

Η ράβδος γλιστράει...

Μια ομογενής δοκός AB μάζας 12kg και μήκους ℓ ισορροπεί όπως στο σχήμα, δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος, ενώ το άκρο της B στηρίζεται στο έδαφος, σχηματίζοντας με αυτό γωνία θ , όπου $\eta\mu\theta=0,8$. Η δοκός εμφανίζεται με το έδαφος συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,2$. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Για τη στιγμή, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος να βρεθούν οι επιταχύνσεις του κέντρου μάζας K και του άκρου A της δοκού.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά

από το μέσον της K ισχύει $I_{cm} = \frac{1}{12} M\ell^2$.

Απάντηση:

Μόλις κόψουμε το νήμα, η δοκός θα πέσει. Το ερώτημα είναι τι κίνηση θα κάνει; Αυτό εξαρτάται από το αν γλιστρήσει στο άκρο της B ή όχι.

Έστω ότι, ασκώντας στο άκρο B μια κατάλληλη οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ εξασφαλίζουμε ότι η δοκός στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που περνά από το άκρο B, χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση, θα έχουμε, ως προς τον άξονα περιστροφής :

$$\Sigma\tau = I_B \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Mg \cdot (BK) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = I_B \cdot a_{\gamma\omega\nu}. \quad (3)$$

Αλλά από το θεώρημα του Steiner έχουμε:

$$I_B = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{12} M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M\ell^2 \text{ και η σχέση (2) γίνεται:}$$

$$Mg \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{3} M\ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell} \sigma\upsilon\nu\theta$$

Αλλά τότε το κέντρο μάζας K έχει επιτάχυνση:

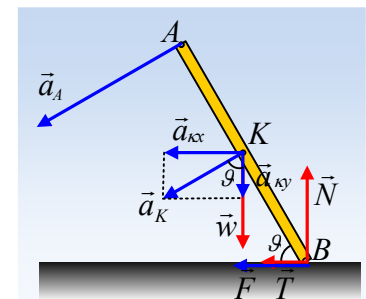
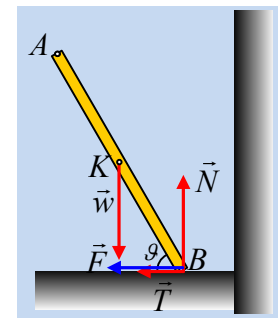
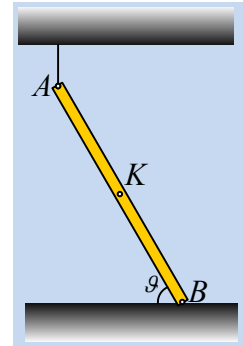
$$a_K = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \frac{3g}{2\ell} \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{3g}{4} \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$a_K = \frac{3 \cdot 10}{4} 0,6 \text{ m/s}^2 = 4,5 \text{ m/s}^2$$

Ενώ το άκρο A:

$$a_A = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \frac{3g}{2\ell} \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \ell = \frac{3}{2} g \sigma\upsilon\nu\theta = 9 \text{ m/s}^2.$$

Αλλά αναλύοντας την επιτάχυνση του κέντρου μάζα K σε δυο συνιστώσες μια οριζόντια και μια κατακόρυφη θα έχουμε (κεντρομόλος επιτάχυνση δεν υπάρχει, αφού τη στιγμή αυτή η ταχύτητα του K είναι μηδενική):



$$w-N=M\cdot a_{Ky} \rightarrow N=Mg-M\cdot a_K\cdot \sin\theta=120N-12\cdot 4,5\cdot 0,6N=87,6N$$

$$\text{και } F+T=M\cdot a_{Kx}=M\cdot a_K\cdot \eta\mu\theta=12\cdot 4,5\cdot 0,8N=43,2N$$

Αλλά η μέγιστη δυνατή τιμή της στατικής τριβής, η οριακή τριβή έχει μέτρο:

$$T_{op}=\mu_s\cdot N=0,2\cdot 87,6N=17,5N$$

Και από την παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$F=43,2N-17,52N=25,7N$$

Αλλά αυτό σημαίνει, ότι χωρίς την δράση της δύναμης F, η δοκός θα γλιστρήσει!!!

.....

(Προφανώς η λύση, μέχρι τη στιγμή αυτή, είναι η λύση της προηγούμενης ανάρτησης με τίτλο:

[Ισορροπία και επιτάχυνση μιας δοκού.](#))

.....

... Οπότε, πάμε από την αρχή!!!

Η δοκός εκτελεί σύνθετη κίνηση, η οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από μια μεταφορική και μια στροφική, γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που περνά από το μέσον K της δοκού.

Εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο του Νεύτωνα παίρνοντας:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma \vec{F} = M\vec{a}_{cm} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = M\cdot a_{cmx} \rightarrow T_{ol} = M\cdot a_{cmx} \quad (4) \\ \Sigma F_y = M\cdot a_{cmy} \rightarrow Mg - N = M\cdot a_{cmy} \quad (5) \end{cases}$$

Όπου $T_{ol}=\mu\cdot N$ η τριβή ολίσθησης.

Στροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau_K = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow N \cdot \frac{\ell}{2} \sin\theta - T \cdot \frac{\ell}{2} \eta\mu\theta = \frac{1}{12} M\ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

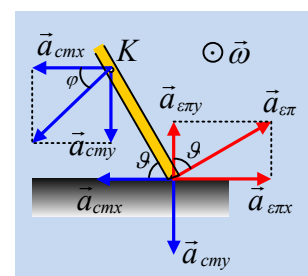
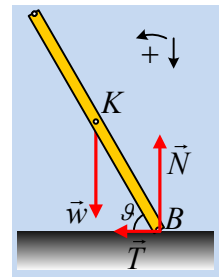
$$N \cdot \sin\theta - T \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{6} M\ell \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (6)$$

Οι εξισώσεις (4), (5) και (6) αποτελούν ένα σύστημα που έχει 4 αγνώστους, οπότε χρειαζόμαστε μια ακόμη εξίσωση. Αυτή θα προκύψει αν εστιάσουμε στην κίνηση του άκρου B, το οποίο μπορεί να κινηθεί μόνο οριζόντια. Το άκρο B έχει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και μια επιτροχία επιτάχυνση κάθετη στη δοκό με μέτρο $a_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2}$. Αλλά το άκρο B δεν θα επιταχυνθεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε:

$$a_{\epsilon\pi y} = a_{cmy} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2} \sin\theta = a_{cmy} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} \ell = \frac{2a_{cmy}}{\sin\theta}$$

Οπότε η σχέση (6) γράφεται:

$$N \cdot \sin\theta - T \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{3} M \frac{a_{cmy}}{\sin\theta} \quad (6^a)$$



Ας επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (4), (5) και (6^a), αντικαθιστώντας αριθμητικές τιμές (προς το ευκολότερο!)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{ολ} = M \cdot a_{cmx} \\ Mg - N = M \cdot a_{cmy} \\ N \cdot \sigma \nu \nu \theta - T \cdot \eta \mu \theta = \frac{1}{3} M \frac{a_{cmy}}{\sigma \nu \nu \theta} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0,2N = 12 \cdot a_{cmx} \\ 120 - N = 12 \cdot a_{cmy} \\ N \cdot 0,6 - 0,2N \cdot 0,8 = \frac{1}{3} 12 \frac{a_{cmy}}{0,6} \end{array} \right.$$

Από την λύση του συστήματος βρίσκουμε $a_{cmx} \approx 1,1 \text{ m/s}^2$, $a_{cmy} \approx 4,4 \text{ m/s}^2$ και $a_{\epsilon\pi} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2} \approx 7,3 \text{ m/s}^2$.

Αλλά τότε το κέντρο μάζας Κ έχει επιτάχυνση μέτρου:

$$a_{cm} = \sqrt{(a_{cmx})^2 + (a_{cmy})^2} = \sqrt{1,1^2 + 4,4^2} \text{ m/s}^2 \approx 4,54 \text{ m/s}^2$$

Σχηματίζοντας με την οριζόντια διεύθυνση γωνία ϕ , με $\epsilon\phi\phi = \frac{a_{cmy}}{a_{cmx}} = 4$.

Εξάλλου το άκρο Α έχει επιταχύνσεις:

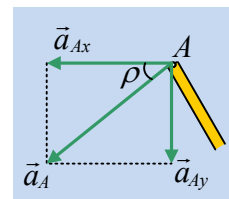
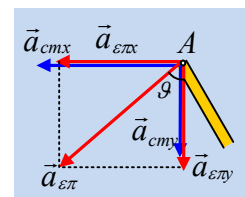
$$a_x = a_{cmx} + a_{\epsilon\pi} \cdot \eta \mu \theta = (1,1 + 7,3 \cdot 0,8) \text{ m/s}^2 \approx 6,9 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = a_{cmy} + a_{\epsilon\pi} \cdot \sigma \nu \nu \theta = (4,4 + 7,3 \cdot 0,6) \text{ m/s}^2 \approx 8,8 \text{ m/s}^2.$$

Οπότε το μέτρο της επιτάχυνσής του είναι:

$$a_A = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = \sqrt{6,9^2 + 8,8^2} \text{ m/s}^2 \approx 11,2 \text{ m/s}^2$$

Σχηματίζοντας με την οριζόντια διεύθυνση γωνία ρ , με $\epsilon\phi\rho = \frac{a_y}{a_x} \approx 1,28$



Σχόλιο:

Νομίζω ότι η προηγούμενη ανάρτηση, που το άκρο Β δεν ολισθαίνει, είναι ένα δύσκολο θέμα, το οποίο όμως θα μπορούσε να διαπραγματευθεί ένας καλός μαθητής.

Η παρούσα, έχω την αίσθηση ότι τραβάει μεγάλη ανηφόρα και δεν προσφέρεται για μαθητές, οπότε θα την αναρτήσω στο Blogspot, μόνο για Καθηγητές...

dmargaris@gmail.com