

Capítulo 12

PROBLEMAS ACERCA DE RELOJES

1. La cifra seis

Pregúntele a cualquiera de sus conocidos mayores cuánto tiempo hace que tiene reloj. Supongamos que hace ya 15 años que lo tiene. Prosiga esta conversación aproximadamente así:

-¿Y cuántas veces al día mira usted su reloj?

-Unas veinte, poco más o menos -es la respuesta que sigue.

-Esto quiere decir que durante un año lo mira usted 6000 veces por lo menos, y en 15 años habrá visto su esfera unas 6000 X 15 veces, o sea, cerca de 100 mil veces. Supongo que si ha visto usted un objeto 100 mil veces lo conocerá y recordará perfectamente.

-Sin duda.

-Entonces conocerá magníficamente la esfera de su reloj y no le costará trabajo dibujar de memoria cómo está representada en ella la cifra seis.

Y ofrézcale a su interlocutor papel y lápiz.

Él hará lo que usted le pide, pero... en la mayoría de los casos la cifra que dibuje no será como la representada en su reloj.

¿Por qué?

Responda a esta pregunta sin mirar al reloj. Muestre cómo dibujó su conocido la cifra seis y cómo la debía haber representado.

2. Los tres relojes

En casa hay tres relojes. El 1 de enero todos ellos indicaban la hora correctamente. Pero sólo marchaba bien el primer reloj; el segundo se atrasaba 1 minuto al día, y el tercero se adelantaba 1 minuto al día. Si los relojes continúan marchando así; ¿al cabo de cuánto tiempo volverán los tres a marcar la hora exacta?

3. Los dos relojes

Ayer comprobé mi reloj de pared y mi despertador y puse sus manecillas en punto. El reloj de pared se atrasa 2 minutos por hora, y el despertador se adelanta 1 minuto también por hora.

Hoy se pararon los dos relojes: se les acabó la cuerda. En la esfera del reloj de pared las manecillas marcan las 7 en punto, y en la del despertador, las 8.

¿A qué hora comprobé ayer los relojes?

4. ¿Qué hora es?

-¿Adónde va tan deprisa?

-Al tren de las seis. ¿Cuántos minutos quedan hasta su salida? -Hace 50 minutos quedaban 4 veces más minutos después de las tres. ¿Qué significa esta rara respuesta?

¿Qué hora era?

5. ¿Cuándo se encuentran las manecillas?

A las 12 las manecillas del reloj están una sobre otra. Pero usted se habrá dado cuenta, probablemente, de que éste no es el único instante en que las manecillas se encuentran: durante el día alcanza la una a la otra varias veces.

¿Puede usted decir todos aquellos instantes en que esto ocurre?

6. ¿Cuándo están las manecillas dirigidas en sentidos opuestos?

A las 6 sucede lo contrario que a las 12, las manecillas están dirigidas en sentidos opuestos. Pero, ¿ocurre esto sólo a las 6, o hay otros instantes en que las manecillas se sitúan también así?

7. A ambos lados de las seis

Yo miré el reloj y vi que sus dos manecillas estaban a ambos lados de la cifra 6 y a distancias iguales. ¿A qué hora fue esto?

8. ¿A qué hora?

¿A qué hora adelanta el minuterio al horario en la misma distancia exactamente que éste se halla por delante de la cifra 12 en la esfera? ¿Puede ocurrir esto en varios instantes durante el día, o no ocurre nunca?

9. Al contrario

Si ha seguido con atención la marcha de un reloj es posible que haya observado precisamente una posición de las manecillas contraria a la que acabamos de mencionar, es decir, la posición en que el horario adelanta al minuterio en tanto como este último ha pasado del número 12.

¿Cuándo ocurre esto?

10. Tres y siete

Un reloj da las tres. Mientras suenan las campanadas pasan 3 segundos. ¿Cuánto tiempo será necesario para que este reloj dé las siete?

Por si acaso, prevengo que no se trata de un problema de broma y que no encierra ninguna trampa.

11. El tictac del reloj

Finalmente, haga el pequeño experimento siguiente. Ponga su reloj sobre la mesa, aléjese de él tres o cuatro pasos y escuche su tictac. Si en la habitación reina un silencio suficiente, escuchará usted que su reloj parece que marcha con interrupciones: el tictac se oye durante cierto tiempo, luego deja de oírse varios segundos, vuelve otra vez a sonar y así sucesivamente.

¿Cómo se explica esta marcha irregular?

SOLUCIONES**1. La cifra seis**

La mayoría de las personas no avisadas responden a esta pregunta dibujando una de las cifras 6 ó VI.

Esto demuestra que una cosa puede verse 100 mil veces y no conocerse. El secreto está en que, por lo general, en la esfera de los relojes de caballero no figura la cifra seis, porque en su lugar se halla el segundero.

2. Los tres relojes

Al cabo de 720 días. En este tiempo, el segundo reloj se atrasa 720 minutos, es decir, exactamente en 12 horas; el tercer reloj se adelanta igual tiempo. Entonces los tres relojes marcarán lo mismo que el 1° de enero, o sea, la hora exacta.

3. Los dos relojes

El despertador se adelanta 3 minutos por hora con respecto al reloj de pared. Se adelantará una hora, o sea, 60 minutos, al cabo de 20 horas. Pero durante estas 20 horas el despertador se habrá adelantado 20 minutos con relación a la hora exacta. Por lo tanto, las manecillas fueron puestas en punto 19 horas y 20 minutos antes, es decir, a las 11 horas 40 minutos.

4. ¿Qué hora es?

Entre las 3 y las 6 hay 180 minutos. No es difícil comprender que el número de minutos que quedan hasta las seis se halla si $180 - 50$, es decir, 130, se divide en dos partes tales, que una de ellas sea cuatro veces mayor que la otra. Por consiguiente, hay que hallar la quinta parte de 130. Así, pues, eran las seis menos 26 minutos.

En efecto, 50 minutos antes faltaban $26 + 50 = 76$ minutos para las 6, y, por lo tanto, desde las 3 habían pasado $180 - 76 = 104$ minutos; esta cantidad de minutos es cuatro veces mayor que los minutos que faltan ahora para las seis.

5. ¿Cuándo se encuentran las manecillas?

Comencemos a observar el movimiento de las manecillas a las 12. En este instante las dos manecillas están una sobre otra. Como el horario se mueve 12 veces más despacio que el minuterio (puesto que describe una circunferencia completa en 12 horas, mientras que el minuterio lo hace en 1 hora), durante la hora próxima no pueden encontrarse. Pero pasó una hora; el horario señala la cifra 1, después de recorrer $1/12$ parte de la circunferencia completa; el minuterio ha dado una vuelta completa y se encuentra de nuevo en las 12, a $1/12$ parte de circunferencia del horario. Ahora las condiciones de la competición son distintas que las de antes: el horario se mueve más despacio que el minuterio, pero va delante y el minuterio tiene que darle alcance. Si la competición durara una hora entera, el minuterio tendría tiempo de recorrer una circunferencia completa, mientras que el horario sólo recorrería $1/12$ parte de la circunferencia, es decir, el minuterio habría recorrido $11/12$ de circunferencia más que aquél. Pero, para alcanzar al horario, el minuterio sólo tiene que recorrer, más que aquél, la $1/12$ parte de circunferencia que los separa.

Para esto no hace falta una hora entera, sino tantas veces menos como $1/12$ es menor que $11/12$, es decir, 11 veces menos. Esto quiere decir que las manecillas se encuentran al cabo de $1/11$ de hora, o sea, al cabo de $60/11 = 5 \frac{5}{11}$ de minuto.

Así, pues, el encuentro de las manecillas ocurre $55/11$ de minuto después de pasar una hora, es decir, a la 1 y $5 \frac{5}{11}$ de minuto.

¿Cuándo se produce el encuentro siguiente?

No es difícil darse cuenta de que esto ocurrirá al cabo de 1 hora y $5 \frac{5}{11}$ de minuto, es decir, a las 2 y $10 \frac{10}{11}$ de minuto. El otro, 1 hora y $55/11$ de minutos después, o sea, a las 3 y $16 \frac{4}{11}$ de minuto, y así sucesivamente. En total habrá 11 encuentros; el undécimo llegará al cabo de $11/11 \times 11 = 12$ horas de producirse el primero, es decir, a las 12; en otras palabras, coincidirá con el primer encuentro, y, en adelante, los encuentros se repiten en los mismos instantes que antes.

He aquí los instantes en que las manecillas se encuentran:

1er encuentro	a la	1 y	$5\frac{5}{11}$	de minuto
2º	»	a las	$2\frac{10}{11}$	»
3er	»	»	$3\frac{4}{11}$	»
4º	»	»	$4\frac{9}{11}$	»
5º	»	»	$5\frac{3}{11}$	»
6º	»	»	$6\frac{8}{11}$	»
7º	»	»	$7\frac{2}{11}$	»
8º	»	»	$8\frac{7}{11}$	»
9º	»	»	$9\frac{1}{11}$	»
10º	»	»	$10\frac{6}{11}$	»
11º	»	»	12.	»

6. ¿Cuándo están las manecillas dirigidas en sentidos opuestos?

Este problema se resuelve de un modo muy parecido al anterior. Empecemos otra vez en las 12, cuando las dos manecillas coinciden. Hay que calcular cuánto tiempo será necesario para que el minuterero adelante al horario en media circunferencia exactamente; en este caso las manecillas estarán dirigidas precisamente en sentidos opuestos. Ya sabemos (véase el problema precedente) que en una hora entera el minuterero adelanta al horario en $11/12$ de circunferencia completa; para adelantarlo solamente en $1/2$ de circunferencia necesitará menos de una hora -tantas veces menos como $1/2$ es menor que $11/12$, es decir, necesitará nada más que $6/11$ de hora. Esto quiere decir que, después de las 12, las manecillas estarán por primera vez dirigidas en sentidos opuestos al cabo de $6/11$ de hora, o sea, de $32\frac{8}{11}$ de minuto. Mire el reloj a las 12 y $32\frac{8}{11}$ de minuto y verá que las manecillas tienen sentidos opuestos.

¿Es éste el único instante en que las manecillas se sitúan así? Está claro que no. Las manecillas ocupan posiciones semejantes a ésta $32\frac{8}{11}$ de minuto después de cada encuentro. Pero ya sabemos que durante 12 horas las manecillas se encuentran 11 veces; por lo tanto, también se situarán en sentidos opuestos 11 veces en 12 horas. Hallar estos instantes no es difícil:

$$\begin{aligned}
&\text{Las } 12 + 32 \frac{8}{11} \text{ de min} = \text{las } 12 \text{ y } 32 \frac{8}{11} \text{ de min,} \\
&\text{la } 1 \text{ y } 5 \frac{5}{11} \text{ de min} + 32 \frac{8}{11} \text{ de min} = \text{la } 1 \text{ y } 38 \frac{2}{11} \text{ de min,} \\
&\text{las } 2 \text{ y } 10 \frac{10}{11} \text{ de min} + 32 \frac{8}{11} \text{ de min} = \text{las } 2 \text{ y } 43 \frac{7}{11} \text{ de min,} \\
&\text{las } 3 \text{ y } 16 \frac{4}{11} \text{ de min} + 32 \frac{8}{11} \text{ de min} = \\
&= \text{las } 3 \text{ y } 49 \frac{1}{11} \text{ de min, etc.}
\end{aligned}$$

Doy a usted la posibilidad de que calcule los demás instantes.

7. A ambos lados de las seis

Este problema se resuelve lo mismo que el anterior. Supongamos que las dos manecillas estaban en las 12 y que, después, el horario se separó de las 12 en una parte determinada de vuelta completa que llamaremos x . Durante este intervalo, el minuterero habrá tenido tiempo de girar en $12x$. Si el tiempo transcurrido no es mayor que una hora, para satisfacer la condición de nuestro problema es preciso que el minuterero diste del fin de una circunferencia completa tanto como el horario haya tenido tiempo de separarse de su principio; en otras palabras:

$$1 - 12x = x.$$

De aquí se deduce que $1 = 13x$ (porque $13x - 12x = x$). Por lo tanto, $x = 1/13$ parte de la vuelta completa. Esta fracción de vuelta la recorre el horario en $12/13$ de hora, es decir, cuando marca las 12 y $55 \frac{5}{13}$ de min. Durante este tiempo, el minuterero habrá recorrido 12 veces más, es decir, $12/13$ de vuelta completa; como ve, las dos manecillas están a la misma distancia de las 12 y, por consiguiente, lo mismo de separadas de las 6 por ambos lados.

Hemos hallado una de las posiciones de las manecillas, la que se produce durante la primera hora. Durante la segunda hora vuelve a presentarse en posición semejante; la encontramos, razonando como en el caso precedente, por medio de la igualdad

$$1 - (12x - 1) = x \text{ ó } 2 - 12x = x$$

de donde $2 = 13x$ (porque $13x - 12x = x$) y, por consiguiente, $x = 2/13$ de vuelta completa. Las manecillas ocuparán esta posición a la 1 y $11 \frac{11}{13}$ de hora, o sea, a la 1 y $50 \frac{10}{13}$ de min.

Por tercera vez, las manecillas se hallarán en la posición conveniente cuando el horario se aparte de las 12 en $3/13$ de circunferencia completa, es decir, a las 2 y $10 \frac{10}{13}$ de hora, y así sucesivamente. En total habrá 11 posiciones, con la particularidad de que después de las seis las manecillas cambiarán entre sí sus puestos: el horario ocupará los puntos en que estuvo antes el minuterero y éste, los que ocupó antes el horario.

8. ¿A qué hora?

Si se comienzan a observar las manecillas a las 12 en punto, durante la primera hora no se nota la disposición buscada. ¿Por qué? Porque el horario recorre $1/12$ parte de lo que recorre el minuterero y, por lo tanto, queda retrasado con respecto a él mucho más de lo necesario

para la disposición que se busca. Cualquiera que sea el ángulo α que se aparte de las 12 el minuterio, el horario girará $1/12$ parte de este ángulo, y no $1/2$, como se requiere. Pero pasó una hora; ahora el minuterio está en las 12 y el horario, en la 1, es decir, $1/12$ partes de vuelta delante del minuterio. Veamos si esta disposición de las manecillas puede producirse durante la segunda hora. Supongamos que este instante se produjo cuando el horario se apartó de las 12 en una fracción de vuelta que llamaremos x . Durante este tiempo el minuterio habrá recorrido un espacio 12 veces mayor, es decir, $12x$. Si de aquí se resta una vuelta completa, el resto $12x - 1$ deberá ser el doble que x , o sea, ser igual a $2x$. Vemos, por consiguiente, que $12x - 1 = 2x$, de donde se deduce que una vuelta completa es igual a $10x$ (en efecto, $12x - 10x = 2x$). Pero si $10x$ es igual a una vuelta completa, $1x = 1/10$ parte de vuelta. Y ésta es la solución del problema: el horario se separó de la cifra 12 en $1/10$ parte de vuelta completa, para lo que se requieren $12/10$ partes de hora o una hora y 12 minutos. Al ocurrir esto, el minuterio se encontrará a doble distancia de las 12, es decir, a la distancia de parte de vuelta, lo que responde a $60/5 = 12$ minutos, como debía ser. Hemos encontrado una solución del problema. Pero tiene otras: durante las 12 horas, las manecillas se encuentran en posiciones semejantes no una vez, sino varias. Intentaremos hallar las demás soluciones.

Para esto esperaremos a que sean las 2; el minuterio estará entonces en las 12 y el horario en las 2. Razonando como antes, obtenemos la igualdad:

$$12x - 2 = 2x,$$

de donde dos vueltas completas son iguales a $10x$ y, por lo tanto, $x = 1/5$ parte de vuelta entera. Esto corresponde al instante $12/5 = 2$ horas y 24 minutos.

Los demás instantes puede usted calcularlos ya fácilmente. Entonces sabrá que las manecillas se sitúan de acuerdo con la condición del problema en los 10 instantes siguientes:

a la 1 y 12 min	a las 7 y 12 min
a las 2 y 24 »	a » 8 y 24 »
a » 3 y 36 »	a » 9 y 36 »
a » 4 y 48 »	a » 10 y 48 »
a » 6	a » 12.

Las respuestas: «a las 6» y a las < 12» pueden parecer erróneas, pero sólo a primera vista. En efecto: a las 6, el horario está en las 6 y el minuterio en las 12, es decir, exactamente el doble de lejos. A las 12, el horario se halla a la distancia «cero» de las 12, y el minuterio, si lo desea, a «dos ceros» de distancia (porque cero doble es lo mismo que cero); por consiguiente, también este caso satisface, en esencia, la condición del problema.

9. Al contrario

Después de las explicaciones precedentes, ya no es difícil resolver este problema. Es fácil comprender, razonando como antes que la disposición que se requiere de las manecillas se dará por primera vez en el instante definido por la igualdad

$$12x - 1 = x/2$$

de donde $1 = 11x/2$ ó $x = 2/23$ partes de una vuelta completa, o sea, al cabo de $1^{1/23}$ horas, después de las 12. Es decir, a la 1 y $21^{4/23}$ de minuto estarán las manecillas dispuestas como se requiere. Efectivamente, el minuterio debe estar en el punto medio entre las 12 y la $1^{1/23}$, o sea, en las $12/23$ de hora, lo que constituye precisamente $1/23$ de vuelta completa (y el horario recorrerá $2/23$ de vuelta completa).

Por segunda vez, las manecillas se situarán como es debido en el instante definido por la igualdad:

$$12x - 2 = x/2,$$

de donde $2 = 11\frac{1}{2} * x$, y $x = \frac{4}{23}$; el instante buscado será, pues, el de las 2 y $5\frac{5}{23}$ de minuto.

El tercer instante, las 3 y $7\frac{19}{23}$ de minuto, etc.

10. Tres y siete

Generalmente responden: «7 segundos». Pero, como ahora veremos, esta respuesta es falsa.

Cuando el reloj da las tres, notamos dos intervalos:

- 1) entre la primera y la segunda campanada;
- 2) entre la segunda y la tercera campanada.

Ambos intervalos duran 3 segundos; es decir, cada uno de ellos dura la mitad, o sea, $1\frac{1}{2}$ segundos.

En cambio, cuando el reloj da las siete, el número de estos intervalos es seis. Y seis veces por $1\frac{1}{2}$ segundos son 9 segundos. Por consiguiente, el reloj «da las siete» (es decir, da siete campanadas) en 9 segundos.

11. El tictac del reloj

Los intervalos incomprensibles en el tictac del reloj se deben simplemente al cansancio del oído. Nuestro oído, cuando se cansa, se debilita durante unos segundos, y en estos intervalos no oímos el tictac. Al cabo de un corto espacio de tiempo pasa el cansancio y se recupera la agudeza inicial, con lo que volvemos a escuchar la marcha del reloj. Luego se produce otra vez el cansancio y así sucesivamente.