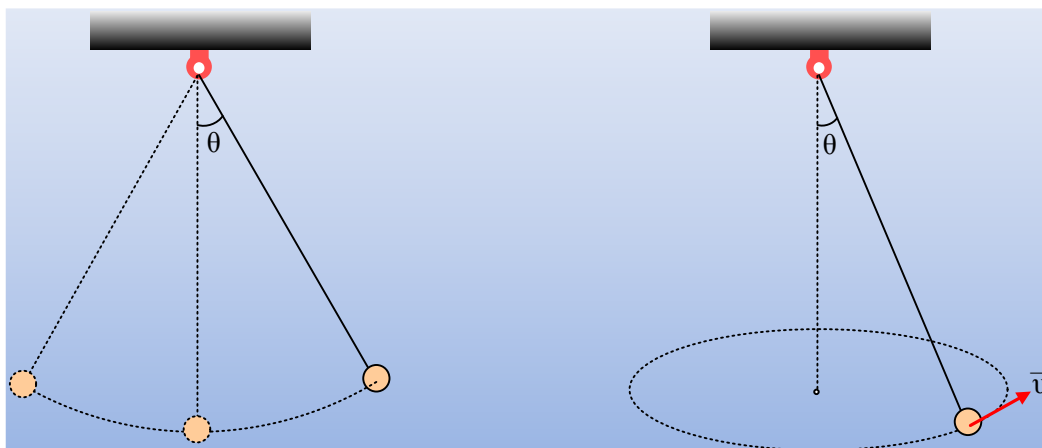


Η συχνότητα και η ταχύτητα.



Στο άκρο ενός νήματος μήκους 1m, έχουμε δέσει ένα μικρό σώμα. Εκτρέπουμε το σώμα ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία $\theta=30^\circ$ με την κατακόρυφο και το αφήνουμε να κινηθεί. Το σώμα εκτελεί 5 πλήρεις αιωρήσεις σε χρονικό διάστημα 10s.

- i) Να βρεθεί η συχνότητα της κίνησης, καθώς και ο μέγιστος ρυθμός αύξησης του μέτρου της ταχύτητας του σώματος.
- ii) Επαναλαμβάνουμε την εκτροπή του σώματος, αλλά τώρα θέλουμε το σώμα να διαγράφει οριζόντιο κύκλο ενώ το νήμα να σχηματίζει ξανά γωνία θ , με την κατακόρυφο. Ποια οριζόντια ταχύτητα πρέπει να προσδώσουμε στο σώμα, για να συμβεί αυτό;
- iii) Να βρεθεί η συχνότητα της κίνησης αυτής, καθώς και η επιτάχυνση του σώματος.

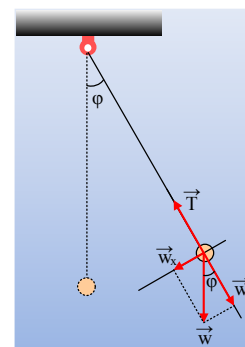
Απάντηση:

- i) Η συχνότητα της περιοδικής κίνησης (ταλάντωσης) είναι ίση:

$$f_1 = \frac{N}{t} = \frac{5}{10s} = 0,5s^{-1} = 0,5Hz$$

Στο διπλανό σχήμα έχουμε πάρει το σώμα σε μια τυχαία θέση, στη διάρκεια της ταλάντωσης που εκτελεί και σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, το βάρος και την τάση του νήματος. Αναλύουμε το βάρος σε δυο άξονες, στον άξονα y στη διεύθυνση του νήματος και στον άξονα x, κάθετο στο νήμα, συνεπώς στη διεύθυνση της εφαπτομένης του τόξου που διαγράφει το σώμα. Αλλά τότε έχουμε ότι η συνισταμένη στον άξονα y, στη διεύθυνση της ακτίνας, θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης και θα μεταβάλλει τη διεύθυνση της ταχύτητας, ενώ η συνισταμένη στην εφαπτομενική διεύθυνση $\Sigma F_x = \Sigma F_{\epsilon\varphi} = w_x = mg \cdot \eta\mu\varphi$ προκαλεί την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας ή όπως αλλιώς λέμε, προκαλεί την επιτροχία επιτάχυνση. Έτσι γράφουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{\epsilon\pi} \rightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi = m \frac{d|v|}{dt} \rightarrow$$



$$\frac{d|v|}{dt} = g \cdot \eta \mu \vartheta$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας γίνεται μέγιστος στην περίπτωση που το $\eta \mu \vartheta$ γίνεται μέγιστο. Αυτό όμως θα συμβεί στην αρχική θέση που η εκτροπή είναι $\theta = 30^\circ$ και έχουμε τη μεγαλύτερη γωνία συνεπώς και τη μέγιστη τιμή του ημιτόνου. Με άλλα λόγια μόλις αφεθεί το σώμα να κινηθεί, θα αποκτήσει και την μέγιστη επιτάχυνση (η οποία τη στιγμή αυτή θα είναι και υπεύθυνη για την αύξηση του μέτρου της ταχύτητας).

$$\left(\frac{d|v|}{dt} \right)_{\max} = g \cdot \eta \mu \vartheta = 10 \cdot \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 = 5 \text{ m/s}^2$$

- ii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όταν εκτελεί την ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από το σημείο O, με το νήμα να σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ με την κατακόρυφη.

Στην κατακόρυφη θέση το σώμα ισορροπεί, συνεπώς $\Sigma F_y = 0$ ή

$$T_y = w \rightarrow T \cdot \sin \theta = mg \quad (1)$$

Στην οριζόντια διεύθυνση $\Sigma F_x = F_k = m \frac{v^2}{R} \rightarrow$

$$T \cdot \eta \mu \vartheta = m \frac{v^2}{R} \quad (2)$$

Με διαίρεση των σχέσεων (2) και (1) παίρνουμε:

$$\frac{\eta \mu \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{m \frac{v^2}{R}}{mg} \rightarrow v = \sqrt{Rg \cdot \frac{\eta \mu \vartheta}{\sin \vartheta}} = \sqrt{\frac{g \ell \eta \mu^2 \vartheta}{\sin \vartheta}} = \eta \mu \vartheta \sqrt{\frac{g \ell}{\sin \vartheta}}$$

$$\text{Αφού } \eta \mu \vartheta = \frac{R}{\ell} \rightarrow R = \ell \eta \mu \vartheta$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε:

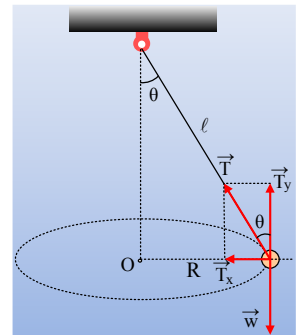
$$v = \eta \mu \vartheta \sqrt{\frac{g \ell}{\sin \vartheta}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 1}{\sqrt{3}}} \text{ m/s} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}} \text{ m/s} = 1,7 \text{ m/s}$$

- iii) Για την (γραμμική) ταχύτητα έχουμε:

$$v = 2\pi R f_2 \rightarrow f_2 = \frac{v}{2\pi R} = \frac{v}{2\pi \ell \eta \mu \vartheta} \rightarrow$$

$$f_2 = \frac{v}{2\pi \ell \eta \mu \vartheta} = \frac{1,7}{2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} \text{ Hz} = 0,54 \text{ Hz}$$

Ενώ για την επιτάχυνση του σώματος:

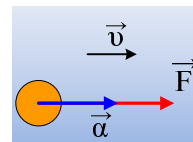


$$a = a_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{\ell \eta \mu \theta} = \frac{1,7^2}{1 \cdot \frac{1}{2}} m/s^2 \approx 5,8 m/s^2$$

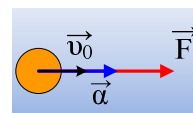
Σχόλια:

1) Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα γράφεται $\vec{\Sigma F} = m\vec{a}$, πράγμα που μας λέει ότι το σώμα αποκτά **πάντα** επιτάχυνση στην διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης. Το ποια κίνηση θα πραγματοποιήσει το σώμα, εξαρτάται όχι μόνο από την επιτάχυνση, αλλά και από την (αρχική) ταχύτητα του σώματος. Ας το δούμε λίγο αναλυτικότερα:

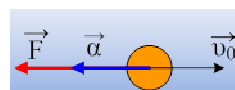
α) Αν σε ένα ελεύθερο ακίνητο σώμα ασκηθεί μια δύναμη, το σώμα θα αρχίσει να επιταχύνεται (και να κινείται) στη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης. Από εκεί και πέρα το τι κίνηση θα κάνει, εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της δύναμης. Έτσι στην περίπτωση που η δύναμη είναι **σταθερή** (μέτρο και κατεύθυνση) το σώμα θα εκτελέσει **ευθύγραμμη** ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.



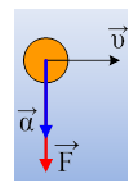
β) Σε ένα ελεύθερο σώμα που κινείται έχοντας κάποια στιγμή μια ταχύτητα v_0 , ασκείται μια δύναμη της ίδιας κατεύθυνσης. Τότε η κατάσταση είναι όπως στο διπλανό σχήμα και η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα θα αυξήσει το **μέτρο** της ταχύτητας. Αν τώρα η δύναμη είναι **σταθερή** (μέτρο και κατεύθυνση) το σώμα θα εκτελέσει **ευθύγραμμη** ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με αρχική ταχύτητα.



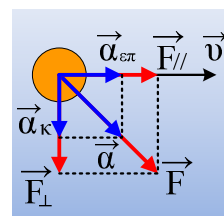
γ) Σε ένα σώμα που κινείται έχοντας κάποια στιγμή μια ταχύτητα v_0 , ασκείται μια δύναμη αντίθετης κατεύθυνσης. Στο σχήμα βλέπουμε την κατάσταση, όπου η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα θα μειώσει το **μέτρο** της ταχύτητας. Αν τώρα η δύναμη είναι **σταθερή** (μέτρο και κατεύθυνση) το σώμα θα εκτελέσει **ευθύγραμμη** ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.



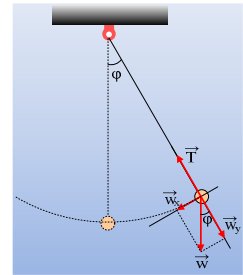
δ) Αν η (συνισταμένη) δύναμη που θα ασκηθεί κάποια στιγμή σε ένα σώμα που κινείται με ταχύτητα v , είναι κάθετη στην ταχύτητα, τότε η επιτάχυνση είναι κεντρομόλος και θα μεταβάλλει μόνο την κατεύθυνση της ταχύτητας και όχι το μέτρο της. Αν δε αυτό, συνεχιστεί για κάποιο χρονικό διάστημα (να είναι διαρκώς η δύναμη κάθετη στην ταχύτητα, διατηρώντας και σταθερό μέτρο), η κίνηση του σώματος θα είναι ομαλή κυκλική.



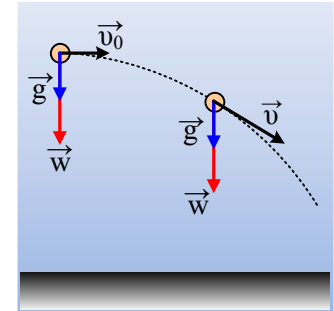
ε) Αν σε ένα ελεύθερο σώμα, που μια στιγμή κινείται με κάποια ταχύτητα, ασκηθεί μια δύναμη η οποία σχηματίζει γωνία θ με την ταχύτητα, όπου $\theta \neq 90^\circ$, τότε μπορούμε να αναλύσουμε τη δύναμη σε δυο συνιστώσες. Μια στη διεύθυνση της ταχύτητας $F_{//}$ η οποία θα προκαλέσει επιτάχυνση, ονομάζεται και επιτροχία, η οποία θα μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας και μια σε κάθετη προς την ταχύτητα διεύθυνση $F_{\perp}$ η οποία θα μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας. Προφανώς η κίνηση θα είναι καμπυλόγραμμη. Ποιας μορφής θα είναι η καμπυλόγραμμη αυτή κίνηση, προφανώς εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της δύναμης.



- 2) Στην πρώτη κίνηση του εκκρεμούς το σώμα θα κινηθεί σε κυκλική τροχιά και η κίνηση θα είναι κυκλική επιταχυνόμενη. Η συνιστώσα του βάρους στη διεύθυνση της εφαπτομένης του κύκλου, θα προκαλέσει την αύξηση του μέτρου της ταχύτητας, ενώ η συνισταμένη στη διεύθυνση της ακτίνας ($T - mg \cdot \sin \varphi$) θα είναι η κεντρομόλος, η οποία και θα προκαλέσει κεντρομόλο επιτάχυνση που θα μεταβάλλει την κατεύθυνση της ταχύτητας.



- 3) Αν εκτοξεύσουμε ένα σώμα οριζόντια, στην αρχική θέση το βάρος είναι κάθετο στην αρχική ταχύτητα, πράγμα που σημαίνει ότι θα προκαλέσει μόνο αλλαγή στην κατεύθυνση της ταχύτητας. Όμως προσοχή!! Η ασκούμενη δύναμη (το βάρος) είναι μια σταθερή δύναμη, οπότε μετά από λίγο δεν θα είναι πλέον κάθετη στην ταχύτητα, οπότε θα μεταβάλλει και το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας.



Προφανώς η κίνηση είναι η γνωστή μας οριζόντια βολή και η τροχιά είναι παραβολική.

dmargaris@sch.gr