

## 0.1 Valores propios de matrices tridiagonales simétricas

Sea  $T$  una matriz tridiagonal simétrica. En lo que sigue en esta sección, **se supone que  $T$  es tridiagonal simétrica**.

La matriz  $T$  puede ser el resultado del proceso de tridiagonalización de Householder o de Givens.

La matriz  $T$  se llama **no reducida** si todos los elementos subdiagonales (y los superdiagonales) son no nulos. Una matriz es reducida si algún elemento subdiagonal es nulo.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$T$  siempre se puede expresar como una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque es de tamaño  $1 \times 1$  o de mayor tamaño pero tridiagonal no reducido.

En el primer ejemplo hay un solo bloque, en el segundo hay dos. En el tercer ejemplo hay tres bloques, uno de ellos es  $1 \times 1$ .

Para encontrar los valores propios de  $T$  basta con encontrar los de cada bloque tridiagonal simétrico no reducido, agregando los bloques  $1 \times 1$  que son valores propios de  $T$ .

El objetivo, a partir de ahora, es encontrar los valores propios de  $T$  no reducida. Sea  $T = QR$  la factorización QR de  $A$  y sea  $T^+ = RQ$

$$\begin{aligned} Q^T QR &= Q^T T \\ R &= Q^T T \\ T^+ &= RQ = Q^T T Q. \end{aligned}$$

Luego  $T^+$  es simétrica y semejante a  $T$ . Además se puede demostrar que también es tridiagonal.

**Ejemplo.**

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -3.6055513 & -4.9923018 & -4.1602515 & 0 \\ 0 & -5.0076864 & -5.8371805 & -6.9892556 \\ 0 & 0 & -7.6563459 & -7.4712474 \\ 0 & 0 & 0 & 2.8863072 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -0.5547002 & -0.0460830 & 0.3365427 & 0.7595545 \\ -0.8320503 & 0.0307220 & -0.2243618 & -0.5063697 \\ 0 & -0.9984651 & -0.0224362 & -0.0506370 \\ 0 & 0 & -0.9142743 & 0.4050957 \end{pmatrix}$$

$$T^+ = \begin{pmatrix} 6.1538462 & 4.1666469 & 0 & 0 \\ 4.1666469 & 5.6743747 & 7.644594 & 0 \\ 0 & 7.644594 & 7.0025484 & -2.6388764 \\ 0 & 0 & -2.6388764 & 1.1692308 \end{pmatrix}$$

Un proceso, un poco lento, para hallar los valores propios de  $T$ , consiste en hacer  $T = T^+$  y repetir varias veces. Se puede demostrar que la matriz que se va obteniendo tiende a ser reducida. Dicho en palabras populares, la tridiagonal se va adelgazando.

**repetir**

$QR = T$  factorización QR de  $T$

$T = RQ$

**fin-repetir**

**Ejemplo.** Aplicar el proceso anterior hasta que  $T$  sea reducida. En este ejemplo se supone que  $T$  es reducida cuando para algún elemento subdiagonal  $|t_{i+1,i}| \leq 10^{-10}$ .

T =

2	3	0	0
3	4	5	0
0	5	6	7
0	0	7	8

k = 1

T+ =

9.8718663	-4.486006	0	0
-4.486006	10.134151	-4.5625729	0
0	-4.5625729	-1.1770851	-0.7764250
0	0	-0.7764250	1.1710681

k = 2

T+ =

13.296028	-3.5861468	0	0
-3.5861468	8.2428763	1.7266634	0
0	1.7266634	-2.7961816	0.3062809
0	0	0.3062809	1.2572771

k = 10

T+ =

15.191934	-0.0059687	0	0
-0.0059687	6.6303783	0.0035727	0
0	0.0035727	-3.100073	0.0002528
0	0	0.0002528	1.2777606

k = 20

T+ =

15.191938	-0.0000015	0	0
-0.0000015	6.6303755	0.0000018	0
0	0.0000018	-3.1000743	3.577E-08

0                    0                    3.577E-08           1.2777606

k = 27; matriz reducida:

T+ =  
 15.191938    -4.514E-09    0            0  
 -4.514E-09    6.6303755    -8.713E-09    0  
 0            -8.713E-09    -3.1000743    -7.230E-11  
 0            0            -7.229E-11    1.2777606

Denotemos por  $\text{espec}(A)$  el conjunto de valores propios de  $A$ . Cuando se hace un desplazamiento en los elementos diagonales de una matriz, los valores propios quedan desplazados igualmente, o sea,

$$\lambda \in \text{espec}(A) \quad \text{ssi} \quad \lambda - s \in \text{espec}(A - sI).$$

Hacer un desplazamiento adecuado en  $T$  puede acelerar notablemente la convergencia.

**Ejemplo.** Aplicar el mismo proceso a  $T - sI$ , con  $s = 1$ , hasta que para algún elemento  $|t_{i+1,i}| \leq 10^{-10}$ .

T =  
 2      3      0      0  
 3      4      5      0  
 0      5      6      7  
 0      0      7      8

T - s I =  
 1      3      0      0  
 3      3      5      0  
 0      5      5      7  
 0      0      7      7

k = 9, matriz reducida:

T+ =  
 14.191935    -0.0052796    0            0

-0.0052796	5.5882374	0.6389663	0
0	0.6389663	-4.057933	-8.844E-12
0	0	-8.844E-12	0.2777606

T + s I

15.191935	-0.0052796	0	0
-0.0052796	6.5882374	0.6389663	0
0	0.6389663	-3.057933	-8.844E-12
0	0	-8.844E-12	1.2777606

Aunque hay varias maneras de calcular desplazamientos, uno de los más utilizados es el desplazamiento de Wilkinson

$$\begin{aligned}
 d &= t_{n-1,n-1} - t_{nn} \\
 \mu &= t_{nn} + d - \operatorname{signo}(d) \sqrt{d^2 + t_{n,n-1}^2} \\
 &= t_{nn} - \frac{t_{n,n-1}^2}{d + \operatorname{signo}(d) \sqrt{d^2 + t_{n,n-1}^2}}
 \end{aligned}$$

Para una matriz  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tridiagonal, simétrica y no reducida, el proceso que se aplica es el siguiente:

```

mientras T sea no reducida
  cálculo de  $\mu$ 
   $T = T - \mu I$ 
   $QR = T$  factorización QR de T
   $T = RQ$ 
   $T = T + \mu I$ 
para  $i = 1 : n - 1$ 
  si  $|a_{i+1,i}| \leq \varepsilon (|a_{ii}| + |a_{i+1,i+1}|)$ 
     $a_{i+1,i} = 0$ 
     $a_{i,i+1} = 0$ 
  fin-si
fin-para
fin-mientras

```

En [GoVa96], p. 420, se encuentra una descripción eficiente de la parte principal de este proceso, desde el cálculo de  $\mu$  hasta  $T = T + \mu I$ .

### Ejemplo.

T =

8	3	0	0
3	6	-4	0
0	-4	-10	-6
0	0	-6	0

val propios: -13.50417 1.9698954 5.0194039 10.51487

k = 1

mu = 2.8102497

T -mu I

5.1897503	3	0	0
3	3.1897503	-4	0
0	-4	-12.81025	-6
0	0	-6	-2.8102497

T+ = RQ

7.2885019	2.0988427	0	0
2.0988427	-9.5701241	8.9042431	0
0	8.9042431	-4.1976395	-0.6390185
0	0	-0.6390185	-0.7617370

T + mu I

10.098752	2.0988427	0	0
2.0988427	-6.7598744	8.9042431	0
0	8.9042431	-1.3873898	-0.6390185
0	0	-0.6390185	2.0485127

k = 2

mu = 2.1635102

T -mu I

7.9352413	2.0988427	0	0
2.0988427	-8.9233846	8.9042431	0

0	8.9042431	-3.5509	-0.6390185
0	0	-0.6390185	-0.1149975

T+ = RQ

7.8706324	-3.26714	0	0
-3.26714	-14.885642	-2.4468061	0
0	-2.4468061	2.5541744	0.0357613
0	0	0.0357613	-0.1932052

T + mu I

10.034143	-3.26714	0	0
-3.26714	-12.722132	-2.4468061	0
0	-2.4468061	4.7176845	0.0357613
0	0	0.0357613	1.970305

k = 3

mu = 1.9698396

T -mu I

8.064303	-3.26714	0	0
-3.26714	-14.691972	-2.4468061	0
0	-2.4468061	2.7478449	0.0357613
0	0	0.0357613	0.0004654

T+ = RQ

7.1298463	5.6488809	0	0
5.6488809	-14.048752	0.5009906	0
0	0.5009906	3.0394919	0.0000006
0	0	0.0000006	0.0000557

T + mu I

9.0996859	5.6488809	0	0
5.6488809	-12.078913	0.5009906	0
0	0.5009906	5.0093315	0.0000006
0	0	0.0000006	1.9698954

k = 4

$$\mu = 1.9698954$$

$$T - \mu I$$

7.1297905	5.6488809	0	0
5.6488809	-14.048808	0.5009906	0
0	0.5009906	3.0394362	0.0000006
0	0	0.0000006	1.379E-13

$$T+ = RQ$$

4.4614948	-9.0220625	0	0
-9.0220625	-11.390431	-0.1052167	0
0	-0.1052167	3.049355	-2.585E-17
0	0	1.656E-22	7.811E-16

$$T + \mu I$$

6.4313901	-9.0220625	0	0
-9.0220625	-9.4205358	-0.1052167	0
0	-0.1052167	5.0192503	-2.585E-17
0	0	1.656E-22	1.9698954

$$T \text{ reducida}$$

6.4313901	-9.0220625	0	0
-9.0220625	-9.4205358	-0.1052167	0
0	0.1052167	5.0192503	0
0	0	0	1.9698954

En una matriz simétrica tridiagonal se busca desde la esquina S.E. hacia la esquina N.O., el primer bloque de tamaño superior a uno que sea no reducido. A este bloque se le aplica el procedimiento anterior (hasta que el bloque sea reducido). El proceso general acaba cuando la matriz resultante es diagonal.

#### EJEMPLO COMPLETO

$$A =$$

-2	8	0	0	0	0
8	-2	0	0	0	0
0	0	8	3	0	0



0	0	3	6	-4	0
0	0	0	-4	-10	-6
0	0	0	0	-6	0

i1 i2 : 3 6

T inicial

8	3	0	0
3	6	-4	0
0	-4	-10	-6
0	0	-6	0

mu = 2.810250

T final

10.098752	2.0988427	0	0
2.0988427	-6.7598744	8.9042431	0
0	8.9042431	-1.3873898	-0.6390185
0	0	-0.6390185	2.0485127

i1 i2 : 3 6

T inicial

10.098752	2.0988427	0	0
2.0988427	-6.7598744	8.9042431	0
0	8.9042431	-1.3873898	-0.6390185
0	0	-0.6390185	2.0485127

mu = 2.163510

T final

10.034143	-3.26714	0	0
-3.26714	-12.722132	-2.4468061	0
0	-2.4468061	4.7176845	0.0357613
0	0	0.0357613	1.970305

i1 i2 : 3 6

T inicial

10.034143	-3.26714	0	0
-----------	----------	---	---

-3.26714	-12.722132	-2.4468061	0
0	-2.4468061	4.7176845	0.0357613
0	0	0.0357613	1.970305

mu = 1.969840

T final

9.0996859	5.6488809	0	0
5.6488809	-12.078913	0.5009906	0
0	0.5009906	5.0093315	0.0000006
0	0	0.0000006	1.9698954

i1 i2 : 3 6

T inicial

9.0996859	5.6488809	0	0
5.6488809	-12.078913	0.5009906	0
0	0.5009906	5.0093315	0.0000006
0	0	0.0000006	1.9698954

mu = 1.969895

T final

6.4313901	-9.0220625	0	0
-9.0220625	-9.4205358	-0.1052167	0
0	-0.1052167	5.0192503	8.383E-17
0	0	-1.058E-22	1.9698954

A =

-2	8	0	0	0	0
8	-2	0	0	0	0
0	0	6.4313901	-9.0220625	0	0
0	0	-9.0220625	-9.4205358	-0.1052167	0
0	0	0	-0.1052167	5.0192503	0
0	0	0	0	0	1.9698954

i1 i2 : 3 5

T inicial

6.4313901	-9.0220625	0
-----------	------------	---

```

-9.0220625  -9.4205358  -0.1052167
  0          -0.1052167   5.0192503
mu = 5.020017

```

```

T final
-6.2865541  11.012094   0
 11.012094   3.2972548  -0.0000058
 0          -0.0000058  5.0194039

```

```
i1 i2 : 3 5
```

```

T inicial
-6.2865541  11.012094   0
 11.012094   3.2972548  -0.0000058
 0          -0.0000058  5.0194039
mu = 5.019404

```

```

T final
-12.629095  -4.5002992   0
-4.5002992   9.6397959  2.575E-17
 0           2.079E-17  5.0194039

```

```

A =
-2   8   0   0   0   0
 8  -2   0   0   0   0
 0   0 -12.629095 -4.5002992  0   0
 0   0 -4.5002992  9.6397959  0   0
 0   0  0   0   0  5.0194039
 0   0  0   0   0   0  1.9698954

```

```
i1 i2 : 3 4
```

```

T inicial
-12.629095  -4.5002992
-4.5002992   9.6397959
mu = 10.514870

```

```
T final
```

-13.50417    -2.914E-16  
3.384E-16    10.51487

A =  
-2    8    0    0    0    0  
8    -2    0    0    0    0  
0    0    -13.50417    0    0    0  
0    0    0    10.51487    0    0  
0    0    0    0    5.0194039    0  
0    0    0    0    0    1.9698954

i1 i2 :    1    2

T inicial  
-2    8  
8    -2  
mu = -10.000000

T final  
6    -8.782E-17  
-1.735E-18    -10

A =  
6    0    0    0    0    0  
0    -10    0    0    0    0  
0    0    -13.50417    0    0    0  
0    0    0    10.51487    0    0  
0    0    0    0    5.0194039    0  
0    0    0    0    0    1.9698954