Ejemplos y detalles adicionales del método de Karmarkar

Héctor Manuel Mora Escobar

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Ejemplo. Aplicación del algoritmo de Karmarkar, para un problema en la forma canónica de Karmarkar.

$$
\begin{aligned}
\min\ z = -4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \ \ x_4 & \\
x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 &= 0 \\
2x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 5x_4 &= 0 \\
x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= 1 \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

```
Datos inciales:
c :   -4.0000    4.0000    6.0000    1.0000
A
    1.0000    1.0000   -1.0000   -1.0000
    2.0000    3.0000    0.0000   -5.0000
alfa = 0.900000

k = 1
x  :    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500
ct x = 1.750000
A~
    0.2500    0.2500   -0.2500   -0.2500
    0.5000    0.7500    0.0000   -1.2500
B
    0.2500    0.2500   -0.2500   -0.2500
    0.5000    0.7500    0.0000   -1.2500
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
c~ :   -4.0000    4.0000    6.0000    1.0000
p  :   -0.8413    0.8413   -0.1683    0.1683
u* :    0.4301    0.0699    0.2860    0.2140

k = 2
x  :    0.4301    0.0699    0.2860    0.2140
ct x = 0.488991
A~
    0.4301    0.0699   -0.2860   -0.2140
    0.8603    0.2096    0.0000   -1.0699
B
    0.4301    0.0699   -0.2860   -0.2140
    0.8603    0.2096    0.0000   -1.0699
```

```
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
c~ :   -4.0000    4.0000    6.0000    1.0000
p  :   -0.1699    0.3556   -0.1186   -0.0670
u* :    0.3559    0.0285    0.3239    0.2918

k = 3
x  :    0.4936    0.0064    0.2987    0.2013
ct x = 0.044863
A~
    0.4936    0.0064   -0.2987   -0.2013
    0.9872    0.0192    0.0000   -1.0064
B
    0.4936    0.0064   -0.2987   -0.2013
    0.9872    0.0192    0.0000   -1.0064
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
c~ :   -4.0000    4.0000    6.0000    1.0000
p  :   -0.0116    0.0336   -0.0112   -0.0108
u* :    0.3278    0.0250    0.3252    0.3220

k = 4
x  :    0.4995    0.0005    0.2999    0.2001
ct x = 0.003467
A~
    0.4995    0.0005   -0.2999   -0.2001
    0.9990    0.0015    0.0000   -1.0005
B
    0.4995    0.0005   -0.2999   -0.2001
    0.9990    0.0015    0.0000   -1.0005
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
c~ :   -4.0000    4.0000    6.0000    1.0000
p  :   -0.0009    0.0026   -0.0009   -0.0009
u* :    0.3252    0.0250    0.3250    0.3248

k = 5
x  :    0.5000    0.0000    0.3000    0.2000
ct x = 0.000267
A~
    0.5000    0.0000   -0.3000   -0.2000
    0.9999    0.0001    0.0000   -1.0000
B
    0.5000    0.0000   -0.3000   -0.2000
    0.9999    0.0001    0.0000   -1.0000
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
c~ :   -4.0000    4.0000    6.0000    1.0000
p  :   -0.0001    0.0002   -0.0001   -0.0001
u* :    0.3250    0.0250    0.3250    0.3250
```

```
x  :    0.5000    0.0000    0.3000    0.2000
ct x = 0.000021
```

Adaptación de un problema de OL a la forma de Karmarkar

Un problema de OL (optimización lineal) en la **forma canónica** se puede convertir a la forma canónica de Karmarkar, pasando por varios problemas intermedios:

1. Problema de OL en la forma canónica.
2. Problema de factibilidad en la forma estándar.
3. Problema de OL en la forma estándar, factible, con valor óptimo nulo.
4. Problema en OL la forma canónica de Karmarkar.

Los problemas son los siguientes (los superíndices no son potencias):

$$\begin{aligned} \min\ z = {c^1}^{\mathrm{T}} x^1 & \\ A^1 x^1 \geq b^1 & \\ x^1 \geq 0\,. & \end{aligned} \qquad (P_1)$$

$$\begin{aligned} A^2 x^2 = b^2 & \\ x^2 \geq 0\,. & \end{aligned} \qquad (P_2)$$

$$\begin{aligned} \min\ z = {c^3}^{\mathrm{T}} x^3 & \\ A^3 x^3 = b^3 & \\ x^3 \geq 0\,, & \end{aligned} \qquad (P_3)$$

donde hay puntos factibles y $z^* = 0$.

$$\begin{aligned} \min\ z = {c^4}^{\mathrm{T}} x^4 & \\ A^4 x^4 = 0 & \\ e^{\mathrm{T}} x^4 = 1 & \\ x^4 \geq 0\,. & \end{aligned} \qquad (P_4)$$

En cada caso se supone que A^k es una matriz $m_k \times n_k$. La justificación de cómo pasar de un problema a otro se pueden encontrar en [Kar85] o [Mor91]. Aquí aparece simplemente la idea principal.

Para pasar de P_1 a P_2 se utilizan las condiciones de KKT para P_1, o también, resultados de dualidad.

$$\begin{aligned} Ax - u &= b \\ A^{\mathrm{T}}y + v &= c \\ c^{\mathrm{T}}x - b^{\mathrm{T}}y &= 0 \\ x, y, u, v &\geq 0. \end{aligned}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} A^1 & 0_{m_1\times m_1} & -I_{m_1} & 0_{m_1\times n_1} \\ 0_{n_1\times n_1} & A^{1\mathrm{T}} & 0_{n_1\times m_1} & I_{n_1} \\ c^{1\mathrm{T}} & -b^{1\mathrm{T}} & 0_{1\times m_1} & 0_{1\times n_1} \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} x^1 \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad b^2 = \begin{bmatrix} b^1 \\ c^1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para pasar de P_2 a P_3, dado $q > 0$ un vector en $\mathbb{R}^{n_2}$, se construye el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ A^2x^2 + \lambda(b^2 - A^2q) &= b^2 \\ x^2, \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$c^3 = \begin{bmatrix} 0_{n_2\times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} A^2 & \quad b^2 - A^2q \end{bmatrix}, \quad x^3 = \begin{bmatrix} x^2 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad b^3 = b^2\,.$$

Es claro que $\begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}$, es un punto factible para P_3.

Sean $\Delta = \Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : e^{\mathrm{T}}x = 1\}$, $\quad \Delta' = \Delta'_n = \{x \in \Delta_n : x_n > 0\}$, $\quad a > 0$ un vector en R^{n_3} y D_a la matriz diagonal obtenida a partir de a. Para pasar de P_3 a P_4 se usa la transformación $T_a : \mathbb{R}^{n_3}_+ \to \mathbb{R}^{n_3+1}$, definida por

$$T_a(\xi) = \begin{bmatrix} \dfrac{D_a^{-1}\xi}{e^{\mathrm{T}}D_a^{-1}\xi + 1} \\ \\ 1 - e^{\mathrm{T}}\xi \end{bmatrix}.$$

Esta transformación tiene las siguientes propiedades:

- $T_a : \mathbb{R}^n_+ \to \Delta'_{n_3+1}$.
- T_a es biyectiva.
- $T_a^{-1}(\zeta) = \dfrac{D_a\zeta}{\zeta_{n_3+1}}$, con $\zeta = [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \cdots \quad \zeta_{n_3}]^{\mathrm{T}}$.

- $T_a(a) = \dfrac{1}{n_3+1}[1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^{\mathrm{T}}$.

Sea $a > 0$ y punto factible de P_3. Al aplicar T_a al problema P_3 se obtiene un problema en la forma P_4 con

$$c^4 = \begin{bmatrix} c^3 \centerdot a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} A^3 D_a & \quad -b^3 \end{bmatrix}.$$

El símbolo $\centerdot$ indica el producto de Hadamard de dos vectores, o sea, el producto elemento a elemento. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \centerdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 \\ v_2 w_2 \\ v_3 w_3 \end{bmatrix}.$$

Obtención de la solución inicial

Sea ζ la solución del problema P_4, obtenida por el algoritmo de Karmarkar. Se requiere obtener la solución del problema P_1, es decir, se require recorrer el camino en el sentido contrario: P_4, P_3, P_2 y P_1.

Para pasar de la solución de P_4 a la solución de P_3 basta con aplicar T_a^{-1},

$$\begin{aligned} x^3 &= T_a^{-1}(\zeta) \\ x_i^3 &= \frac{a_i \zeta_i}{\zeta_{n_3+1}}, \quad i = 1, ..., n_3. \end{aligned}$$

Se puede pasar directamente de x^3 a x^1 ya que las primeras componentes de x^3 son justamente las de x^1.

$$x_i^1 = x_i^3, \quad i = 1, ..., n_1.$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \min \ z = -5x_1 - 7x_2 & \\ x_1 + x_2 &\leq 40 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 58 \\ x_1 &\leq 30 \\ x &\geq \ 0. \end{aligned}$$

Al colocarlo en la forma canónica de minimización:

$$\begin{aligned} \min \ z = -5x_1 - 7x_2 & \\ -x_1 - x_2 &\geq -40 \\ -x_1 - 2x_2 &\geq -58 \\ -x_1 &\geq -30 \\ x &\geq \quad 0. \end{aligned}$$

```
A2
   -1    -1     0     0     0    -1     0     0     0     0
   -1    -2     0     0     0     0    -1     0     0     0
   -1     0     0     0     0     0     0    -1     0     0
    0     0    -1    -1    -1     0     0     0     1     0
    0     0    -1    -2     0     0     0     0     0     1
   -5    -7    40    58    30     0     0     0     0     0
b2 :  -40   -58   -30    -5    -7     0

q  :    2     2     2     2     2     2     2     2     2     2
c3 :    0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1
A3
   -1    -1     0     0     0    -1     0     0     0     0   -34
   -1    -2     0     0     0     0    -1     0     0     0   -50
   -1     0     0     0     0     0     0    -1     0     0   -26
    0     0    -1    -1    -1     0     0     0     1     0    -1
    0     0    -1    -2     0     0     0     0     0     1    -3
   -5    -7    40    58    30     0     0     0     0     0  -232
b3 :  -40   -58   -30    -5    -7     0

c4 :    0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0
A4
   -2    -2     0     0     0    -2     0     0     0     0   -34    40
   -2    -4     0     0     0     0    -2     0     0     0   -50    58
   -2     0     0     0     0     0     0    -2     0     0   -26    30
    0     0    -2    -2    -2     0     0     0     2     0    -1     5
    0     0    -2    -4     0     0     0     0     0     2    -3     7
  -10   -14    80   116    60     0     0     0     0     0  -232     0
a :    2     2     2     2     2     2     2     2     2     2     1


x4: 0.3999 0.3272 0.0545 0.0364 0.00 0.00 0.00 0.1455 0.00 0.00 0.00 0.0364

x1  =    21.994673   17.995168
```

Problema de OL en la forma estándar

$$\begin{aligned} \min \ z = {c^1}^{\mathrm{T}} x^1 & \\ A^1 x^1 = b^1 & \\ x^1 \geq 0\,. & \end{aligned} \tag{P_1'}$$

Para pasar de P_1' a P_2 se utilizan las condiciones de KKT para P_1'. Como resulta un vector y no restringido, entonces se descompone en $y = y^+ - y^-$

$$A^2 = \begin{bmatrix} A^1 & 0_{m_1\times m_1} & 0_{m_1\times m_1} & 0_{m_1\times n_1} \\ 0_{n_1\times n_1} & {A^1}^{\mathrm{T}} & -{A^1}^{\mathrm{T}} & I_{n_1} \\ {c^1}^{\mathrm{T}} & -{b^1}^{\mathrm{T}} & {b^1}^{\mathrm{T}} & 0_{1\times n_1} \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} x^1 \\ y^+ \\ y^- \\ s \end{bmatrix}, \quad b^2 = \begin{bmatrix} b^1 \\ c^1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El resto del proceso es el mismo, pero hay una dificultad: durante la solución del problema P_4 resultante, pueden aparecer, con más frecuencia, matrices BB^{T} singulares o casi singulares.

REFERENCIAS

[Kar85] Karmarkar Narendra, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorica, 4, 1984, pp. 373-395.

[Mor91] Mora Héctor, *Método de Karmarkar*, 8 Coloquio Distrital de Matemáticas y Estad., Universidad Nacional, Universidad Pedagógica, Universidad Distrital, Bogotá, 1991.