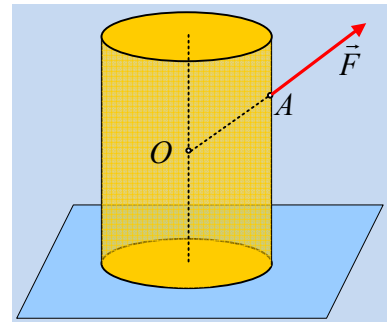


Ολίσθηση ή ανατροπή του κυλίνδρου;

Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας M , ακτίνας βάσης R και ύψους $h=4R$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu$, όπου $0,3 < \mu < 0,5$.

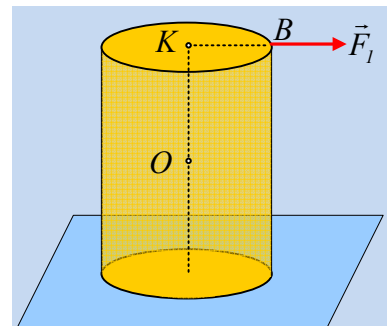
Σε μια στιγμή δέχεται μια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου $F=\mu Mg\sqrt{2}$, η οποία ασκείται σε ένα σημείο A της παράπλευρης επιφάνειάς του, το οποίο απέχει κατά R από την πάνω έδρα του και ο φορέας της περνά από το κέντρο μάζας του O .



i) Ο κύλινδρος θα:

- α) παραμένει ακίνητος.
- β) ολισθήσει χωρίς να ανατραπεί.
- γ) ανατραπεί, χωρίς να ολισθήσει.
- δ) θα ολισθήσει και θα ανατραπεί.

ii) Στο σημείο B της πάνω έδρας ασκούμε οριζόντια δύναμη F_1 , η οποία έχει την διεύθυνση της ακτίνας KB . Αν το μέτρο της ασκούμενης δύναμης αυξάνεται (ξεκινώντας από μηδενική τιμή), τι θα συμβεί πρώτα, ολίσθηση του κυλίνδρου ή ανατροπή του;

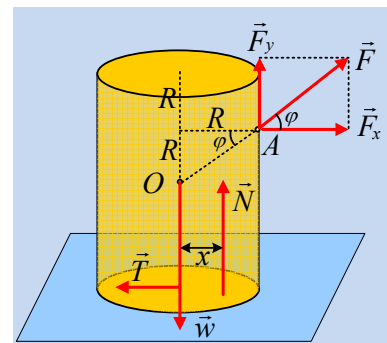


Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο όπου ο φορέας της δύναμης στήριξης (κάθετης αντίδρασης N) απέχει κατά x , από το κέντρο μάζας O , ενώ η γωνία $\varphi=45^\circ$. Αλλά τότε:

$$F_x = F_y = F \cdot \eta\mu\varphi = \mu Mg\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \mu Mg$$

Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο κύλινδρος ισορροπεί, αφού η συνισταμένη F_y είναι μικρότερη του βάρους και δεν ανυψώσει τον κύλινδρο. Αλλά τότε:



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N + F_y - W = 0 \rightarrow$$

$$N = Mg - F_y = Mg - \mu Mg = (1 - \mu)Mg$$

$$\text{Και } T_{op} = T_{ol} = \mu \cdot N = \mu \cdot (1 - \mu) \cdot Mg.$$

$$\text{Οπότε } F_x - T_{op} = \mu Mg - \mu Mg + \mu^2 Mg = \mu^2 Mg > 0$$

Και ο κύλινδρος επιταχύνεται προς τα δεξιά.

Ας υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος δεν θα ανατραπεί, οπότε $\Sigma \tau_O = 0$, οπότε:

$$T \cdot 2R + F \cdot 0 + W \cdot 0 - N \cdot x = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{2TR}{N} = \frac{2 \cdot \mu(1-\mu)Mg \cdot R}{(1-\mu)Mg} = 2\mu \cdot R < R$$

Συνεπώς η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, περνά από τη βάση του κυλίνδρου και η υπόθεσή μας είναι σωστή. (Ο κύλινδρος αρχίζει να ανατρέπεται όταν ο μοχλοβραχίονας της N γίνει ίσος με R , οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να στρέφεται γύρω από το σημείο B).

Σωστή η β) πρόταση.

- ii) Η δύναμη F_1 (όπως και η τριβή) είναι οριζόντια, οπότε από την ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = w = Mg$$

Έστω ότι αυξάνουμε σιγά-σιγά το μέτρο της οριζόντιας δύναμης F_1 .

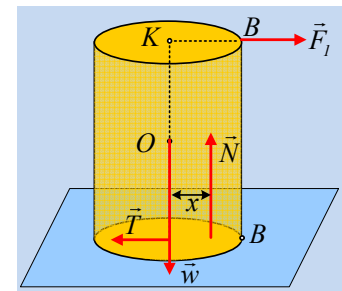
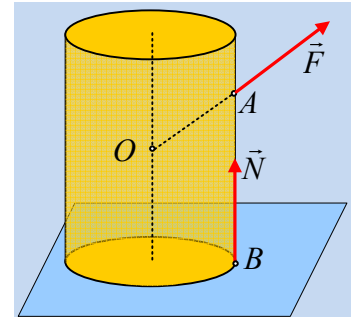
Ο κύλινδρος τείνει να ολισθήσει, όταν $F_1 = T_{op} = \mu_s \cdot N = \mu \cdot Mg$.

Ας **υποθέσουμε** τώρα ότι ενώ ο κύλινδρος τείνει να ολισθήσει, δεν ανατρέπεται, πράγμα που σημαίνει ότι ο φορέας της N , δεν έχει φτάσει στο σημείο B , αλλά περνάει από τη βάση στήριξης.

Τότε $\Sigma \tau_O = 0$ ή

$$\begin{aligned} -T \cdot 2R - F_1 \cdot 2R + N \cdot x &= 0 \rightarrow \\ x &= \frac{2TR + 2F_1 R}{N} = \frac{4TR}{N} = \frac{4 \cdot \mu Mg \cdot R}{Mg} = 4\mu \cdot R > R \end{aligned}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι πριν φτάσουμε στο σημείο να ολισθήσει ο κύλινδρος, θα ανατραπεί στρεφόμενος γύρω από το σημείο B .



Σχόλια:

- 1) Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με αντίστροφη πορεία στο ii) ερώτημα.

Έστω ο κύλινδρος τείνει να ανατραπεί πριν αρχίσει να ολισθαίνει. Τότε η κάθετη αντίδραση N ασκείται στο σημείο B , ενώ ο κύλινδρος ισορροπεί. Αλλά τότε:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \rightarrow F_1 = T_s \\ \text{Και } \Sigma \tau_O &= 0 \text{ ή } N \cdot R - F_1 \cdot 2R - T_s \cdot 2R = 0 \rightarrow \\ N &= 4T_s \rightarrow T_s = \frac{1}{4} Mg. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση επιβεβαιώνει ότι η ασκούμενη τριβή είναι στατική, αφού η οριακή τριβή παίρνει τιμές μεγαλύτερες από $0,3Mg$.

- 2) Στην περίπτωση που έχουμε εξασφαλίσει ότι ο κύλινδρος δεν επιταχύνεται, όπως στην προηγούμενη υπόθεσή μας, η εξίσωση $\Sigma \tau = 0$, θα ισχύει ως προς οποιοδήποτε σημείο (αφού έχουμε ισορροπία). Θα μπορούσαμε δηλαδή να μην πάρουμε τις ροπές ως προς το κέντρο μάζας O , αλλά ως προς το σημείο B .

$$\Sigma \tau_B = 0 \rightarrow w \cdot R - F_I \cdot 4R = 0 \rightarrow F_I = \frac{1}{4} Mg$$

Και να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Προσοχή όμως, αυτό δεν θα μπορούσαμε να το επικαλεστούμε στο πρώτο ερώτημα, αφού ο κύλινδρος επιταχύνεται. Οπότε το αν στρέφεται ή όχι, θα μας το εξασφαλίσει η συνολική ροπή ως προς το κέντρο μάζας Ο και όχι ως προς οποιοδήποτε σημείο.

dmargaris@sch.gr