

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

PROBLEMAS RESUELTOS DE ANUALIDADES ORDINARIAS

1. Una mina en explotación tiene una producción anual de 600 000 dólares y se calcula que se agotará en 5 años.

¿Cuál es el valor actual de la producción si el rendimiento del dinero es de 11% anual?

SOLUCION

Es una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata:

Es **simple**, porque la producción es anual y la tasa de interés es anual, es **cierta** porque se conoce su duración o tiempo de explotación, es **vencida** porque se considera que la producción se determina al final de cada año, y es **inmediata**, porque la primera producción se recibirá en el primer periodo de explotación.

DATOS

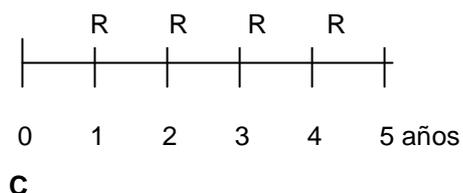
$R = \$600\,000$ (es la producción anual o renta)

$n = 5$ años (tiempo de explotación de la mina)

$i = 11\%$ anual (tasa de interés por año o periodo de explotación)

$C = ?$ (valor actual de la producción de los 5 años)

DIAGRAMA TIEMPO - VALOR



RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

El valor actual de la producción de la mina equivale al valor actual de una anualidad ordinaria:

$$C = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$C = 600000 \left[\frac{1 - (1+0.11)^{-5}}{0.11} \right]$$

$$C = 600000 \left[\frac{1 - 0.593451328}{0.11} \right]$$

$$C = 600000 \left[\frac{0.406548671}{0.11} \right]$$

$$C = 600000 [3.695897018]$$

C = 2 217 538.21 (valor actual de la producción de la mina en los 5 años de explotación)

6. Calcule el monto y el valor actual de las siguientes anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas:
- a) \$20 000 semestrales durante 4 años y medio a 10% capitalizable semestralmente.
 - b) \$40 000 anuales durante 6 años a una tasa anual de 14%.
 - c) \$500 mensuales durante 7 años y 5 meses, a una tasa anual de 8% capitalizable mensualmente.

M = ?

C = ?

- a) \$20 000 semestrales durante 4 años y medio a 10% capitalizable semestralmente.

DATOS

R = \$20 000 (importe de la renta o pago periódico)

plazo = 4 años y medio

j = 10% (tasa nominal anual)

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

$m = 2$ (frecuencia de conversión dos veces al año)

$n = 4.5$ años (2 semestres por año) = 9 semestres

$$i = \frac{j}{m} = \frac{10\%}{2} = 5\%$$

$$i = 0.05$$

SOLUCION

MONTO

VALOR ACTUAL

$$M = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$C = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$M = 20000 \left[\frac{(1+0.05)^9 - 1}{0.05} \right]$$

$$C = 20000 \left[\frac{1 - (1+0.05)^{-9}}{0.05} \right]$$

$$M = 20000 \left[\frac{1.551328216 - 1}{0.05} \right]$$

$$C = 20000 \left[\frac{1 - 0.644608916}{0.05} \right]$$

$$M = 20000 \left[\frac{0.551328216}{0.05} \right]$$

$$C = 20000 \left[\frac{0.355391083}{0.05} \right]$$

$$M = 20000 [11.02656432]$$

$$C = 20000 [7.107821676]$$

$$\mathbf{M = 220\,531.29}$$

$$\mathbf{C = 142\,156.43}$$

b) \$40 000 anuales durante 6 años a una tasa anual de 14%.

DATOS

$R = \$40\,000$ (importe de la renta o pago periódico)

plazo = 6 años

$j = 14\%$ (tasa nominal anual)

$m = 1$ (frecuencia de conversión una vez al año)

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

$$n = 6 \text{ años}(1 \text{ año}) = 6 \text{ años}$$

$$i = \frac{j}{m} = \frac{14\%}{1} = 14\%$$

$$i = 0.14$$

SOLUCION

MONTO	VALOR ACTUAL
$M = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$	$C = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$
$M = 40000 \left[\frac{(1+0.14)^6 - 1}{0.14} \right]$	$C = 40000 \left[\frac{1 - (1+0.14)^{-6}}{0.14} \right]$
$M = 40000 \left[\frac{2.194972624 - 1}{0.14} \right]$	$C = 40000 \left[\frac{1 - 0.455586547}{0.14} \right]$
$M = 40000 \left[\frac{1.194972624}{0.14} \right]$	$C = 40000 \left[\frac{0.544413452}{0.14} \right]$
$M = 40000[15.67837589]$	$C = 40000[3.88667517]$
M = 627 135.04	C = 155 546.70

c) \$500 mensuales durante 7 años y 5 meses, a una tasa anual de 8% capitalizable mensualmente.

DATOS

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

$R = \$500$ (importe de la renta o pago periódico)

plazo = 7 años y 5 meses

$j = 8\%$ (tasa nominal anual)

$m = 12$ (frecuencia de conversión doce veces al año)

$n = (7 \text{ años})(12 \text{ meses por año}) + 5 \text{ meses} = 89 \text{ meses}$

$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{12} = \frac{2}{3}\%$$

$$i = 0.00666\bar{6}$$

SOLUCION

MONTO

VALOR ACTUAL

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

$$M = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$M = 500 \left[\frac{\left(1 + \frac{0.02}{3}\right)^{89} - 1}{\frac{0.02}{3}} \right]$$

$$M = 500 \left[\frac{1.806451281 - 1}{\frac{0.02}{3}} \right]$$

$$M = 500 \left[\frac{0.806451281}{\frac{0.02}{3}} \right]$$

$$M = 500 [120.9676921]$$

$$\mathbf{M = 60\ 483.85}$$

$$C = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$C = 500 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.02}{3}\right)^{-89}}{\frac{0.02}{3}} \right]$$

$$C = 500 \left[\frac{1 - 0.55357153}{\frac{0.02}{3}} \right]$$

$$C = 500 \left[\frac{0.446428469}{\frac{0.02}{3}} \right]$$

$$C = 500 [66.96427044]$$

$$\mathbf{C = 33\ 482.14}$$

7. El señor López deposita \$150 000 cada fin de año en una cuenta de ahorros que abona 4% de interés. ¿Cuánto habrá ahorrado al hacer el cuarto depósito?

DATOS

R = \$150 000 (importe de la renta o pago periódico)

plazo = 4 años

j = 4% (tasa nominal anual)

m = 1 (frecuencia de conversión una vez al año)

n = (4 años)(1 vez por año) = 4 años

$$i = \frac{j}{m} = \frac{4\%}{1} = 4\%$$

$$i = 0.04$$

SOLUCION

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

$$M = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$M = 150000 \left[\frac{(1+0.04)^4 - 1}{0.04} \right]$$

$$M = 150000 \left[\frac{1.16985856 - 1}{0.04} \right]$$

$$M = 150000 \left[\frac{0.16985856}{0.04} \right]$$

$$M = 150000[4.246464]$$

$$\mathbf{M = 636\,969.60}$$

8. Calcule el valor actual de un terreno, con un interés de 15% con capitalización mensual, si se vendió con las siguientes condiciones:

- \$40 000 de enganche
- mensualidades vencidas por \$ 2 250 durante 4.25 años
- un pago final de \$25 000 un mes después de la última mensualidad

SOLUCION

Al elaborar el diagrama tiempo - valor se observa que hay 51 pagos iguales de \$2 250 cada uno y que corresponden a una anualidad ordinaria, por lo que esta parte se resuelve con la fórmula de valor actual de la anualidad ordinaria. El enganche y el último pago son diferentes, por lo que se aplica en esas cantidades la fórmula de valor actual a interés compuesto.

DATOS

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

$j = 15\%$ (tasa nominal anual)

$m = 12$ (12 capitalizaciones por año)

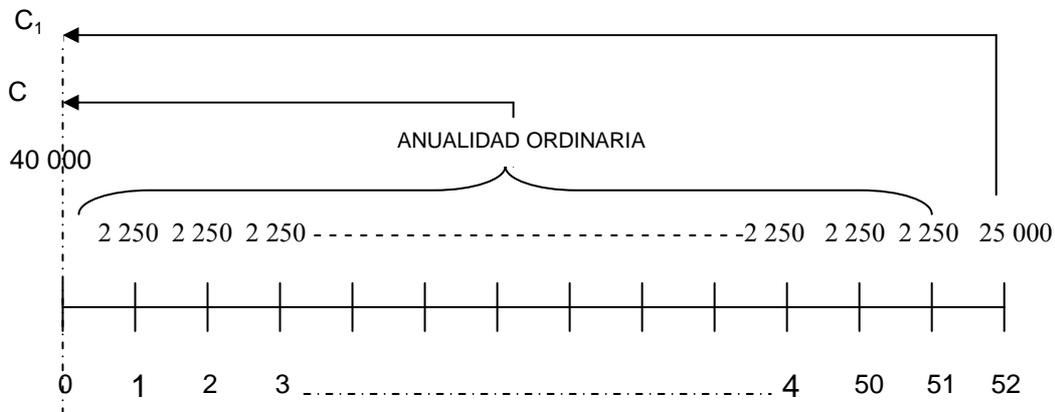
$$i = \frac{j}{m} = \frac{15\%}{12} = 1.25\%$$
$$i = 0.0125$$

$R = \$2\,250$ (Renta o pago periódico para los 4.25 años, que

son 51 meses)

DIAGRAMA TIEMPO-VALOR

Se selecciona como fecha focal el año 0, y se formula la ecuación de valores equivalentes:



ECUACIÓN DE VALORES EQUIVALENTES

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

$$X = \text{enganche} + C + C_1$$

$$X = 40000 + R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] + M(1+i)^{-n}$$

$$X = 40000 + 2250 \left[\frac{1 - (1+0.0125)^{-51}}{0.0125} \right] + 25000(1+0.0125)^{-52}$$

$$X = 40000 + 2250[37.54358099] + 25000(0.524153321)$$

$$X = 40000 + 84473.05723 + 13103.83303$$

$$X = \$137576.89$$

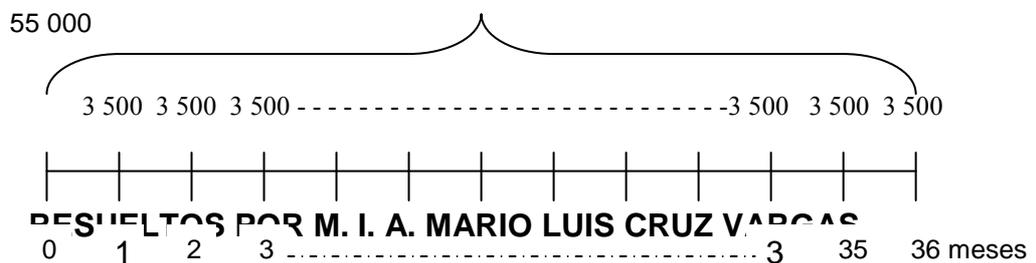
Valor de contado del terreno = \$ 137 576.89

10. En la compra de un automóvil nuevo que cuesta \$145 000 al licenciado Ugalde le reciben su automóvil usado en \$55 000. ¿Le convendría pagar el resto en 36 mensualidades vencidas de \$3 500 si lo más que se desea pagar de interés es 2% mensual?

SOLUCION

Se compara el valor del nuevo automóvil (\$145 000) con el valor en que le tomaron en cuenta su auto usado más el valor presente de los 36 pagos mensuales de \$3 500 que va a efectuar, con el 2% mensual. Para esto, se suma el valor actual de una anualidad ordinaria de 36 pagos más el valor en que le tomaron en cuenta su auto usado:

DIAGRAMA TIEMPO-VALOR



RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

ECUACIÓN DE VALORES EQUIVALENTES

$$X = \text{enganche} + C$$

$$X = 55000 + R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$X = 55000 + 3500 \left[\frac{1 - (1 + 0.02)^{-36}}{0.02} \right]$$

$$X = 55000 + 3500[25.48884248]$$

$$X = 55000 + 89210.94869$$

$$\mathbf{X = \$144\ 210.95}$$

De este resultado se aprecia que es mejor pagarlo con el plan de 36 mensualidades, pues si lo paga de contado, entonces perdería la diferencia, es decir, \$789.05 (145 000 – 144 210.95)

13. Una empresa contrata una deuda de \$100 000 con un banco. Si éste carga a este tipo de préstamos 22% anual convertible mensualmente, ¿cuánto tendría que pagar mensualmente la empresa para saldar su deuda dentro de 15 meses?

DATOS

C = \$100 000 (el importe de la deuda es un valor actual)

j = 22% (tasa nominal anual)

m = 12 (frecuencia de conversión 12 meses por año)

plazo = 15 meses

n = 15 meses (número de pagos en total)

R = ? (el pago mensual es la Renta, y se debe calcular)

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

SOLUCION

Se considera una anualidad ordinaria porque los pagos son al final de cada mes. Se utiliza la fórmula de valor actual de la anualidad ordinaria y se despeja la Renta:

$$C = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \longrightarrow R = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}}$$
$$R = \frac{(100000) \left(\frac{0.22}{12} \right)}{1 - \left(1 + \frac{0.22}{12} \right)^{-15}}$$
$$R = \frac{1833.333333}{1 - 0.76146615}$$
$$R = \frac{1833.333333}{0.238533849}$$

Pago mensual para saldar la \longrightarrow **R = 7 685.84**

14. El señor Luna adquirió una casa en condominio y acordó pagar, aparte de cierta cantidad mensual, anualidades de \$95 000. Si acaba de realizar el trato hoy mismo, de manera que debe liquidar la primera anualidad exactamente dentro de un año, y decide hacer depósitos trimestrales en un fondo de inversión que paga 1% trimestral, ¿de cuánto tendrían que ser sus depósitos para poder acumular a fin de año la cantidad que necesita?

DATOS

M = \$95 000 (La cantidad a pagar dentro de un año es un monto)

i = 1% trimestral (tasa de interés por periodo)

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

trimestral)

$m = 4$ (frecuencia de conversión 4 trimestres por año)

plazo = 1 año (tiempo para liquidar la cantidad mencionada)

$n = 4$ trimestres (1 año x 4 trimestres por año)

$R = ?$ (importe de los depósitos trimestrales o renta)

SOLUCION

De la fórmula del monto de la anualidad ordinaria se despeja la Renta o pago periódico)

$$M = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$95000 = R \left[\frac{(1+0.01)^4 - 1}{0.01} \right]$$

$$95000 = R \left[\frac{1.04060401 - 1}{0.01} \right]$$

$$95000 = R \left[\frac{0.04060401}{0.01} \right]$$

$$95000 = R[4.060401]$$

$$R = \frac{95000}{4.060401}$$

$$R = 23\,396.70 \leftarrow \text{(importe de cada depósito)}$$

15. Una persona contrató una deuda que le obliga a pagar \$150 000 el 1o. de enero de cada uno de varios años. Como ahora se da cuenta de que le sería más fácil pagar mediante abonos trimestrales vencidos, ¿de cuánto tendrían que ser los pagos en el nuevo plan, si se considera un interés de 8% convertible trimestralmente?

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

DATOS

$C = \$150\,000$ (La deuda es un valor actual al 1 de enero)

$j = 8\%$ (tasa nominal anual)

$m = 4$ (frecuencia de conversión 4 trimestres por año)

Plazo = 1 año

$n = 4$ trimestres (1 año x 4 trimestres por año)

$R = ?$ (valor de cada abono trimestral o renta)

SOLUCION

De la fórmula del valor actual de la anualidad ordinaria se

despeja la Renta:

$$C = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$150000 = R \left[\frac{1 - (1 + 0.02)^{-4}}{0.02} \right]$$

$$150000 = R \left[\frac{1 - 0.923845426}{0.02} \right]$$

$$150000 = R \left[\frac{0.076154573}{0.02} \right]$$

$$150000 = R[3.807728699]$$

$$R = \frac{150000}{3.807728699}$$

$$R = \mathbf{39\,393.56} \leftarrow \text{(valor de cada abono trimestral)}$$

17. Para saldar un préstamo de \$785 000 contratado hoy, el deudor acuerda hacer 5 pagos semestrales iguales y vencidos y, finalmente, un pago único de \$300 000, 2 años después de realizado el último pago semestral. ¿De cuánto deberá ser cada uno de los pagos iguales, si el interés es de 25% capitalizable semestralmente?

RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

DATOS

$C = \$785\ 000$ (el importe del préstamo es valor actual)

$R = ?$ (son los pagos semestrales iguales y vencidos, o renta)

$M = \$300\ 000$ (el último pago se considera monto o valor futuro)

$j = 25\%$ (tasa nominal anual)

$m = 2$ (frecuencia de conversión 2 semestres por año)

SOLUCION

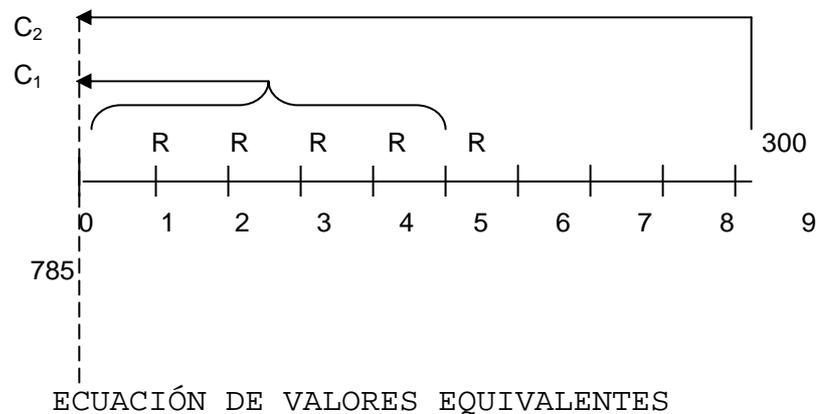
La tasa de interés compuesto es $25\%/2 = 12.50\% = 0.125$

Se calculan el valor presente equivalente de los 5

depósitos semestrales (cuyo valor se desconoce) y el valor actual del último pago con la fórmula del valor actual a interés compuesto. Los valores actuales

mencionados se igualan al importe de la deuda en una ecuación, la cual se despeja para determinar el valor de

R . El diagrama tiempo-valor es el siguiente:



RESUELTOS POR M. I. A. MARIO LUIS CRUZ VARGAS

$$785000 = C_1 + C_2$$

$$785000 = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] + M(1+i)^{-n}$$

$$785000 = R \left[\frac{1 - (1+0.125)^{-5}}{0.125} \right] + 300000(1+0.125)^{-5}$$

$$785000 = R[3.560568342] + 300000(0.346439416)$$

$$\frac{785000 - 300000(0.346439416)}{3.560568342} = R$$

$$R = 191280.74$$

(El valor de cada pago semestral es de \$191 280.74)