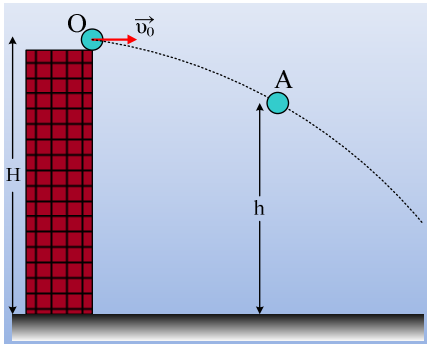
Η μεταβολή της ταχύτητας και η ισχύς.

Από ένα σημείο Ο στην ταράτσα ενός ψηλού κτηρίου σε ύψος H=80m, εκτοξεύεται οριζόντια ένα σώμα μάζας m=0,2kg με αρχική ταχύτητα υ_0=20m/s τη στιγμή t_0=0. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα ενώ g=10m/s^2.



i) Ποια χρονική στιγμή το σώμα περνάει από ένα σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος h=60m από το έδαφος;

ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος στη θέση Α.

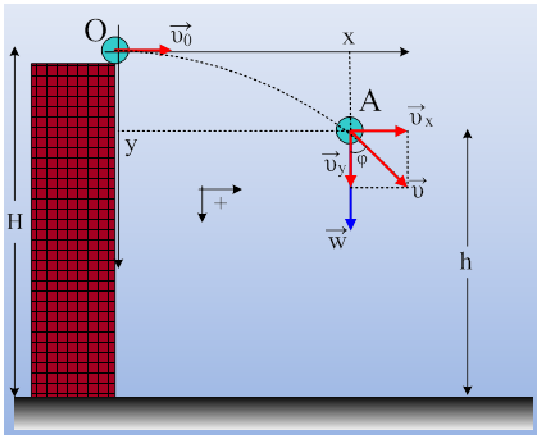
iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ταχύτητας του σώματος μεταξύ των σημείων Ο και Α.

iv) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας στη θέση Α;

v) Να βρεθεί η ισχύς του βάρους στην παραπάνω θέση.

Απάντηση:

Παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων x,y και με τον προσανατολισμό όπως στο παρακάτω σχήμα.



Θεωρώντας την κίνηση του σώματος σύνθετη, μια ευθύγραμμη ομαλή κατά την οριζόντια διεύθυνση και μια ελεύθερη πτώση (ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη) στην κατακόρυφη διεύθυνση, έχουμε:

άξονας x:	$\upsilon_x=\upsilon_o$ (1) $x=\upsilon_0 \cdot t$ (2)	άξονας y:	$\upsilon_y=gt$ (3) $y=\frac{1}{2} g t^2$ (4)

i) Στη θέση Α το σώμα βρίσκεται σε ύψος h=60m, άρα έχει μετατοπισθεί στην κατακόρυφη διεύθυνση κατά y=H-h=80m-60m=20m, οπότε από την εξίσωση (4) παίρνουμε:

$$y=\frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 2y=gt^2 \rightarrow t^2=\frac{2y}{g} \rightarrow$$

$$t=\sqrt{\frac{2y}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 20m}{10m/s^2}}=\sqrt{4s^2}=2s$$

ii) Από την εξίσωση (3) βρίσκουμε υ_y=gt=10·2m/s=20m/s, οπότε από το Π.Θ. για την ταχύτητα υ στο σημείο Α παίρνουμε $\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{20^2+20^2}\,m/s=20\sqrt{2}m/s$ ενώ για την κατεύθυνσή της έχουμε ότι το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, συνεπώς η διαγώνιος διχοτομεί τη γωνία,

πράγμα που σημαίνει ότι η ταχύτητα σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση ή αν θέλετε σχηματίζει γωνία φ=45° με την κατακόρυφη διεύθυνση!!!

iii) Η ταχύτητα δεν μεταβάλλεται στην οριζόντια διεύθυνση, συνεπώς η μεταβολή της θα οφείλεται στην κίνηση του σώματος στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Delta\upsilon=\upsilon_{yA}-\upsilon_{yO}=20m/s-0=20m/s$$

με κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω.

Βέβαια θα μπορούσαμε να στηριχτούμε στον ορισμό της επιτάχυνσης:

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\rightarrow\Delta\vec{\upsilon}=\vec{g}\cdot\Delta t$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι η μεταβολή της ταχύτητας είναι ένα διάνυσμα με κατεύθυνση αυτή της επιτάχυνσης της βαρύτητας (κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω) και τιμή:

$$\Delta\upsilon=g\cdot\Delta t=10\cdot 2m/s=20m/s$$

Ή ακόμη και:

$$\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_A-\vec{\upsilon}_o\rightarrow\begin{cases}\Delta\upsilon_x=\upsilon_{xA}-\upsilon_{xo}=0\\ \Delta\upsilon_y=\upsilon_{yA}-\upsilon_{yo}=gt-0=gt=20m/s\end{cases}$$

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας **εξ ορισμού** είναι ίσος με την επιτάχυνση του σώματος:

$$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}=a=g=10\,m/s/s$$

Και προφανώς είναι ένα διάνυσμα κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω.

v) Η (στιγμιαία) ισχύς μιας δύναμης, είναι ίση με το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη παράγει έργο την στιγμή αυτή:

$$P=\frac{\Delta W_w}{\Delta t}=\frac{mg\cdot\Delta s\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{\Delta t}=mg\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=mg\cdot\upsilon_y\rightarrow$$

$$P_w=mg\cdot\upsilon_y=0{,}2\cdot 10\cdot 20J/s=40J/s$$

Σχόλια:

1) Για την εύρεση της κατεύθυνσης της ταχύτητας στην θέση Α, θα μπορούσαμε να δουλέψουμε στηριζόμενοι στην Τριγωνομετρία, υπολογίζοντας: $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}=\frac{20m/s}{20m/s}=1$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα με τον άξονα x, η οποία αφού εφω=1 τότε ω=45°. Αλλά η λύση αυτή δεν είναι ούτε καλύτερη, ούτε χειρότερη για τη Φυσική, από αυτήν που επιλέχθηκε και η οποία στηριζόταν στην Γεωμετρία!

2) Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε για την ισχύ μιας δύναμης την εξίσωση P=F·υ. Στην πραγματικότητα την ίδια εξίσωση χρησιμοποιήσαμε. Το βάρος δεν παράγει έργο εξαιτίας της κίνησης στον άξονα x, αφού η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση ($F\perp\upsilon_x$), συνεπώς η ισχύς του θα είναι $P=w\cdot\upsilon_y=mg\cdot\upsilon_y$.

3) Η παραπάνω ισχύς εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο **μειώνεται** η δυναμική ενέργεια (το σώμα κατέρχεται και η δυναμική ενέργεια mgh μειώνεται) αλλά επίσης και το ρυθμό με τον οποίο **αυξάνεται** η κινητική ενέργεια του σώματος. Ισχύουν δηλαδή:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -40J/s \quad \text{και} \quad \frac{\Delta K}{\Delta t} = +40J/s$$

dmargaris@sch.gr