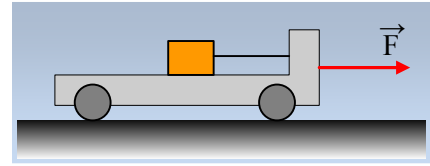


Ένα σύστημα επιταχύνεται

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο σύρεται ένα αμαξίδιο μάζας 1kg, με την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης $F=12\text{N}$. Πάνω στο αμαξίδιο, έχει προσδεθεί με νήμα ένα σώμα Σ , μάζας 0,2kg. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι $\mu=0,5$. Κάποια στιγμή $t_0=0$, το καροτσάκι έχει ταχύτητα 2m/s .



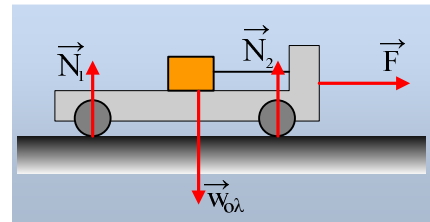
- i) Να βρεθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος τη στιγμή αυτή.
- ii) Αν την παραπάνω χρονική στιγμή, κοπεί το νήμα:
 - α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα και να τις διακρίνετε σε εσωτερικές και εξωτερικές για το σύστημα αμαξίδιο-σώμα Σ .
 - β) Να υπολογιστεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του αμαξιδίου 1s, μετά το κόψιμο του νήματος. Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις για το σώμα Σ ;
 - γ) Να βρεθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος τη στιγμή αυτή.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απαντήσεις:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα, όπου στον κατακόρυφο άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_1 + N_2 - (M + m)g = 0$$



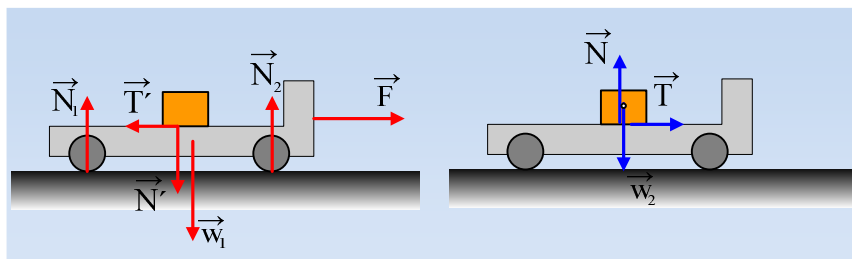
- i) Η ορμή του συστήματος είναι ένα διάνυσμα οριζόντιο με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

$$P_{o\lambda} = (M + m)v_0 = (1 + 0,2) \cdot 2\text{kgm/s} = 2,4\text{kgm/s}$$

$$\text{Ενώ } \frac{\Delta \vec{P}_{o\lambda}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} \rightarrow \frac{\Delta P_{o\lambda}}{\Delta t} = F = 12\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

- ii) Μόλις κοπεί το νήμα, οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα, είναι αυτές του παρακάτω σχήματος:



Όπου αριστερά οι δυνάμεις στο αμαξίδιο και δεξιά στο σώμα Σ .

α) Εξωτερικές για το σύστημά μας είναι οι δυνάμεις: τα βάρη w_1 και w_2 , οι αντιδράσεις του επιπέδου N_1 και N_2 και η δύναμη F .

Εσωτερικές οι: Τριβή T και η αντίδρασή της T' , και οι κάθετες αντιδράσεις N και N' .

β) Το ερώτημα που ανακύπτει είναι, αν η τριβή που θα εμφανιστεί μεταξύ αμαξιδίου και σώματος είναι στατική τριβή (οπότε τα σώματα κινούνται μαζί) ή τριβή ολίσθησης, οπότε το σώμα Σ ολισθαίνει πάνω στο αμαξίδιο. Ελέγχουμε, υποθέτοντας ότι τα δυο σώματα κινούνται μαζί.

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για κάθε σώμα παίρνουμε:

$$\text{Αμαξίδιο: } \Sigma F_x = M \cdot a \rightarrow F - T' = M \cdot a \quad (1)$$

$$\text{Σώμα } \Sigma: \Sigma F_x = m \cdot a \rightarrow T = m \cdot a \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$F = (M + m) \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{M + m} \xrightarrow{(2)} T = \frac{m}{M + m} F = \frac{0,2}{1 + 0,2} 12 N = 2 N$$

Αλλά η τριβή που μπορεί να ασκηθεί μεταξύ των δύο σωμάτων μπορεί να πάρει μέγιστη τιμή $T_{\max} = T_{\text{ολ}} = \mu N = \mu mg = 0,5 \cdot 0,2 \cdot 10 N = 1 N$, συνεπώς η υπόθεσή μας, ότι τα σώματα συνεχίζουν να κινούνται μαζί, ήταν εσφαλμένη. Το σώμα Σ γλιστράει πάνω στο αμαξίδιο και η ασκούμενη τριβή, είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο $T = 0,4 N$. Αλλά τότε από τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\text{Αμαξίδιο: } a_1 = \frac{F - T'}{M} = \frac{12 N - 1 N}{1 kg} = 11 m/s^2$$

$$\text{Σώμα } \Sigma: a_2 = \frac{T}{m} = \frac{1}{0,2} m/s^2 = 5 m/s^2$$

Και οι ταχύτητες που θα έχουν τα σώματα τη στιγμή $t_1 = 1 s$ θα είναι:

$$v_1 = v_0 + a_1 \cdot t_1 = 2 m/s + 11 \cdot 1 m/s = 13 m/s$$

$$v_2 = v_0 + a_2 \cdot t_2 = 2 m/s + 5 \cdot 1 m/s = 7 m/s.$$

Με βάση αυτά θα έχουμε:

$$\text{Για το αμαξίδιο: } P_1 = M v_1 = 1 \cdot 13 kgm/s = 13 kgm/s \text{ και } \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F} \rightarrow \frac{\Delta P_1}{\Delta t} = F - T' = 11 kg \cdot m/s^2.$$

$$\text{Σώμα } \Sigma: P_2 = m v_2 = 0,2 \cdot 7 kgm/s = 1,4 kgm/s \text{ και } \frac{\Delta \vec{P}_2}{\Delta t} = \Sigma \vec{F} \rightarrow \frac{\Delta P_2}{\Delta t} = T = 1 kg \cdot m/s^2$$

γ) Η ορμή του συστήματος είναι:

$$\vec{P}_{\text{ολ}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \rightarrow P_{\text{ολ}} = P_1 + P_2 = (13 + 1,4) kgm/s = 14,4 kg \cdot m/s$$

Κι ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος:

$$\frac{\Delta \vec{P}_{o\lambda}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{P}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{P}_2}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta P_{o\lambda}}{\Delta t} = \frac{\Delta P_1}{\Delta t} + \frac{\Delta P_2}{\Delta t} = (11+1)kg \cdot m/s^2 = 12kg \cdot m/s^2$$

Προφανώς και τα δύο διανύσματα (ορμή και ρυθμός μεταβολής της ορμής) είναι διανύσματα οριζόντια με φορά προς τα δεξιά.

Σχόλια:

1) Από τη στιγμή που έχουμε ένα σύστημα, το οποίο δέχεται εξωτερική δύναμη $F=12N$, ισχύει:

$$\frac{\Delta \vec{P}_{o\lambda}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} \rightarrow \frac{\Delta P_{o\lambda}}{\Delta t} = F \rightarrow \Delta P_{o\lambda} = F \cdot \Delta t \rightarrow P_{t_1} - P_{t_0} = F \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$P_{t_1} = P_{t_0} + F \cdot \Delta t = 2,4kgm/s + 12 \cdot 1kgm/s = 14,4kg \cdot m/s$$

$$\text{Ενώ } \frac{\Delta \vec{P}_{o\lambda}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} \rightarrow \frac{\Delta P_{o\lambda}}{\Delta t} = F = 12kg \cdot m/s^2.$$

Την ίδια λογική θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε για να υπολογίσουμε ορμές για κάθε σώμα, στο β) υποερώτημα:

$$\frac{\Delta \vec{P}_1}{\Delta t} = \Sigma \vec{F} \rightarrow \frac{\Delta P_1}{\Delta t} = F - T' \rightarrow \Delta P_1 = (F - T') \cdot \Delta t \rightarrow P_1 - P_{t_0} = (F - T') \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$P_1 = Mv_0 + (F - T') \cdot \Delta t = 2kgm/s + (12 - 1)1kgm/s = 13kg \cdot m/s$$

Ομοίως για το σώμα Σ:

$$\frac{\Delta \vec{P}_2}{\Delta t} = \Sigma \vec{F} \rightarrow \frac{\Delta P_2}{\Delta t} = T \rightarrow \Delta P_2 = T \cdot \Delta t \rightarrow P_2 - P_{t_0} = T \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$P_2 = mv_0 + T \cdot \Delta t = 0,4kgm/s + 1 \cdot 1kgm/s = 1,4kg \cdot m/s$$

2) Δεν μας δόθηκε ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής, οπότε δεχτήκαμε ότι συμπίπτει με το συντελεστή τριβής ολίσθησης. Δεχτήκαμε με άλλα λόγια ότι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι ίση με την τριβή ολίσθησης.

dmargaris@sch.gr