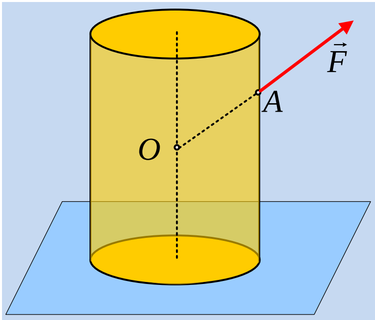
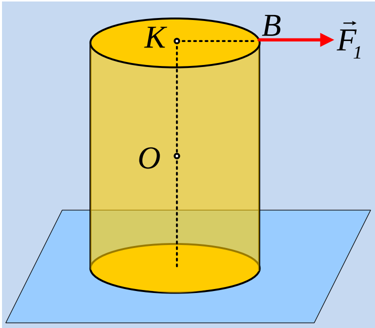
Ολίσθηση ή ανατροπή του κυλίνδρου;



Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας Μ, ακτίνας βάσης R και ύψους h=4R ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu$, όπου $0,3<\mu<0,5$.

Σε μια στιγμή δέχεται μια δύναμη **F**, μέτρου $F=\mu Mg\sqrt{2}$, η οποία ασκείται σε ένα σημείο Α της παράπλευρης επιφάνειάς του, το οποίο απέχει κατά R από την πάνω έδρα του και ο φορέας της περνά από το κέντρο μάζας του Ο.



i) Ο κύλινδρος θα:

α) παραμείνει ακίνητο.

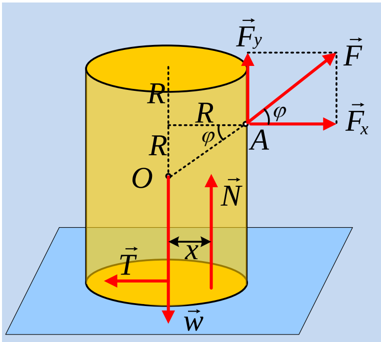
β) ολισθήσει χωρίς να ανατραπεί.

γ) ανατραπεί, χωρίς να ολισθήσει.

δ) θα ολισθήσει και θα ανατραπεί.

ii) Στο σημείο Β της πάνω έδρας ασκούμε οριζόντια δύναμη F_1, η οποία έχει την διεύθυνση της ακτίνας ΚΒ. Αν το μέτρο της ασκούμενης δύναμης αυξάνεται (ξεκινώντας από μηδενική τιμή), τι θα συμβεί πρώτα, ολίσθηση του κυλίνδρου ή ανατροπή του;

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο όπου ο φορέας της δύναμης στήριξης (κάθετης αντίδρασης Ν) απέχει κατά x, από το κέντρο μάζας Ο, ενώ η γωνία φ=45°. Αλλά τότε:

$$F_x = F_y = F\cdot \eta\mu\phi = \mu Mg\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \mu Mg$$

Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο κύλινδρος ισορροπεί, αφού η συνιστώσα F_y είναι μικρότερη του βάρους και δεν μπορεί να ανυψώσει τον κύλινδρο. Αλλά τότε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N+F_y-w=0 \rightarrow$$

$$N=Mg-F_y=Mg-\mu Mg=(1-\mu)Mg$$

$$\text{Και } T_{o\rho}=T_{o\lambda}=\mu\cdot N=\mu\cdot(1-\mu)\cdot Mg.$$

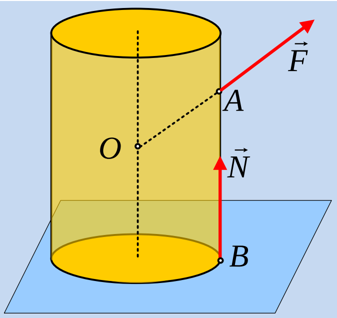
$$\text{Οπότε } F_x-T_{o\rho}=\mu Mg-\mu Mg+\mu^2 Mg=\mu^2 Mg>0$$

Και ο κύλινδρος επιταχύνεται προς τα δεξιά.

Ας υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος δεν θα ανατραπεί, οπότε $\Sigma\tau_O=0$, οπότε:

$$T\cdot 2R+F\cdot 0+w\cdot 0-N\cdot x=0 \rightarrow$$

$$x = \frac{2TR}{N} = \frac{2\cdot \mu(1-\mu)Mg\cdot R}{(1-\mu)Mg} = 2\mu\cdot R < R$$

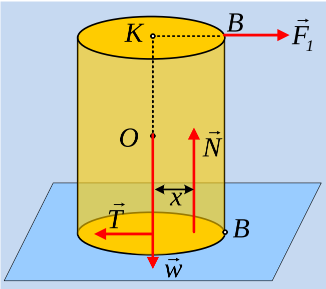


Συνεπώς η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, περνά από τη βάση του κυλίνδρου και η υπόθεσή μας είναι σωστή. (Ο κύλινδρος αρχίζει να ανατρέπεται όταν ο μοχλοβραχίονας της Ν γίνει ίσος με R, οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να στρέφεται γύρω από το σημείο Β).

Σωστή η β) πρόταση.

ii) Η δύναμη F_1 (όπως και η τριβή) είναι οριζόντια, οπότε από την ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=w=Mg$$



Έστω ότι αυξάνουμε σιγά-σιγά το μέτρο της οριζόντιας δύναμης F_1.

Ο κύλινδρος τείνει να ολισθήσει, όταν $F_1=T_{op}=\mu_s\cdot N=\mu\cdot Mg$.

Ας **υποθέσουμε** τώρα ότι ενώ ο κύλινδρος τείνει να ολισθήσει, δεν ανατρέπεται, πράγμα που σημαίνει ότι ο φορέας της Ν, δεν έχει φτάσει στο σημείο Β, αλλά περνάει από τη βάση στήριξης.

Τότε $\Sigma\tau_O=0$ ή

$$-T\cdot 2R - F_1\cdot 2R + N\cdot x = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{2TR+2F_1R}{N} = \frac{4TR}{N} = \frac{4\cdot \mu Mg\cdot R}{Mg} = 4\mu\cdot R > R$$

Πράγμα που σημαίνει ότι πριν φτάσουμε στο σημείο να ολισθήσει ο κύλινδρος, θα ανατραπεί στρεφόμενος γύρω από το σημείο Β.

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με αντίστροφη πορεία στο ii) ερώτημα.

Έστω ο κύλινδρος τείνει να ανατραπεί πριν αρχίσει να ολισθαίνει. Τότε η κάθετη αντίδραση Ν ασκείται στο σημείο Β, ενώ ο κύλινδρος ισορροπεί. Αλλά τότε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_1=T_s$$

$$Και\ \Sigma\tau_o=0\ ή\ N\cdot R - F_1\cdot 2R - T_s\cdot 2R = 0 \rightarrow$$

$$N=4T_s \rightarrow T_s= \tfrac{1}{4}\, Mg.$$

Η τελευταία εξίσωση επιβεβαιώνει ότι η ασκούμενη τριβή είναι στατική, αφού η οριακή τριβή παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 0,3Mg.

dmargaris@sch.gr