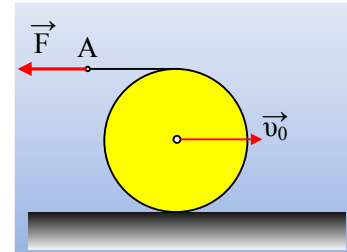


### Το φρενάρισμα ενός κυλίνδρου.

Σε οριζόντιο επίπεδο κυλιέται (χωρίς ολίσθηση) ένας βαρύς κύλινδρος μάζας  $M=100\text{kg}$  και ακτίνας  $R=0,4\text{m}$  με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας  $v_{0cm}=6\text{m/s}$ . Γύρω από τον κύλινδρο έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα και ασκώντας, στο άκρο του Α, τη στιγμή  $t=0$ , μια σταθερή οριζόντια δύναμη  $F$ , τον ακινητοποιούμε, μετά από λίγο. Το «φρενάρισμα» αυτό διαρκεί χρονικό διάστημα  $\Delta t=10\text{s}$ , στη διάρκεια του οποίου ο κύλινδρος κυλιέται (χωρίς να ολισθαίνει).

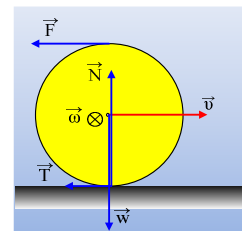


Να βρεθούν:

- i) Η επιτάχυνση (επιβράδυνση) του κυλίνδρου και η απόσταση που διανύει, μέχρι να σταματήσει.
  - ii) Το μέτρο της ασκούμενης δύναμης  $F$ , καθώς και η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο από το έδαφος.
  - iii) Η ισχύς της δύναμης  $F$  και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής (μέτρο και κατεύθυνση) του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του, τη χρονική στιγμή  $t_2=5\text{s}$
- Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του  $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$ .

#### Απάντηση:

- i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο στη διάρκεια της επιβράδυνσης, όπου  $F$  η δύναμη που του ασκείται μέσω του νήματος και  $T$  η στατική τριβή, της οποίας δεν ξέρουμε την κατεύθυνση και έστω ότι είναι αντίθετη της ταχύτητας\*.



Για την ταχύτητα του κέντρου μάζας έχουμε:

$$v_{cm} = v_{0cm} - |a_{cm}| \cdot t \rightarrow |a_{cm}| = \frac{v_{0cm}}{\Delta t} = \frac{6}{10} \text{ m/s}^2 = 0,6 \text{ m/s}^2$$

Ενώ η απόσταση που θα διανύσει μέχρι να σταματήσει θα είναι:

$$x_{ολ} = v_{0cm} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} |a_{cm}| \cdot (\Delta t)^2 = 6 \cdot 10\text{m} - \frac{1}{2} 0,6 \cdot 10^2\text{m} = 30\text{m}.$$

- ii) Θεωρώντας την κίνηση του κυλίνδρου σύνθετη, εφαρμόζουμε το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα, δουλεύοντας με τα μέτρα των μεγεθών:

Μεταφορική κίνηση:  $\Sigma F = M \cdot a_{cm} \rightarrow F + T = M \cdot a_{cm}$  (1)

Περιστροφική κίνηση:  $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F \cdot R - T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{γων}$

Αφού όμως ο κύλινδρος κυλιέται (χωρίς να ολισθαίνει) θα έχουμε ότι  $a_{cm} = \alpha_{γων} \cdot R$  και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$F - T = \frac{1}{2} M \cdot a_{cm}$$
 (2)

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$2F = \frac{3}{2} M a_{cm} \rightarrow F = \frac{3}{4} M a_{cm} = \frac{3}{4} 100 \cdot 0,6 \text{ N} = 45 \text{ N}$$

$$\text{Οπότε και: } T = M \cdot a_{cm} - F = 100 \cdot 0,6 \text{ N} - 45 \text{ N} = 15 \text{ N}$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε  $T > 0$ , επιβεβαιώνει τη φορά της τριβής που είχαμε πάρει.

iii) Τη χρονική στιγμή  $t=5s$  ο κύλινδρος έχει ταχύτητα:

$$v_{cm} = v_{0cm} - |\alpha_{cm}| \cdot t = 6m/s - 0,6 \cdot 5m/s = 3m/s,$$

οπότε το ανώτερο σημείο A του κυλίνδρου, σημείο εφαρμογής της τάσης του νήματος, ίσου μέτρου με την δύναμη F, έχει τις ταχύτητες που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπου  $v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R = v_{cm}$ , αφού ο κύλινδρος κυλιέται (χωρίς να ολισθαίνει). Αλλά τότε:

$$v_A = v_{cm} + v_{\gamma\rho} = 2 v_{cm} = 6m/s$$

Οπότε η ισχύς της δύναμης F είναι:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dx \sin 180^\circ}{dt} = -F v_A = -45 \cdot 6W = -270W$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής, θεωρώντας τις δεξιόστροφες ροπές θετικές, είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \Sigma \tau = -FR + TR = -(F - T)R \rightarrow \\ \frac{dL}{dt} &= -(45 - 15) \cdot 0,4kgm^2 / s^2 = -12kgm^2 / s^2 \end{aligned}$$

Κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα έξω, όπως στο σχήμα.

**Σχόλια:**

1) \* Μπορούσαμε να βρούμε την κατεύθυνση της τριβής, ελέγχοντας τι πρόκειται να συμβεί μόλις ασκηθεί η δύναμη F στον κύλινδρο. Τότε:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F = M \cdot a_{cm} \rightarrow F = M \cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F}{M}$$

$$\text{Περιστροφική κίνηση: } \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} R = \frac{2F}{M} = a_{\varepsilon\pi} = 2a_{cm}.$$

Παίρνοντας τώρα το σημείο Γ, επαφής του κυλίνδρου με το έδαφος, σχεδιάζουμε τις επιταχύνσεις, όπως στο διπλανό σχήμα, αλλά τότε το σημείο Γ θα έχει επιτάχυνση προς τα δεξιά, πράγμα που σημαίνει ότι τείνει να ολισθήσει προς τα δεξιά και για να μην συμβεί αυτό (ο κύλινδρος κυλιέται), θα ασκηθεί στατική τριβή με φορά προς τα αριστερά.

2) Η ισχύς της F, θα μπορούσε να υπολογιστεί θεωρώντας ότι λειτουργεί και ως δύναμη (για τη μεταφορική κίνηση) και ως ροπή (για τη στροφική κίνηση):

$$P = P_F + P_\tau = -F \cdot v_{cm} - (F \cdot R) \cdot \omega = -2F \cdot v_{cm} = -270W.$$

