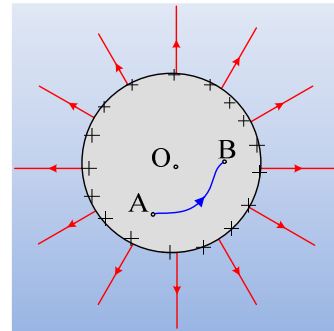


2. Δυναμικό και χωρητικότητα αγωγού.

Σε όλα τα σημεία ενός αγωγού, σε ηλεκτροστατική ισορροπία, το δυναμικό είναι σταθερό. Για παράδειγμα, στην φορτισμένη σφαίρα του διπλανού σχήματος τα σημεία Α και Β έχουν το ίδιο δυναμικό, αφού για την διαφορά δυναμικού μεταξύ τους ισχύει:

$$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q} = 0$$



Όπου W_{AB} το έργο που παράγεται από το πεδίο κατά τη μετακίνηση ενός σημειακού φορτίου q , από το Α στο Β. Το έργο όμως αυτό είναι μηδέν, αφού όπως δείξαμε προηγούμενα στο εσωτερικό του αγωγού δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, συνεπώς δεν ασκείται καμιά δύναμη για να παράγει έργο.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να οδηγηθούμε, αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που συνδέει την ένταση του πεδίου με τη διαφορά δυναμικού:

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{ή και} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Πράγμα που σημαίνει μηδενική ένταση άρα μηδενική διαφορά δυναμικού.

Ναι, αλλά ποια είναι η τιμή του δυναμικού του φορτισμένου αγωγού;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι πρέπει προηγούμενα να αποφασίσουμε πού θα αποδώσουμε μηδενικό δυναμικό. Έτσι αν υποθέσουμε ότι το δυναμικό είναι μηδέν στο άπειρο (πράγμα που συνήθως εφαρμόζουμε), για την περίπτωση της σφαίρας θα έχουμε:

Το δυναμικό της σφαίρας θα είναι ίσο με το δυναμικό σε ένα σημείο της επιφάνειάς της και αυτό θα είναι ίσο με:

$$V = \frac{W_{R \rightarrow \infty}}{q} = \frac{\int_R^{\infty} qE \cdot dR}{q} = \int_R^{\infty} E \cdot dR = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot dR = - \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right]_R^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{ή}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (1)$$

Καταλήγουμε δηλαδή, στο ίδιο συμπέρασμα που είχαμε καταλήξει όταν μελετούσαμε την ένταση:

Το δυναμικό ενός σφαιρικού αγωγού,
είναι ίσο με το δυναμικό σε απόσταση ίση με την ακτίνα του,
αν όλο το φορτίο του ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο του.

Αλλά το να πάρουμε το δυναμικό μηδέν στο άπειρο, είναι μια βολική ιστορία για πάρα πολλές περιπτώσεις, αλλά όχι για κάθε περίπτωση.

Ας παρακολουθήσουμε την παρακάτω εφαρμογή:

Εφαρμογή 1^η:

Μια μεταλλική σφαίρα Α ακτίνας $R=0,2\text{m}$ φέρει φορτίο $Q=2\mu\text{C}$.

i) Να υπολογιστεί το δυναμικό της, θεωρώντας μηδενικό το δυναμικό στο άπειρο.

ii) Η παραπάνω σφαίρα συνδέεται με σύρμα αμελητέων διαστάσεων με άλλη σφαίρα Β. Να υπολογιστεί το τελικό δυναμικό της σφαίρας Α, καθώς και το τελικό της φορτίο, αν η ακτίνα της Β σφαίρας είναι ίση:

α) $r=0,02\text{m}$

β) $r=1\text{m}$

γ) $r=6.400\text{km}$

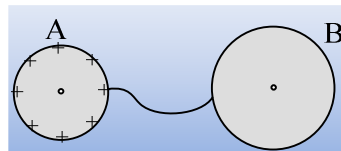
$$\text{Δίνεται } K_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2.$$

Απάντηση:

i) Αρχικά το δυναμικό της Α σφαίρας είναι:

$$V_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = K_c \frac{Q}{R} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-1}} \text{V} = 90.000 \text{V}$$

ii) Τη στιγμή που συνδέουμε με το σύρμα τις δύο σφαίρες (ας τις φανταστούμε σε μεγάλη απόσταση, οπότε το δυναμικό της Β σφαίρας να είναι σχεδόν μηδενικό), εμφανίζεται μια διαφορά δυναμικού στα άκρα του σύρματος. Αλλά αυτό σημαίνει ότι στο εσωτερικό του, εμφανίζεται ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης



$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, με αποτέλεσμα να δεχτούν δύναμη τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού-σύρματος. Αυτό όμως θα επιφέρει μια προσανατολισμένη κίνηση ηλεκτρονίων προς τη σφαίρα Α.

Θα έχουμε δηλαδή **ηλεκτρικό ρεύμα**.

Η μεταφορά αυτή θα συμβαίνει, για όσο χρόνο υπάρχει διαφορά δυναμικού, συνεπώς θα αποκατασταθεί ξανά (σε ελάχιστο χρόνο) ηλεκτροστατική ισορροπία όταν

οι δύο σφαίρες αποκτήσουν το ίδιο δυναμικό. Αλλά τότε:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{R} \text{ και } V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B}{r} \rightarrow$$

$$\frac{q_A}{R} = \frac{q_B}{r} \quad (1)$$

Ενώ από την αρχή διατήρησης του φορτίου θα έχουμε ότι:

$$q_A + q_B = Q \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$q_A = Q \frac{R}{R+r} \text{ και } q_B = Q \frac{r}{R+r} \quad (3)$$

$$\text{Και } V_A = V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R+r} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις (3) και (4) παίρνουμε:

α) Αν $r=0,02\text{m}$ τότε:

$$V=81.888\text{V}, q_A=1,8\mu\text{C} \text{ και } q_B=0,2\mu\text{C}$$

β) Αν $r=1\text{m}$ τότε:

$$V=15.000\text{V}, q_A=0,33\mu\text{C} \text{ και } q_B=1,67\mu\text{C}$$

γ) Αν $r=6.400\text{km}$ τότε:

$$V=0,03\text{V}, q_A=6 \cdot 10^{-8} \mu\text{C} \text{ και } q_B \approx 2\mu\text{C}$$

Νομίζω ότι γίνεται φανερό ότι το πόσο φορτίο θα παραμείνει στην σφαίρα Α, εξαρτάται (και) από την ακτίνα της Β σφαίρας (αν και δεν ήταν απαραίτητο με βάση τις εξισώσεις (3), αλλά προτιμήθηκε η αριθμητική αντικατάσταση για καλύτερη «συνειδητοποίηση» της κατάστασης που επικρατεί).

Έτσι το φορτίο που αποκτά κάθε σφαίρα είναι ανάλογο της ακτίνας της $\left(\frac{q_A}{R} = \frac{q_B}{r}\right)$,

συνεπώς στην ακραία περίπτωση, που η μια σφαίρα είναι η Γη (ακτίνα 6.400km), τότε όλο το περισσεύον φορτίο καταλήγει σε αυτήν και η σφαίρα Α αποκτά δυναμικό ίσο πρακτικά με μηδέν.

Αλλά αυτό μας οδηγεί στην σκέψη, στην περίπτωση κυκλωμάτων αλλά και φορτισμένων αγωγών, αντί να «τρέχουμε στο άπειρο», να παίρνουμε μηδέν το δυναμικό της Γης, αλλά τότε και κάθε αγωγός που συνδέεται με τη Γη (**γείωση**), αυτομάτως να αποκτά επίσης δυναμικό μηδέν.

Ας επανέρθουμε τώρα στην σχέση (1) για την περίπτωση σφαιρικού αγωγού:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \rightarrow$$

$$\frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

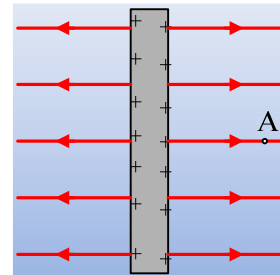
Παρατηρούμε ότι το πηλίκο $\frac{Q}{V}$ είναι σταθερό, εξαρτώμενο από την ακτίνα της σφαίρας και το υλικό που περιβάλλει τον αγωγό. Το σταθερό αυτό πηλίκο ονομάζεται χωρητικότητα αγωγού. Για κάθε δηλαδή αγωγό έχουμε:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Όπου C η χωρητικότητά του αγωγού, εξαρτώμενη από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, αλλά και από το υλικό που τον περιβάλλει (στην περίπτωση του κενού βλέπουμε στην εξίσωση τη διηλεκτρική σταθερά ϵ_0).

Ας δούμε τώρα μια δεύτερη εφαρμογή, που ο αγωγός είναι μια επίπεδη κυκλική πλάκα έτσι ως επαλήθευση του παραπάνω συμπεράσματος.

Σε μια τέτοια πλάκα, τα φορτία συγκεντρώνονται και στις δύο πλευρές της και όχι μόνο στη μια. Στην περίπτωσή μας θεωρούμε σταθερή επιφανειακή πυκνότητα και αναφερόμαστε στο φορτίο Q της μιας πλευράς της πλάκας, αφού το πεδίο στο σημείο A δημιουργείται από τα φορτία που κατανέμονται στην δεξιά πλευρά της πλάκας (στην πραγματικότητα το μισό φορτίο της πλάκας δημιουργεί πεδίο στην περιοχή του σημείου A).



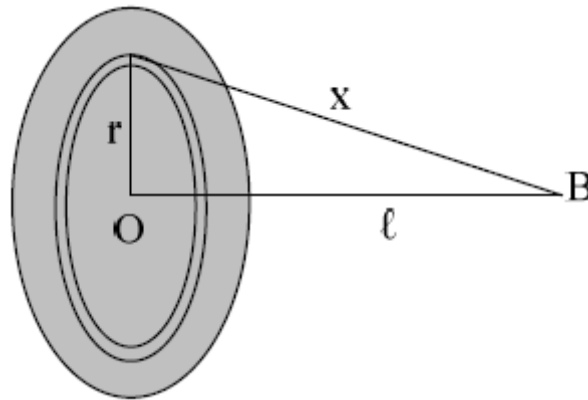
Εφαρμογή 2^η:

Μια λεπτή επίπεδη μεταλλική πλάκα σχήματος κυκλικού δίσκου ακτίνας R, είναι φορτισμένη ομοιόμορφα¹, έχοντας επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Να υπολογιστούν:

- i) Το δυναμικό της πλάκας.
- ii) Η χωρητικότητά της

Απάντηση:

¹ Στην πραγματικότητα, όταν έχουμε μια αγωγή απομονωμένη φορτισμένη πλάκα, δεν θα έχουμε ποτέ ομοιόμορφη φόρτιση. Προς την περιφέρεια του κυκλικού δίσκου, θα έχουμε μεγαλύτερη συγκέντρωση φορτίων και συνεπώς μεγαλύτερη επιφανειακή πυκνότητα.



- i) Έστω ο κυκλικός δίσκος του παραπάνω σχήματος ακτίνας R που φέρει στην δεξιά επιφάνειά του φορτίο $Q = \sigma \cdot \pi R^2$. Παίρνοντας ένα λεπτό δακτύλιο ακτίνας r και πάχους dr , θα έχει φορτίο $dq = (2\pi r) \cdot (dr) \cdot \sigma$. Όλα τα σημεία του δακτυλίου απέχουν από το σημείο B , που βρίσκεται πάνω στην κάθετη στο δακτύλιο στο κέντρο του, κατά απόσταση x , όπου

$$x = \sqrt{r^2 + \ell^2}$$

Οπότε το δυναμικό στο B που οφείλεται στον δακτύλιο είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi \cdot dr \cdot \sigma}{\sqrt{r^2 + \ell^2}}$$

Άρα το δυναμικό στο B προκύπτει με ολοκλήρωμα:

$$V_B = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r \cdot dr}{\sqrt{r^2 + \ell^2}} \rightarrow$$

$$V_B = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + \ell^2} - \ell \right) \text{ ή}$$

$$V_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + \ell^2} - \ell \right) \quad (1)$$

Αλλά όταν $\ell=0$ φτάνουμε στο κέντρο του δίσκου O , που το δυναμικό του θα είναι:

$$V_O = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Όμως όλα τα σημεία του δίσκου έχουν το ίδιο δυναμικό, συνεπώς τόσο είναι και το δυναμικό του κυκλικού δίσκου:

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}$$

- ii) Αλλά με βάση αυτά, η χωρητικότητα της αγωγίμης πλάκας θα είναι:

$$C = \frac{Q}{V} = 2\pi\epsilon_0 R$$

Αξιίζει νομίζω, να δούμε κάτι ακόμη σχετικά με την εξίσωση (1):

$$V_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + \ell^2} - \ell \right)$$

Για $\ell \gg R$, δηλαδή σε μεγάλη απόσταση από τον δίσκο τότε μπορούμε να αναλύσουμε την παράσταση $\sqrt{R^2 + \ell^2}$ κατά Taylor παίρνοντας:

$$\sqrt{R^2 + \ell^2} = \ell \left(1 + \frac{R^2}{\ell^2} \right)^{1/2} = \ell \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\ell^2} + \dots \right) = \ell + \frac{R^2}{2\ell}$$

Οπότε

$$V_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{R^2}{2\ell} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell}$$

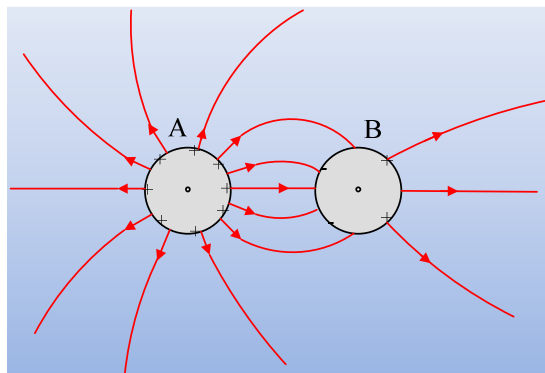
Δηλαδή το δυναμικό δίνεται από την ίδια σχέση, που μας δίνει το δυναμικό σε απόσταση ℓ από σημειακό ηλεκτρικό φορτίο. Με άλλα λόγια ο δίσκος θεωρείται αμελητέων διαστάσεων και το φορτίο σημειακό!!!

2.1. Διαφορά δυναμικού και χωρητικότητα πυκνωτή.

Σε όλα τα προηγούμενα θεωρήσαμε έναν φορτισμένο απομονωμένο αγωγό, ο οποίος δημιουργεί γύρω του ηλεκτρικό πεδίο.

Και αν ο αγωγός μας βρίσκεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο, κάποιου άλλου αγωγού;

Ας δούμε το παρακάτω σχήμα. Δίπλα σε μια φορτισμένη σφαίρα Α φέρνουμε μια δεύτερη αφόρτιστη σφαίρα Β. Τι θα συμβεί;



Λόγω επαγωγής θα υπάρξει μετακίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων, με αποτέλεσμα να μην έχουμε αφενός ομοιόμορφη κατανομή του περισσεύοντος ηλεκτρικού φορτίου στη σφαίρα Α, αλλά και εμφάνιση φορτίων στη σφαίρα Β, παρότι το συνολικό φορτίο της είναι μηδενικό. Πόσο είναι τώρα το δυναμικό της Α σφαίρας;

Προφανώς η κατάσταση είναι διαφορετική από αυτήν που προηγούμενα μελετήσαμε

και δεν ισχύει η εξίσωση $V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}$, αφού τώρα το δυναμικό της καθορίζεται και από

την παρουσία των (ανομοιόμορφα κατανεμημένων) φορτίων της, αλλά και από το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν στο χώρο, συνεπώς και στην περιοχή που καταλαμβάνει η σφαίρα Α, τα εμφανιζόμενα φορτία στην Β σφαίρα. Έτσι αν θέλαμε να βρούμε το δυναμικό της Α σφαίρας, με βάση την αρχή της επαλληλίας θα πρέπει να γράψουμε:

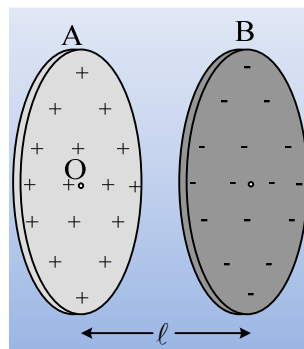
$$V_A = V_Q^A + V_{+q}^B + V_{-q}^B$$

Όπου V_Q^A το δυναμικό εξαιτίας των φορτίων της ίδιας της σφαίρας, V_{+q}^B το δυναμικό που αποκτά εξαιτίας των θετικών φορτίων που επάγονται στη δεξιά πλευρά της σφαίρας Β και V_{-q}^B το αντίστοιχο δυναμικό εξαιτίας των αρνητικών φορτίων στην αριστερά πλευρά της Β. Γίνεται νομίζω φανερό, ότι τέτοιος υπολογισμός δεν θα μπορούσε να γίνει!!!

Αλλά ας πάρουμε μια «σχετικά ευκολότερη» κατάσταση.

Ας πάρουμε τον παραπάνω κυκλικό δίσκο Α ακτίνας R, ο οποίος φέρει φορτίο +q, τον οποίο πλησιάζουμε σε έναν όμοιο κυκλικό δίσκο Β, ο οποίος φέρει αντίθετο φορτίο -q. Τα επίπεδα των δύο δίσκων είναι παράλληλα και έστω ℓ η απόσταση μεταξύ τους.

Προφανώς με τον τρόπο αυτό έχουμε δημιουργήσει έναν επίπεδο πυκνωτή!



Το δυναμικό του Α δίσκου, με βάση της αρχή της επαλληλίας θα είναι ίσο:

$$V_A = V_q^A + V_{-q}^B$$

Στην περίπτωση μας όμως η κατανομή των φορτίων στους δυο δίσκους, είναι πρακτικά πολύ περισσότερο ομοιόμορφη από την περίπτωση του μεμονωμένου αγωγού που μελετήθηκε παραπάνω, οπότε:

$$V_A = \frac{+q}{2\pi\epsilon_0 R} + \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + \ell^2} - \ell \right)$$

Όπου ο πρώτος προσθετός δίνει το δυναμικό στο κέντρο O, εξαιτίας των φορτίων του A δίσκου, ενώ ο δεύτερος το δυναμικό στο O, εξαιτίας του αρνητικού φορτίου του B δίσκου.

Με την ίδια λογική και ο δίσκος B έχει πλέον δυναμικό:

$$V_B = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 R} + \frac{+q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + \ell^2} - \ell \right)$$

Αλλά τότε μεταξύ των δύο δίσκων έχουμε διαφορά δυναμικού:

$$V_A - V_B = \frac{2q}{2\pi\epsilon_0 R} + \frac{-2q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + \ell^2} - \ell \right)$$

Συνεπώς η χωρητικότητα του συστήματος των δύο αγωγών (του πυκνωτή μας) είναι:

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{1}{\frac{1}{\pi\epsilon_0 R} + \frac{-1}{\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + \ell^2} - \ell \right)} = \frac{\pi\epsilon_0 R^2}{R - \left(\sqrt{R^2 + \ell^2} - \ell \right)}$$

Αλλά στην περίπτωση που η απόσταση των δύο δίσκων, είναι πολύ μικρότερη της ακτίνας τους, αν δηλαδή ($\ell \ll R$) τότε $\sqrt{R^2 + \ell^2} \approx R$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 R^2}{\ell} = \epsilon_0 \frac{A}{\ell}$$

Αποδείξαμε δηλαδή την σχέση υπολογισμού της χωρητικότητας επίπεδου πυκνωτή, με μια εναλλακτική μέθοδο και όχι με εφαρμογή του νόμου του Gauss, που συναντάμε συνήθως. Μπορούμε βέβαια να συγκρίνουμε τώρα την χωρητικότητα του μεμονωμένου

δίσκου $C = 2\pi\epsilon_0 R$ και του συστήματος των δύο (του πυκνωτή) $C = \frac{\pi\epsilon_0 R^2}{\ell} = 2\pi\epsilon_0 R \frac{R}{2\ell}$.

Όταν πλησιάσουν αρκετά οι δυο οπλισμοί, η χωρητικότητα γίνεται πολύ μεγαλύτερη!

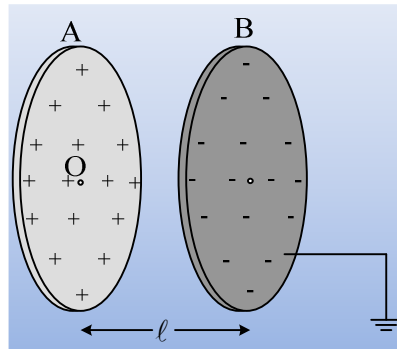
Ενδεικτικές τιμές για δίσκο ακτίνας $R=0,1m$ θα έχουμε:

$$C_\delta = 5,5 \cdot 10^{-12} F, \text{ ενώ για τον αντίστοιχα ο πυκνωτή με } \ell = 1mm, C_\pi = 280 \cdot 10^{-12} F.$$

Δηλαδή αύξηση κατά 50 περίπου φορές της χωρητικότητας.

Γιατί επιλέξαμε την πορεία αυτή;

Συνήθως λέμε ότι ο πυκνωτής είναι μια καλή αποθήκη φορτίου (και ενέργειας), ξεχνώντας να πούμε ότι αντίστοιχη αποθήκη είναι και ένας μεμονωμένος αγωγός. Η πειραματική διαδικασία βέβαια, στοχεύει στο να δείξει, ότι όταν πλησιάζουμε μια φορτισμένη μεταλλική πλάκα σε μια άλλη γειωμένη, τότε το δυναμικό της μειώνεται.



Και ένα ερώτημα που με είχε απασχολήσει παλιότερα ήταν, μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό της Α πλάκας σαν συνάρτηση της απόστασης ℓ ; Το πρόβλημα με ταλαιπώρησε αρκετά, αφού έθετα $V_B=0$, πράγμα που δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή, αφού έχουμε συγκεντρωμένα φορτία στον οπλισμό Β και συνεπώς έχει δυναμικό, όπως υπολογίστηκε παραπάνω. Μια μηχανιστική δηλαδή μεταφορά «κάποιας σύμβασης», μπορεί να ...μας ταλαιπωρήσει αφάνταστα...

dmargaris@sch.gr