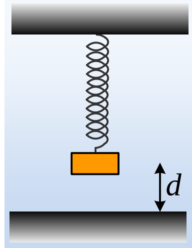
Ταλάντωση και κρούση.



Το σώμα μάζας Μ ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, απέχοντας κατά d από το έδαφος, όπως στο σχήμα. Εκτρέπουμε το σώμα προς τα πάνω κατά 2d, φέρνοντάς το στη θέση Ρ και τη στιγμή t=0, το αφήνουμε να κινηθεί, οπότε εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά D=k, όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

i) Η ταχύτητα του σώματος ελάχιστα πριν την ελαστική κρούση του με το έδαφος, έχει μέτρο:

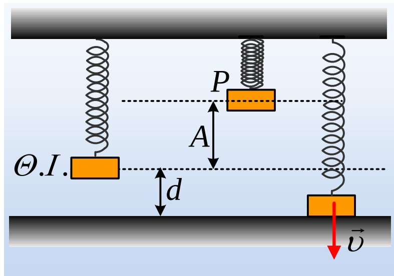
$$\alpha)\ \upsilon = d\sqrt{\frac{k}{M}}\ ,\quad \beta)\ \upsilon = d\sqrt{\frac{2k}{M}}\ ,\quad \gamma)\ \upsilon = d\sqrt{\frac{3k}{M}}$$

ii) Το σώμα θα συγκρουσθεί 2^{η} φορά με το έδαφος τη χρονική στιγμή:

$$\alpha)\ t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}\ ,\quad \beta)\ t_2 = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}\ ,\quad \gamma)\ t_3 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}\ .$$

Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας, θεωρώντας αμελητέα τη διάρκεια της κρούσης.

Απάντηση:



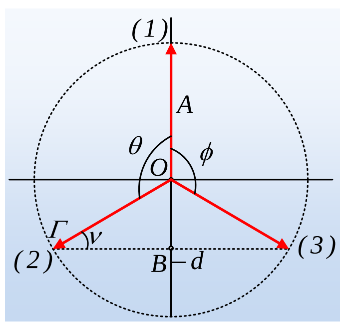
i) Το σώμα αρχικά ηρεμεί στη θέση ισορροπίας. Εκτρέποντάς το κατά 2d, το απομακρύνουμε από τη θέση ισορροπίας του κατά 2d και αφού τη στιγμή που το αφήνουμε να ταλαντωθεί, δεν έχει ταχύτητα, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι Α=2d. Η ενέργεια της ταλάντωσης όμως παραμένει σταθερή, οπότε αφού ελάχιστα πριν την κρούση βρίσκεται σε απομάκρυνση x=-d (θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω) θα έχουμε:

$$K+U=E_\tau \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow$$

$$\upsilon = -\sqrt{\frac{k}{M}(A^2 - x^2)} = -\sqrt{\frac{k}{M}(4d^2 - d^2)} = -d\sqrt{\frac{3k}{M}}$$

Όπου αφού το σώμα κινείται προς τα κάτω, η ταχύτητα έχει αρνητική αλγεβρική τιμή. Συνεπώς σωστή η γ) πρόταση,



ii) Η κρούση με το έδαφος είναι ελαστική οπότε το σώμα θα ανακλαστεί με ταχύτητα ίσου μέτρου με φορά προς τα πάνω $\upsilon' = d\sqrt{\frac{3k}{M}}$.

Αν πάρουμε το κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης, το περιστρεφόμενο διάνυσμα, (η προβολή του οποίου μας δίνει την απομάκρυνση του σώματος που εκτελεί ΑΑΤ), τη στιγμή t=0, βρίσκεται στη θέση

(1), ενώ τη στιγμή της κρούσης, θα φτάσει στη θέση (2), ενώ αμέσως μετά την κρούση θα είναι στη θέση (3). Συνεπώς αν θέλουμε να υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα, μέχρι τη στιγμή της $2^{ης}$ κρούσης, αυτό θα είναι το χρονικό διάστημα, που θα χρειαστεί το περιστρεφόμενο διάνυσμα, να διαγράψει τη γωνία θ, (μέχρι τη στιγμή της $1^{ης}$ κρούσης), συν το αντίστοιχο χρονικό διάστημα για να διαγράψει τη γωνία φ (ο χρόνος επιστροφής στην αρχική θέση), συν ξανά το χρόνο για τη γωνία θ. Αλλά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ, η κάθετη πλευρά ΟΒ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας συνεπώς η γωνία ν=30°= π/6, οπότε θ=φ=$\frac{2\pi}{3}$ rad. Κατά συνέπεια το χρονικό διάστημα που θα απαιτηθεί θα είναι:

$$\Delta t = t_1 + t_2 + t_3 = 3t_1 = 3\frac{\vartheta}{\omega} = 3\frac{\vartheta}{2\pi}T = 3\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Σωστή η γ) πρόταση.

$2^η$ λύση:

Αν δεν μας αρέσει ο κύκλος αναφοράς, θα μπορούσαμε να δουλέψουμε Τριγωνομετρικά.

Θεωρώντας θετική την προς τα πάνω φορά και αφού το σώμα ξεκινά από θέση πλάτους, η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:

$$y = A\cdot\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Τη στιγμή της κρούσης y=-d= - ½ A οπότε:

$$-\frac{1}{2}A = A\cdot\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{2\pi}{3} \rightarrow t_1 = \frac{1}{3}T$$

ή

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=1} \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{4\pi}{3} \rightarrow t_2 = \frac{2}{3}T$$

Όπου η χρονική στιγμή t_1 αντιστοιχεί τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος (για την ταχύτητα θα έχουμε $\upsilon=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6}\right)<0$), ενώ η χρονική στιγμή t_2, η στιγμή (που αν δεν υπήρχε κρούση και το σώμα εκτελούσε κανονικά την ταλάντωσή του, θα βρισκόταν ξανά σε απομάκρυνση y=-d κινούμενο προς τα πάνω. Αλλά τότε για να πάει από τη θέση αυτή στην αρχική θέση, θα απαιτήτο χρονικό διάστημα $\Delta t_2=T-t_2=\frac{1}{3}T$. Αλλά τότε ο ζητούμενος χρόνος θα ήταν:

$$\Delta t = t_1 + \Delta t_2 + t_1 = 3\frac{T}{3} = T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

dmargaris@gmail.com