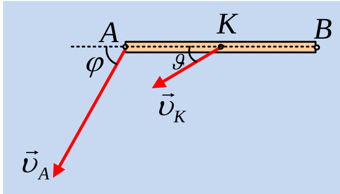
Ταχύτητες και επιταχύνσεις σημείων μιας ράβδου σε πτώση.

Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ=2m, πέφτει ελεύθερα από κάποιο ύψος και σε μια στιγμή είναι οριζόντια. Στη θέση αυτή το κέντρο της Κ, έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 4m/s$ η οποία σχηματίζει γωνία θ=30° με την οριζόντια διεύθυνση, ενώ το άκρο Α έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 4\sqrt{3}m/s$ σχηματίζοντας αντίστοιχα με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ=60°, όπως στο διπλανό σχήμα.



i) Η κίνηση της ράβδου είναι απλή ή σύνθετη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του άκρου Β της ράβδου στην θέση αυτή.

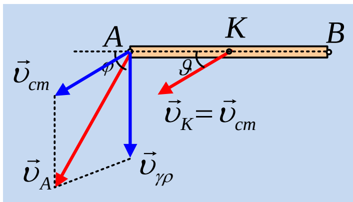
iii) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του άκρου Α τη στιγμή που η ράβδος, αφού περιστραφεί κατά $\frac{\pi}{2}$, έρθει σε κατακόρυφη θέση.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Η κίνηση της ράβδου δεν είναι μεταφορική, αφού δύο σημεία της ράβδου, έχουν διαφορετικές ταχύτητες. Δεν είναι επίσης στροφική, γύρω από νοητό άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της Κ. Συνεπώς μπορούμε να την θεωρήσουμε ως μια σύνθετη κίνηση, την οποία μπορούμε να μελετήσουμε, θεωρώντας ότι η ράβδος εκτελεί μια μεταφορική κίνηση με ταχύτητα κέντρου μάζας $\upsilon_{cm}=\upsilon_K$ και μια στροφική γύρω από άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το Κ, με γωνιακή ταχύτητα ω.

ii) Με βάση τα παραπάνω, το άκρο Α, έχει μια ταχύτητα υ_{cm}, λόγω μεταφορικής κίνησης και μια $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot R = \omega \cdot \frac{\ell}{2}$ εξαιτίας της περιστροφής, κάθετη στη ράβδο, όπως στο σχήμα. Το διανυσματικό άθροισμα των δύο παραπάνω ταχυτήτων, οι οποίες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60°, μας δίνει την ταχύτητα του άκρου Α. Οπότε:



$$\upsilon_A^2 = \upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2\upsilon_{cm}\upsilon_{\gamma\rho}\sigma\upsilon\nu 60^o \rightarrow$$

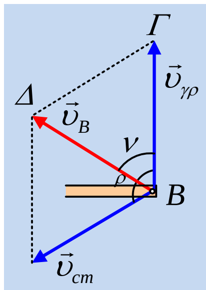
$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 4^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 + 2 \cdot 4 \cdot \upsilon_{\gamma\rho} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\upsilon_{\gamma\rho}^2 + 4\upsilon_{\gamma\rho} - 32 = 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 32}}{2} \rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = 4m/s,$$

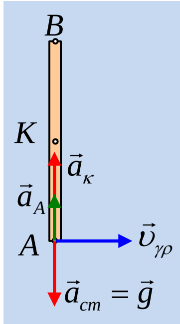
αφού το μέτρο της ταχύτητας δεν μπορεί να είναι αρνητικό.

Αλλά τότε το άκρο Β έχει μια συνιστώσα ταχύτητας ίση με υ_{cm} και μια ίση με $\upsilon_{\gamma\rho}$ όπως στο διπλανό σχήμα, όπου η γωνία μεταξύ τους είναι ίση με ρ, όπου ρ=90°+30°=120°.



Αλλά τότε το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος και η διαγώνιος διχοτομεί την γωνία ρ, σχηματίζοντας γωνία 60° με κάθε συνιστώσα και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισόπλευρο. Συνεπώς και $υ_B$=4m/s, ενώ σχηματίζει γωνία ν=60° με την κατακόρυφη, όπως στο σχήμα.

iii) Κατά την πτώση της ράβδου, η μόνη δύναμη που ασκείται στη ράβδο είναι το βάρος, το οποίο δεν έχει ροπή, ως προς τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή κατά την πτώση της ράβδου.



Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί η γραμμική ταχύτητα του άκρου Α, καθώς και η επιτάχυνση $α_{cm}$=g του σημείου Α λόγω της μεταφορικής κίνησης της ράβδου (εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης όλα τα σημεία της ράβδου έχουν επιτάχυνση, ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας) και η κεντρομόλος επιτάχυνση $α_κ$, εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το Κ, τη στιγμή που ράβδος γίνεται κατακόρυφη. Όμως τότε:

$$a_κ = \frac{υ_{γρ}^2}{R} = \frac{υ_{γρ}^2}{\ell/2} = \frac{4^2}{1} m/s^2 = 16 m/s^2$$

Άρα συνολικά το σημείο Α έχει επιτάχυνση:

$$α_A = α_κ - α_{cm} = 16m/s^2 - 10m/s^2 = 6\ m/s^2.$$

Σχόλια:

1) Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε τις πράξεις στο ii) ερώτημα, αν προσέχαμε ότι το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται είναι ρόμβος, αφού η διαγώνιος είναι και διχοτόμος, οπότε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι ίσο με το μέτρο της $υ_{cm}$. ***Η Γεωμετρία είναι πάντα πολύτιμη!!!***

2) Αξίζει να προσεχθεί ότι όταν μιλάμε για κεντρομόλο επιτάχυνση, ενός σημείου, μας ενδιαφέρει η γραμμική ταχύτητα λόγω της κυκλικής κίνησης του σημείου. Όχι η συνολική του ταχύτητα. Έτσι στην παραπάνω περίπτωση, το σημείο Α έχει και ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, η οποία δεν μας απασχολεί και για το λόγο αυτό δεν ασχοληθήκαμε.

3) Μόνο για καθηγητές: Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε και με στιγμιαίο άξονα περιστροφής και να βρίσκαμε τα ζητούμενα, οπότε τότε δεν θα μιλούσαμε βέβαια για σύνθετη κίνηση, αλλά μόνο για στροφική γύρω από αυτό (το μεταβλητό) σημείο. Προσωπικά θεωρώ ότι δεν πρέπει να εμπλέξουμε τους μαθητές μας με αυτή την οπτική γωνία.

dmargaris@sch.gr