el segundo, y me quedé cortado. ¿Dónde poner la de veinte copeikas siendo mayor que la de diez y que la de quince?

-¿Qué te pasa?, intervino mi hermano. Pon la moneda de diez copeikas en el platillo de en medio, sobre la de quince. Así queda libre el tercer platillo para la moneda de veinte copeikas.

Hice lo que decía, pero me encontré con una nueva dificultad. ¿Dónde colocar la moneda de cincuenta copeikas? Sin embargo, pronto caí en lo que había que hacer: pasé primero la moneda de diez copeikas al primer platillo, la de quince al tercero y luego, la de diez también al tercero. Ahora podía poner la de cincuenta copeikas en el platillo de en medio, que había quedado libre. Después de muchas transposiciones logré trasladar también el rublo y reunir, por fin, todo el montón de monedas en el tercer platillo.

-¿Cuántas transposiciones has hecho en total?, me preguntó mi hermano, aprobando mi trabajo.

-No las he contado.

-Vamos a contarlas. Lo más interesante es saber cuál es el número mínimo de movimientos con que se puede lograr el fin propuesto. Si el montón fuera no de cinco monedas, sino de dos solamente, de la de quince copeikas y de la de diez, por ejemplo, ¿cuántos movimientos habría que hacer?

-Tres: pasar la diez al platillo de en medio, la de quince al tercero y luego la de diez, también al tercero.

-Muy bien. Añadamos ahora otra moneda -la de veinte copeikas- y contemos cuántos movimientos hay que hacer para trasladar el montón formado por estas monedas. Lo haremos así: primero pasaremos sucesivamente las dos monedas menores al platillo de en medio. Para esto, como ya sabemos, hay que hacer tres movimientos. Después pasaremos la moneda de veinte copeikas al tercer platillo, que está libre y será un paso más. Y, por fin, trasladaremos las dos monedas del platillo de en medio al tercer platillo, para lo cual habrá que hacer otros tres movimientos. En total serán  $3 + 1 + 3 = 7$  movimientos.

-Déjame que cuente yo mismo los movimientos que hay que hacer para trasladar cuatro monedas. Primero pasaré las tres menores al platillo de en medio, haciendo siete movimientos, después pondré la moneda de cincuenta copeikas en el tercer platillo, y será un movimiento más, y luego volveré a trasladar las 3 monedas menores al tercer platillo, para lo que tendré que hacer otros siete movimientos. En total serán  $7 + 1 + 7 = 15$ .

-Perfectamente... ¿Y para cinco monedas?

- $15 + 1 + 15 = 31$ .

-Ves, ya sabes cómo se hace el cálculo. Pero te voy a enseñar cómo se puede simplificar. Fíjate, todos los números que hemos obtenido, 3, 7, 15, 31, son el producto de 2 por sí mismo, efectuado una o varias veces, pero restándole una unidad. ¡Observa!, dijo mi hermano y escribió la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot 2 - 1, \\ 7 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1, \\ 15 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1, \\ 31 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1. \end{aligned}$$

-Entendido: hay que tomar el número dos como factor tantas veces como monedas hay que trasladar, y luego restar una unidad. Ahora podría calcular el número de pasos para cualquier montón de monedas. Por ejemplo, para siete monedas:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 128 - 1 = 127.$$

-Bueno, has comprendido este antiguo juego. Pero debes saber una regla práctica más: si el número de monedas del montón es impar, la primera moneda se pasa al tercer platillo, y si es par, se pasa al platillo de en medio.

-Has dicho que es un juego antiguo. Entonces, ¿no lo has inventado tú?

-No, yo lo único que he hecho es aplicarlo a las monedas. Pero este juego es de procedencia muy antigua y quizá sea de origen hindú. En la India existe una leyenda interesantísima ligada a este juego. En la ciudad de Benarés hay, por lo visto, un templo en el cual el dios hindú Brahma, cuando creó el mundo, puso tres barritas de diamante y ensartó en una de ellas 64 discos de oro: el mayor debajo y cada uno de los siguientes, menor que el anterior. Los sacerdotes de este templo tienen la obligación de pasar sin descanso, día y noche, estos discos de una barrita a otra, utilizando la tercera como auxiliar y siguiendo las reglas de nuestro juego, es decir, pasando cada vez un solo disco, sin poner nunca uno mayor sobre otro menor. Dice la leyenda que cuando los 64 discos hayan sido trasladados, se acabará el mundo.

-¡Entonces, ya hace tiempo que no debía existir!

-¿Tú crees que el traslado de los 64 discos no ocupa mucho tiempo?

-Naturalmente. Haciendo un movimiento cada segundo, se pueden hacer 3600 traslados en una hora.

-¿Y qué?

-Y en un día, cerca de 100 mil. En diez días, un millón. Con un millón de pasos creo que se pueden trasladar no 64 discos, sino todo un millar.

-Pues, te equivocas. Para trasladar 64 discos se necesitan aproximadamente 500 mil millones de años.

-¿Cómo es eso? El número de pasos es igual solamente al producto de 64 doses, y esto da...

-«Nada más» que 18 trillones y pico.

-Espera un poco, ahora hago la multiplicación y veremos.

-Perfectamente. Y mientras tú multiplicas tendré tiempo de ir a hacer algunas cosas -dijo mi hermano y se fue.

Yo hallé primeramente el producto de 16 doses y después este resultado, 65.536, lo multipliqué por sí mismo, y con lo que obtuve repetí esta operación. El trabajo era bastante aburrido, pero me armé de paciencia y lo llevé hasta el fin. Me resultó el siguiente número:

$$18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616.$$

¡Mi hermano tenía razón!

Cobré ánimo y me puse a resolver los problemas que él me había propuesto para que yo los hiciera sin su ayuda. Resultó que no eran difíciles y que algunos incluso eran muy fáciles.

Con las 11 monedas en los diez platillos la cosa tenía gracia por su sencillez: en el primer platillo pusimos la primera y la undécima moneda; en el segundo, la tercera, después, la cuarta y así sucesivamente. Pero, ¿dónde pusimos la segunda? ¡En ninguna parte! Ahí está el secreto. También es muy fácil el secreto para adivinar en qué mano está la moneda de diez copeikas: todo se reduce a que la moneda de 15 copeikas, cuando se duplica, da un número par, y cuando se triplica, un número impar; en cambio, la de diez copeikas da siempre un número par; por esto, si de la suma resultaba un número par, quería decir que la de 15 copeikas había sido duplicada, es decir, que estaba en la mano derecha, y si la

suma era impar, es decir, si la de 15 copeikas había sido triplicada, se hallaba en la mano izquierda.

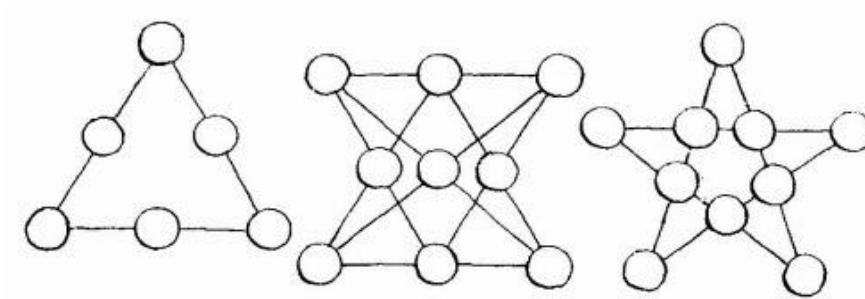


Figura 10

Las soluciones de los problemas referentes a colocaciones de monedas se ven claramente en los dibujos siguientes (figura 10).

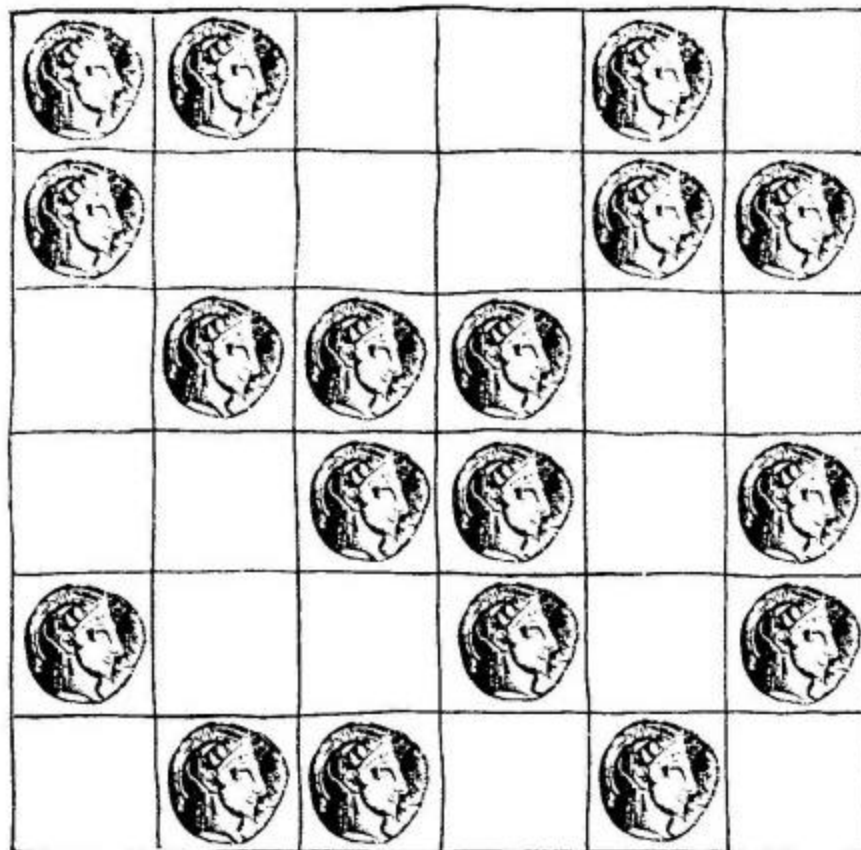


Figura 11

Finalmente, el problema de las monedas y las casillas se resuelve como muestra la figura 11: las 18 monedas han sido alojadas en el cuadrado de 36 casillas y en cada fila hay tres monedas.

**Perdidos en un laberinto**

- *Perdidos en un laberinto*
- *Hombres y ratas en un laberinto*
- *Regla de la mano derecha o de la mano izquierda*
- *Laberintos de la antigüedad*
- *Tournefort en la cueva*
- *Soluciones a los problemas sobre laberintos*

-¿De qué te ríes leyendo ese libro? ¿Es alguna historia graciosa? me preguntó mi hermano.

-Sí. Es el libro de Jerome «Tres en un bote».

-Lo he leído. Es interesante. ¿En qué pasaje estás?

-En el que cuenta cómo un montón de gente se perdió en el laberinto de un parque y no podía salir de él.

-¡Curioso cuento! Léemelo.

Leí en voz alta el cuento de los que se perdieron en el laberinto.

-«Harris me preguntó si había estado alguna vez en el laberinto del Hampton Court. El tuvo ocasión de estar allí una vez. Lo había estudiado en el plano y la estructura del laberinto le pareció que era simple hasta la necedad y que, por lo tanto, no valía la pena pagar por entrar. Pero fue allí con uno de sus parientes.

Vamos, si quiere -le dijo él-. Pero aquí no hay nada interesante. Es absurdo decir que esto es un laberinto. Se da una serie de vueltas hacia la derecha y ya se está a la salida. Lo recorreremos en diez minutos.

En el laberinto se encontraron con varias personas que paseaban ya por él cerca de una hora y que celebrarían el poder salir. Harris les dijo que, si querían, podían seguirle: él acababa de entrar y sólo quería dar una vuelta. Ellos le respondieron que lo harían con mucho gusto y lo siguieron.

Por el camino se les fue incorporando más gente, hasta que por fin se reunió todo el público que se hallaba en el laberinto. Como habían perdido ya toda esperanza de salir de allí y de poder ver alguna vez a sus familiares y amigos, se alegraban de ver a Harris, se unían a su comitiva y hasta lo bendecían. Según Harris, se juntaron unas veinte personas, entre ellas una mujer con un niño, que llevaba ya toda la mañana en el laberinto y que ahora se aferró a su mano para no perderse por casualidad. Harris torcía siempre hacia la derecha, pero el camino resultó ser muy largo y su pariente le dijo que, por lo visto, el laberinto era muy grande.

-¡Sí, uno de los más grandes de Europa! -le aseguró Harris.

-Me parece -prosiguió el pariente- que ya hemos recorrido dos buenas millas.

Harris empezaba a sentirse preocupado, pero siguió animoso hasta que se toparon con un trozo de galleta que estaba tirada en el suelo. Su pariente juró que había visto aquel trozo de galleta hacía siete minutos.

-¡No puede ser! -replicó Harris. Pero la señora que llevaba al niño aseguró que sí podía ser, porque a ella misma se le había caído aquel trozo antes de encontrarse con Harris. Y después añadió que mejor hubiera sido no encontrarse con él, porque suponía que era un embustero. Esto hizo que Harris se indignara: sacó el plano y explicó su teoría.

-El plano vendría muy bien -le indicó uno de sus compañeros de viaje- si supiéramos dónde nos encontramos.

Harris no lo sabía y dijo que, a su parecer, lo mejor sería volver a la entrada y comenzar de nuevo. La última parte de su proposición no despertó gran entusiasmo, pero la primera - referente a volver a la entrada- fue aceptada por unanimidad y todos le siguieron en su marcha atrás. Al cabo de diez minutos se encontró el grupo en el centro del laberinto.

Harris quiso decir que aquí era a donde él se había dirigido, pero como vio que la gente estaba de mal humor, prefirió aparentar que había llegado allí casualmente.

De todas maneras había que ir a alguna parte. Ahora ya sabían donde estaban y, como es natural, echaron una ojeada al plano. Al parecer no era difícil salir de allí y, por tercera vez, emprendieron la marcha.

Tres minutos más tarde estaban... de nuevo en el centro del laberinto.

Después de esto ya no había manera de deshacerse de él. Cualquiera que fuera la dirección que tomaran, volvían inevitablemente al centro. Esto se repetía con tal regularidad, que algunos decidieron quedarse allí y esperar a que los demás hicieran su recorrido siguiente y retornaran a donde ellos estaban. Harris sacó el plano, pero, al verlo, la multitud se puso furiosa.

Por fin se desconcertaron y empezaron a llamar al guarda. Este apareció, se subió a una escalera de mano y les gritó hacia donde tenían que ir.

Sin embargo, estaban ya tan atontados, que no consiguieron entender nada. Entonces, el guarda les gritó que no se movieran de donde estaban y que le esperasen. Ellos se apiñaron dispuestos a esperar, y él bajó de la escalera y se dirigió hacia ellos.

El guarda era joven y no tenía experiencia; una vez dentro del laberinto no consiguió encontrarlos, todos sus intentos de llegar a ellos fracasaron, y por fin, él mismo se perdió.

De vez en cuando ellos le veían aparecer y desaparecer, ya en un punto ya en otro, al otro lado del seto vivo, y él, al distinguirlos, corría hacia ellos, pero al cabo de un minuto volvía a aparecer en el mismo sitio y les preguntaba dónde se habían metido.



Figura 12

Y no tuvieron más remedio que esperar hasta que vino en su ayuda uno de los guardas antiguos. »

-A pesar de todo dije yo, después de terminar la lectura, fueron torpes, porque, teniendo el plano en la mano, no encontrar el camino...

-Y ¿tú crees que lo encontrarías enseguida?

-¿Por el plano? ¡Cómo no!

-Pues, espera. Yo creo que tengo el plano de ese laberinto -dijo mi hermano y empezó a buscar en su estante.

-Pero, ¿este laberinto existe en realidad?

-¿Hampton Court? Claro que existe. Está cerca de Londres. Hace ya más de doscientos años que lo hicieron. Aquí está el plano. Resulta que no es tan grande: tiene en total 1000 metros cuadrados.

Mi hermano abrió el libro en que estaba representado el pequeño plano.

-Figúrate que tú estás aquí, en la plazoleta central del laberinto, y que quieres salir fuera.

¿Qué camino tomarías para ello? Sácale punta a una cerilla e indica con ella la ruta a seguir.

Puse la punta de la cerilla en el centro del laberinto y la deslicé resueltamente por los sinuosos pasadizos del plano. Pero la cosa resultó ser más difícil que lo que yo pensaba.

Después de dar varias vueltas, me encontré de nuevo en el pradejón central, lo mismo que los héroes de Jerome de que me había reído.

-Lo ves: el plano tampoco ayuda mucho. Pero las ratas resuelven el problema sin necesidad de plano.

-¿Las ratas? ¿Qué ratas?

-Las ratas de que habla este libro. ¿Tú crees que ésta es una obra sobre jardinería? No, es un tratado acerca de las facultades mentales de los animales.

Para comprobar la inteligencia de las ratas, los científicos hacen, de escayola, una especie de laberinto y meten en él a los animales que desean experimentar. Según dice este libro, las ratas encontraban el camino en el laberinto de Hampton Court, de escayola, en media hora, es decir, más deprisa que la gente de que habla Jerome.

-A juzgar por el plano, el laberinto no parece complicado. No piensas que es tan traicionero.

-Existe una regla muy sencilla, conociendo la cual uno entra en un laberinto cualquiera sin temor a no encontrar el camino para volver a salir.

-¿Qué regla es esa?

-Hay que ir por el laberinto pasando por su pared la mano derecha -o la izquierda, es igual-, pero la misma durante todo el tiempo.

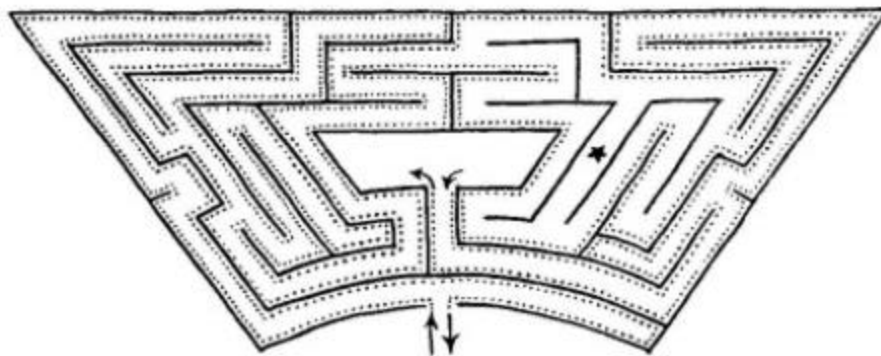


Figura 13

-¿Y eso es todo?

-Sí. Puedes probar esta regla en la práctica dándote mentalmente un paseo por el plano. Yo puse en caminó mi cerilla, teniendo en cuenta la regla antedicha, y, en efecto, bien pronto llegué desde la entrada exterior hasta el centro del laberinto y desde aquí hasta la salida al exterior.

-¡Magnífica regla!

-No del todo -repuso mi hermano-. Esta regla es buena para no perderse en el laberinto, pero no sirve para recorrer todos sus caminos sin excepción.

-Sin embargo, yo he pasado ahora por todos los paseos del plano sin omitir ninguno.

-Estás equivocado: si hubieras marcado con una raya punteada el camino recorrido, hubieses descubierto que en uno de los paseos no has estado.

-¿En cuál?

-En este que señalo con una estrellita en el plano (figura 13). Aquí no has estado. En otros laberintos esta regla te llevará a dejar de lado grandes partes de los mismos, de manera, que aunque saldrás de ellos felizmente, no los verás en su totalidad.

-Pero, ¿existen muchos laberintos diferentes?

-Sí, muchos. Ahora sólo se hacen en jardines y parques: en ellos yerras al aire libre entre altos muros de setos vivos. Pero en la antigüedad hacían laberintos dentro de vastos edificios y en subterráneos. Se hacía esto con el cruel objeto de condenar a los desgraciados que allí metían a errar desesperados por una ingeniosa red de corredores, pasadizos y salas, hasta morir de hambre. Así era, por ejemplo, el laberinto legendario de la isla de Creta, construido, según la tradición, por orden del rey Minos. Sus pasadizos estaban tan

embrollados, que su propio constructor, Dédalo, al parecer, no pudo encontrar la salida. El poeta romano Ovidio describe así este edificio:

Al hacer la casa laberinto, con ciegos muros y techo, Dédalo -genio constructor, célebre entonces erigió un edificio, de peculiaridades exento, Cuyos largos corredores curvos, formando red, En sentidos diversos se extendían para burlar ojos escrutadores.

Y más adelante dice que... Caminos sin cuento hizo Dédalo en la casa dicha, Tantos, que difícil le era a él mismo hallar la salida.

Otros laberintos de la antigüedad -prosiguió mi hermano- tenían por objeto guardar las sepulturas de los reyes, protegiéndolos contra los ladrones. El sepulcro se hallaba en el centro del laberinto, de modo que si el avaricioso buscador de tesoros enterrados conseguía llegar hasta ellos, no podía encontrar la salida: la tumba del rey se convertía también en su tumba.

-Y ¿por qué no aplicaban la regla de que tú me has hablado antes?

-En primer lugar, porque, al parecer, en la antigüedad nadie sabía esa regla. Y, en segundo; porque, como ya te he explicado, no da siempre la posibilidad de recorrer todos los rincones del laberinto. Este puede construirse de manera, que el que utilice esta regla no pase por el sitio del laberinto en que se encuentran los tesoros ocultos.

-¿Y se puede construir un laberinto del que sea imposible salir? Está claro que el que entre en él aplicando tu regla, podrá salir. Pero, ¿y si se mete dentro a alguien y se deja que se pierda?

-Los antiguos pensaban que, cuando los caminos del laberinto estaban suficientemente embrollados, era imposible salir de él. Pero esto no es así. Puede demostrarse con certeza matemática que es imposible construir laberintos de los cuales no se pueda salir. Es más: no sólo se puede hallar la salida de cualquier laberinto, sino también recorrer absolutamente todos sus rincones. Lo único que hace falta es acometer la empresa siguiendo un sistema riguroso y tomando ciertas medidas de seguridad. Hace 200 años, el botánico francés Tournefort se atrevió a visitar, en la isla de Creta, una cueva acerca de la cual existía la tradición de que, debido a sus innumerables pasadizos, era un laberinto sin salida. Cuevas como ésta hay varias en Creta y tal vez fueran ellas las que dieron origen en la antigüedad a la leyenda sobre el laberinto del rey Minos. ¿Qué hizo el botánico francés para no perderse? He aquí lo que acerca de esto cuenta el matemático Lucas, compatriota suyo.

Mi hermano cogió del estante un libro viejo titulado «Distracciones Matemáticas» y leyó en alta voz el siguiente pasaje, que yo copié luego:

«Después de deambular algún tiempo con nuestros compañeros por toda una red de corredores subterráneos, llegamos a una galería larga y ancha que conducía a una amplia sala en la profundidad de laberinto. En media hora, dijo Tournefort, hemos dado 1460 pasos por esta galería, sin desviarnos a la derecha ni a la izquierda... A ambos lados de ella hay tantos corredores, que si no tomamos las precauciones necesarias nos perderemos inevitablemente; y como teníamos muchísimas ganas de salir de aquel laberinto, nos preocupamos de asegurar el camino de retorno.

En primer lugar, dejamos a uno de nuestros guías a la entrada de la cueva y le ordenamos que, si no regresábamos antes de que fuera de noche, reuniera gente de las aldeas vecinas para acudir en socorro nuestro. En segundo lugar, cada uno de nosotros llevaba una antorcha encendida. En tercero, en todos los recodos que pensábamos serían difíciles de encontrar después, fijábamos en la pared derecha un papel con un número. Y, en cuarto, uno de nuestros guías iba dejando por el lado izquierdo hacecillos de endrina, preparados de antemano, y otro guía rociaba el camino con paja cortada que llevaba en un saco».

Todas estas engorrosas precauciones -dijo mi hermano, cuando terminó la lectura del trozo- no son tan necesarias como pueden parecerte. En la época de Tournefort no se podía proceder de otro modo, porque entonces aún no había sido resuelto el problema de los laberintos. Pero ahora ya se han elaborado unas reglas menos embarazosas para explorar los laberintos, y tan seguras como las medidas tomadas por el botánico francés.

-¿Y tú conoces esas reglas?



-Sí. No son difíciles. La primera regla consiste en que, una vez que se entre en el laberinto, se va por cualquier camino hasta que se llega a un corredor sin salida o a una encrucijada. Si se llega a un corredor sin salida, se vuelve atrás y a su entrada se ponen dos piedrecitas, que indicarán que dicho corredor ha sido recorrido dos veces. Si se llega a una encrucijada, se seguirá adelante por cualquiera de los corredores, señalando cada vez con una piedrecita el camino por el cual se llegó y el camino por el que se prosigue. Esta es la primera regla. La segunda dice lo siguiente: si por un nuevo corredor se llega a un cruce en el que ya se estuvo antes (lo que se nota por las piedrecitas), inmediatamente hay que retornar por dicho corredor y poner a su entrada dos piedrecitas. Finalmente, la tercera regla requiere que, si se llega a una encrucijada, ya visitada, por un corredor por el cual ya se ha pasado una vez, hay que señalar este camino, con una segunda piedrecita y seguir por uno de los corredores aún no recorridos ninguna vez. Si tal corredor no existe, se opta por uno a cuya entrada sólo haya una piedrecita (es decir, por un corredor recorrido una sola vez). Observando estas reglas pueden recorrerse dos veces, una en un sentido y otra en el opuesto, todos los corredores del laberinto, sin dejar ni un solo rincón, y salir de él felizmente. Yo tengo varios planos de laberintos que recorté en su tiempo de revistas ilustradas (figuras 14, 15 y 16).

Si quieres puedes intentar recorrerlos. Espero que, después de lo que ya sabes, no corras peligro de perderte en ellos.

Y si tienes bastante paciencia, puedes hacer en el patio de nuestra casa un laberinto semejante, por ejemplo, al de Hampton Court, del que escribía Jerome. Para ello puedes contar con la ayuda de tus amigos y con la nieve que hay allí.



Figura 14

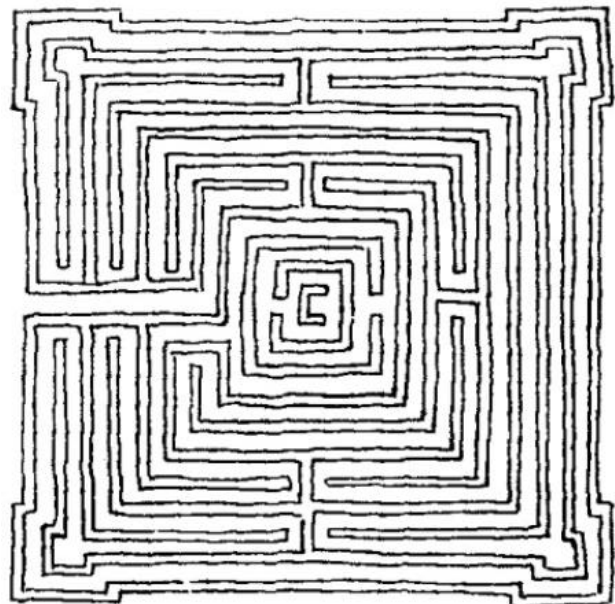


Figura 15



*Figura 16*