GRAFOS

0.1 Diccionario

edge = arista o arco.

loop = lazo, bucle.

path = camino, cadena (en grafos simples).

degree (de un vértice) = grado, valencia.

cut edge : arista de corte o puente

cut point = punto o vértice de corte, punto de articulación

cut set = conjunto de articulación

clique = camarilla o pandilla

independent set = conjunto independiente o estable

matching = emparejamiento

weigthed graph = grafo ponderado o valorado o con costos.

0.2 Definiciones

$|C|$ = número de elementos del conjunto C, llamado cardinal de C.

Sea C un conjunto, $\wp(C) = \{B : B \subseteq C\}$ es el conjunto de subconjuntos de C llamado **partes de** C.

$\wp_2(C) = \{B \in \wp(C) : |B| = 2\}$ es el conjunto de subconjuntos de C de cardinal 2.

Un grafo **no orientado**, o **no dirigido**, **simple**, (los grafos dirigidos generalmente se llaman digrafos) es un conjunto finito, no vacío de vértices y un conjunto (finito) de aristas. De manera formal $G = (V, A)$, donde $0 < |V| < \infty$, $A \subseteq \wp_2(V)$. V es el conjunto de vértices y A es el conjunto de aristas. En estas notas, mientras no se diga lo contrario, **cuando se habla de grafo se refiere a un gnos, grafo no orientado simple**.

A veces una arista se asocia a la pareja (u, v) pero debe considerarse como **no ordenada**.

En un gnos, entre dos vértices no puede haber más de una arista. Tampoco están considerados los lazos o bucles (arista que va de un vértice al mismo vértice).

Si G es un grafo, $V(G)$ es el conjunto de vértices de G; $A(G)$ es el conjunto de aristas de G. Mientras no se diga lo contrario de supondrá un grafo $G = (V, A)$.

Generalmente $n = |V|$ es el **orden** del grafo, $m = |A|$ es el tamaño del grafo.

El grafo $G = (V, \emptyset)$ se llama el **grafo nulo** o **trivial** de orden n.

La matriz C es la **matriz de incidencia o de adyacencia** del grafo G, denotada $C = M(G)$ si:

$$C \in \mathcal{M}(n, n),$$
$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in A \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Para la definición de matriz de incidencia se requiere haber determinado un orden en V, o sea, $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Si $\{i, j\} \in A$, entonces se dice; que i y j son los **extremos** de la arista; que la arista $\{i, j\}$ **incide** sobre i y sobre j, que i y j son **adyacentes** o **vecinos**. La relación de adyacencia entre vértices es simétrica pero no reflexiva (un vértice no es adyacente a sí mismo).

Dos aristas son **adyacentes** o **vecinas** si tienen por lo menos un extremo en común, o sea, dos aristas $\{i, j\}$ y $\{u, v\}$ son adyacentes si $\{i, j\} \cap \{u, v\} \neq \emptyset$. En particular, una arista es adyacente a sí misma

La **vecindad** o **adyacencia** de un vértice v es el conjunto de vecinos

$$N(v) = \{u : \{u, v\} \in A\}.$$

El **grado** o **valencia** de un vértice es el número de vecinos,

$$g(v) = |N(v)|.$$

Dos grafos $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son **isomorfos** si:

ii) $|V| = |V'|$
ii) $|A| = |A'|$
iii) existe $f : V \to V'$, 1-1 y sobre, tal que

$$\{i, j\} \in A \quad \Leftrightarrow \quad \{f(i), f(j)\} \in A'.$$

Un grafo es **completo**, si para todo $v \in V$, $g(v) = n - 1$. O sea, hay aristas entre cualquier pareja de vértices. Se denota por K_n.

Un grafo es **regular** si todos los vértices tienen el mismo grado. En particular K_n y el grafo nulo son regulares.

Un vértice v es **aislado** si $g(v) = 0$.

Un vértice v es **pendiente** o es una **hoja** si $g(v) = 1$.

Un grafo es **plano** si existe una representación plana de él donde no se cortan las aristas (pueden ser curvas) en puntos diferentes a los vértices. Por ejemplo K_4 es plano, K_5 no es plano.

Un grafo es realizable en $\mathbb{R}^n$ si:
V se puede representar en $\mathbb{R}^n$,
A se puede representar por curvas en $\mathbb{R}^n$,
dos aristas distintas no se cortan puntos diferentes a los vértices.

Un grafo plano es simplemente un grafo realizable en $\mathbb{R}^2$.

El grafo $G' = (V', A')$ es un **subgrafo** del grafo $G = (V, A)$ si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$. Observe que no basta con tomar $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$, se requiere que (V', A') sea también un grafo.

El grafo $G' = (V, A')$ es un **grafo parcial** del grafo $G = (V, A)$ si $A' \subseteq A$. Observe que los conjuntos de vértices son iguales. Algunas veces los grafos parciales también se llaman subgrafos

Sea $V' \subseteq V$, el **subgrafo generado** o **inducido** por V', denotado por $G(V')$, es el grafo $G' = (V', A')$ tal que

$$A' = \{\{u, v\} \in A : u, v \in V'\}.$$

Sea $A' \subseteq A$, el **grafo parcial generado** o **inducido** por A', denotado por $G(A')$, es el grafo $G' = (V, A')$. Algunas veces este grafo $G' = (V, A')$ también se llama el subgrafo generado por A'.

Caso particular: $V' = V \setminus U$, donde $U \subseteq V$. Se denota por $\bar{G}_U = \bar{G}(U)$ el subgrafo obtenido al quitar los vértices que están en U y las aristas necesarias.

Subcaso particular, $v \in V$, $U = \{v\}$, el subgrafo obtenido al quitar el vértice v, se denota por $\bar{G}_v$, o a veces, $G \setminus v = \bar{G}(v)$.

Caso particular: $A' = A \setminus B$, donde $B \subseteq A$. Es el grafo parcial obtenido al quitar las aristas que están en B, se denota por $\bar{G}_B = \bar{G}(B)$.

Subcaso particular, $a = \{u, v\} \in A$, $B = \{a\}$, el subgrafo obtenido al quitar la arista a, se denota por $\bar{G}_a$, o a veces, $G \setminus a = \bar{G}(a)$.

Si G es un grafo, el **complemento** de G, denotado por $\bar{G}$, es el grafo tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ y $A(\bar{G}) = \wp_2(V) \setminus A$. En palabras: los vértices son los mismos y las aristas de $\bar{G}$ son justamente las aristas que no están en G.

Un grafo $G = (V, A)$ es **bipartito** si V se puede expresar como la unión disyunta de dos subconjuntos no vacíos de forma que en cada subconjunto no hay nodos vecinos, o sea, existen V_1 y V_2 tales que

$$\begin{aligned} &V_1 \neq \emptyset, \\ &V_2 \neq \emptyset, \\ &V = V_1 \cup V_2, \\ &V_1 \cap V_2 = \emptyset, \\ &G(V_1) = \text{ grafo nulo}, \\ &G(V_2) = \text{ grafo nulo}. \end{aligned}$$

A veces se denota $G = (V_1, V_2, A)$.

Un grafo **bipartito** se llama **completo** si están todas la aristas que van de vértices en V_1 a vértices en V_2. Si $|V_1| = p$ y $|V_2| = q$, el grafo bipartito completo se denota $K_{p,q}$

Un conjunto de vértices $U \subseteq V$ se llama **camarilla** o **pandilla** si $G(U)$ es completo.

El **número de camarilla** de un grafo es el mayor número de vértices de una camarilla.

Un conjunto de vértices $U \subseteq V$ es **estable** o **independiente** si en él no hay vértices vecinos.

El **número de independencia** de un grafo es el mayor número de vértices de un conjunto independiente.

Un conjunto de aristas $B \subseteq A$ es un **emparejamiento** si en él no hay parejas vecinas.

Un emparejamiento es **perfecto** si en el conjunto de aristas están todos los vértices. Los emparejamientos perfectos tienen cardinal máximal.

Un conjunto de vértices $U \subseteq V$ es **transversal** en el grafo G, si cada una de las aristas de G inciden en algún vértice de B.

Obviamente V es transversal. Un problema interesante es encontrar un conjunto transversal de menor tamaño.

Una **cadena** o camino es una sucesión de $p+1$ vértices

$$\alpha = (v_0, v_1, v_2, ..., v_p),$$

donde $p \geq 0$, $v_i \in V$ para todo i, $\{v_i, v_{i+1}\} \in A$ para $i = 0, 1, ..., p-1$. Se dice que p es la **longitud de la cadena**. Se dice que esta cadena **empieza** en v_0 y **acaba** en v_p. También se dice que v_0 y v_p son los **extremos** de la cadena.

Si $v \in V$, entonces (v) es una cadena de longitud 0. Si $\{u, v\} \in A$, entonces (u, v) es una cadena de longitud 1.

Una cadena que no repite vértices se llama **elemental** [Berge, Abellanas] o **simple** [Cormen..., Gibbons].

Una cadena que no repite aristas se llama **simple** [Berge, Abellanas].

Para evitar esta confusión de nombres, en estas notas, se usará **nrv** para las cadenas que no repiten vértices y se usará **nra** para las cadenas que no repiten aristas.

Obviamente una cadena nrv también es nra. La cadena $(1, 2, 3, 4, 2, 5)$ es nra pero no es nrv.

Dos cadenas de longitud p son "iguales" si una se obtiene a partir de la otra utilizando el orden inverso. De manera más precisa las cadenas $(v_0, v_1, ..., v_{p-1}, v_p)$ y $(v_p, v_{p-1}, ..., v_1, v_0)$ son iguales.

Una cadena nra que pasa por todos los vértices se llama **euleriana**. Puede repetir vértices. Ejemplo típico el problema de los puentes de Koenigsberg (Kaliningrado).

Una cadena nrv que pasa por todos los vértices se llama **hamiltoniana**.

Un **ciclo** es una cadena de longitud superior o igual a 3 que empieza y acaba en el mismo vértice.

Dos ciclos de longitud p son "iguales" si son cadenas iguales o si uno se obtiene a partir del otro empezando en un vértice interior, acabando en ese mismo vértice y siguiendo el mismo orden o el orden inverso. De manera más precisa los ciclos $(v_p, v_1, ..., v_{p-1}, v_p)$ y $(v_p, v_{p-1}, ..., v_1, v_p)$ son iguales. También es igual a ellos el ciclo

$$(v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, ..., v_p, v_1, v_2, ..., v_{k-2}, v_{k-1}).$$

Un ciclo es **simple** si no repite vértices, aparte del primero y el último. De manera más precisa, la cadena $\alpha = (v_0, v_1, v_2, ..., v_p)$ es un ciclo si

$$\begin{aligned} &p \geq 3, \\ &v_0 = v_p, \\ &|\{v_0, v_1, ..., v_{p-1}\}| = p. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se puede expresar también

$$v_i \neq v_j \ \forall i \neq j, 0 \leq i, j \leq p - 1.$$

Un grafo es **cíclico** si el grafo completo es un solo ciclo simple. Se denota por C_n.

Un grafo es **acíclico** o no cíclico o sin ciclos, si no tiene ciclos simples.

Se dice que el vértice v está **conectado** con el vértice u, o que v es **alcanzable** o **accesible** desde u, si existe una cadena que empieza en u y acaba en v.

Un vértice está conectado con sí mismo por la cadena (v). La conexión entre vértices es una relación de equivalencia.

Las clases de equivalencia para la conexión se llaman **componentes conexas**.

Un grafo es **conexo** si hay una única componente conexa.

En un grafo conexo se define la **distancia** entre dos vértices como la longitud de la cadena más corta.

En un grafo conexo se define el **diámetro** como la máxima distancia entre dos vértices.

Un vértice v es un **punto de articulación** o **vértice** (o punto) **de corte** si $\bar{G}(v)$ tiene más componentes conexas que G.

Una arista a es un **puente** si $\bar{G}(a)$ tiene más componentes conexas que G.

En un grafo conexo un conjunto $U \subseteq V$ es un **conjunto de articulación** si $\bar{G}(U)$ no es conexo.

Un grafo con por lo menos un punto de articulación se llama **separable**.

Un grafo sin puntos de articulación se llama **bloque**.

Otra definición. Un grafo sin puntos de articulación ni puentes se llama **bloque**.

Un **árbol** es un grafo conexo y acíclico.

Un **árbol** es **generador** o **de expansión** si tiene todos los vértices del grafo.

Un **bosque** es un grafo acíclico.

Algunos grafos tienen adicionalmente asociado a cada arista un costo o distancia. Estos grafos reciben el nombre de **grafos con pesos** o **grafos con costo** o **grafos valorados** o **ponderados**. Se representan por una tripla $G = (V, A, c)$ donde c es la lista de costos de las aristas.

En un grafo valorado se define la **longitud** de una cadena como las suma de los costos de las aristas. Si dos vértices están conectados se define la **distancia** entre los dos vértices como el mínimo de las longitudes de las cadenas que unen los dos vértices.

En un grafo valorado, se llama **cadema china** a una cadena que pasa por lo menos una vez por todas las aristas a costo mínimo.

0.3 Problemas y procedimientos

- Dados V y A, averiguar si (V, A) es un grafo.
  - ¿Hay vértices repetidos?
  - ¿Hay aristas repetidas?
  - ¿Los extremos de las aristas son vértices?
- Dado el grafo $G = (V, A)$, construir la matriz $M(G)$.
- Dado el grafo $G = (V, A)$ y $v \in V$, calcular $g(v)$.

- Dados V y la matriz C, construir A para que $M(G) = C$, $G = (V, A)$.
- Averiguar si un grafo es acíclico.
- Averiguar si un grafo es conexo.
- Dados dos vértices, averiguar si están conectados.
- Dados dos vértices en un grafo valorado, hallar la cadena de costo mínimo, llamado también el problema de la ruta más corta.
- Problema de flujo máximo en un grafo con capacidades.
- Problema de flujo máximo a costo mínimo en un grafo con costos y capacidades.
- Encontrar un árbol generador.
- Encontrar un arbol generador de costo mínimo en grafo valorado.
- Encontar un emparejamiento.
- Encontar, si es posible, un emparejamiento perfecto (de cardinal maxiaml).
- Encontrar, si es posible, una cadena euleriana.
- Encontrar, si es posible, una cadena hamiltoniana.
- Problema del agente viajero: encontrar una cadena hamiltoniana de costo mínimo.
- En un grafo valorado, encontrar una cadena china.
- Averiguar si un grafo es plano.
- Encontrar una cadena china.
- Averiguar si un grafo es bipartito.
- Encontrar un conjunto estable de cardinal máximo.
- Encontrar un conjunto estable de cardinal mínimo.
- Encontrar una camarilla maximal.
- Calcular el número de camarilla de un grafo.

0.4 Algoritmos

Algoritmo b.f.s (breath first search), búsqueda a lo ancho, tomado de [Cor]. Este algoritmo, dado un grafo G y un vértice s permite obtener la componente conexa de s.

En este algoritmo Q indica una cola o fila donde están los vértices conectados con s pero que no han sido analizados. Se está denotando como un conjunto pero en la cola hay orden de llegada. Los que llegan se meten al final.

Los vértices tienen un color,

blanco: si no han sido conectado

gris: ha sido conectado pero no analizado

negro : ha sido conectado y analizado

La cola Q está dada por los vértices grises.

δ indicará la longitud de la cadena de un vértice al vértice s.

p indicará el vértice anterior. Si es -1 indica que no hay vértice anterior. Con su información se puede reconstruir hacia atrá una cadena.

datos: V, A, s
$\delta() = \infty,\ \ p() = -1,\ c() = \text{blanco}$
$c(s) = \text{gris}$
$\delta(s) = 0$
$Q = \{s\}$
mientras $Q \neq \emptyset$
  $u = \text{cabeza}(Q)$
  para $v \in N(u)$
    si $c(v) = \text{blanco}$
      $c(v) = \text{gris}$
      $\delta(v) = d(u) + 1$
      $p(v) = u$
      $Q = Q \cup \{v\}$
    fin-si
  fin-para
  $Q = Q \setminus \{u\}$
  $c(v) = \text{negro}$
fin-mientras

Al final de este algoritmo, los vértices tales que $\delta(v) < \infty$ forman la componente conexa de s. Si están todos lo vétrtices, entonces G es conexo y por medio de p se puede construir un arbol.

0.5 Proposiciones

$\sum_{v \in V} g(v) = 2m.$

Un grafo G es acíclico si y sólo si

$$m = n - p,$$

donde p es el número de componentes conexas de G.

(Kuratowski) Un grafo es plano sssi no contiene ni a K_5 ni a $K_{3,3}$ [Gib].

En cualquier grafo, el número de vértices de grado par es impar [Abe].

Si $\omega()$ denota el número de camarilla y $\alpha()$ denota el número de independencia, entonces [Sch]

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}),$$
$$\alpha(G) = \omega(\bar{G}).$$

Si un grafo posee exactamente dos vértices de grado impar, entonces estos dos vértices están conectados [Abe].

Un grafo conexo admite un ciclo euleriano sssi tod vértice tiene grado par [Tor]

Un grafo es un bosque sssi para todo par de vértices distintos existe por mucho un camino que los une [Abe].

Un grafo es un arbol sssi para todo par de vértices distintos existe exactamente un camino que los une [Abe].

Un grafo es un arbol sssi es conexo y todas las aristas son puentes [Abe].

Un grafo es un arbol sssi al agregar una arista se obtien un ciclo único [Tor].

Todo grafo conexo tiene por lo menos un árbol generador [Abe].

Si a un árbol G se le agrega un vértice u y un arista que une u con cualquier vértice de G, se obtine un nuevo árbol [Abe].

Un arbol tiene $n-1$ aristas [Abe].

Un bosque con k árboles tiene $n-k$ aristas [Abe].

Todo árbol con más de un vértice tiene por lo menos dos vértices de grado 1 [Abe].

Un grafo es bipartito sssi no tiene ciclos impares (número de aristas impar) [Pri].

Todo grafo es realizable en $\mathbb{R}^3$ [Tor].

Un árbol no trivial (tiene por lo menos una arista) tiene por lo menos dos hojas [Tor].

Bibliografía

[Abe] Abellanas M., Lodares D., *Análisis de algoritmos y Teoría de Grafos*, Macrobit - Rana, México, 1991.

[Ber] Berge Claude, *Graphes et hypergraphes*, 2 ed., Dunod-Bordas, Paris, 1973.

[Cor] Cormen Thomas H., Leiserson Charles E., Rivest Ronald L., *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, 1990.

[Eva] Evans James E., Minieka Edward, *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, 2 ed., Dekker, New York, 1992.

[Gib] Gibbons Alan, *Algorithmic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Pri] Prins Christian, *Algorithmes de graphes*, Eyrolles, Paris, 1994.

[Sch] Scheinerman Edward R., *Matemáticas discretas*, Thomson, México, 2001.

[Tor] Toranzos Fausto A., *Introducción a la Teoría de Grafos*, OEA, Washington, 1976.

[Wil] Wilson Robin J., Watkins John J., *Graphs, An Introductory Approach*, Wiley, New York, 1990.