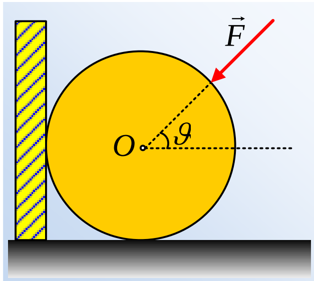
Προκαλώντας την τριβή να εμφανιστεί …..



Μια ομογενής σφαίρα μάζας M=20kg και ακτίνας R=0,4m ηρεμεί σε επαφή με λείο κατακόρυφο τοίχο. Η σφαίρα παρουσιάζει με το έδαφος συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}2$ και σε μια στιγμή δέχεται μια δύναμη **F**, μέτρου 100Ν η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8 και με κατεύθυνση προς το κέντρο Ο της σφαίρας, όπως στο σχήμα.

i) Ποια πρόταση είναι σωστή:

α) Η σφαίρα δέχεται δύναμη τριβής με φορά προς τα αριστερά.

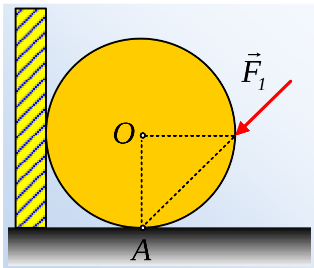
β) Η σφαίρα δέχεται δύναμη τριβής με φορά προς τα δεξιά.

γ) Η τριβή που ασκείται στη σφαίρα είναι στατική, η οποία μπορεί να μετατραπεί σε τριβή ολίσθησης, αν αυξηθεί το μέτρο της ασκούμενης δύναμης.

δ) Η σφαίρα δεν δέχεται δύναμη τριβής από το έδαφος.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Να βρείτε τις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα από τον τοίχο και το έδαφος.

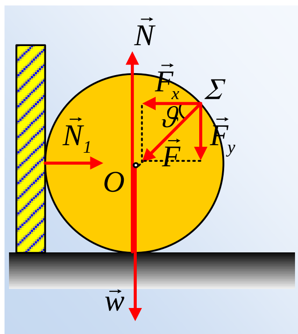


iii) Αλλάζουμε την ασκούμενη δύναμη, ασκώντας τώρα την δύναμη $\mathbf{F_1}$, μέτρου επίσης F_1= 100Ν η οποία κατευθύνεται στο σημείο επαφής Α της σφαίρας με το έδαφος, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την τριβή που θα ασκηθεί στη σφαίρα.

iv) Απομακρύνουμε τη σφαίρα ώστε να μην εφάπτεται του τοίχου και στη συνέχεια της ασκούμε ξανά την παραπάνω δύναμη F, όπως στο πρώτο σχήμα. Να υπολογιστεί η τριβή που ασκείται τώρα στη σφαίρα, βρίσκοντας την επιτάχυνση του κέντρου της Ο, καθώς και τη γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει.

Δίνεται $g=10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της $I=2/5MR^2$.

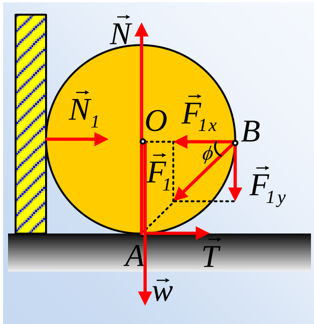
Απάντηση:



i) Σωστή είναι η δ) πρόταση. Δεν υπάρχει κανένας λόγος να κάνει την εμφάνισή της δύναμη τριβής. Πράγματι η τριβή εμφανίζεται όταν η σφαίρα κινείται ή τείνει να κινηθεί ως προς το έδαφος. Αλλά μόλις ασκηθεί η δύναμη F, θα μπορούσε να πει κάποιος ότι η σφαίρα τείνει να κινηθεί προς τα αριστερά, εξαιτίας της συνιστώσας F_x, αλλά αυτό δεν ισχύει, αφού θα κάνει την εμφάνισή της η οριζόντια δύναμη από τον λείο τοίχο $\mathbf{N_1}$, οπότε δεν θα μπορούσε να κινηθεί οριζόντια η σφαίρα. Εξάλλου, όλες οι άλλες δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα, διέρχονται από το κέντρο της Ο, συνεπώς δεν ασκείται κάποια ροπή ως προς το Ο, που να τείνει να περιστρέψει τη σφαίρα, ώστε να εμφανιστεί τριβή. Η σφαίρα δηλαδή ισορροπεί και αυτό, ανεξάρτητα από το μέτρο της ασκούμενης δύναμης **F.**

ii) Από την ισορροπία της σφαίρας ($\Sigma\tau_o=0$ αφού όλες οι δυνάμεις περνάνε από το κέντρο Ο) παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0\rightarrow\begin{cases}\Sigma F_x=0\rightarrow N_1=F_x=F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=100N\cdot 0{,}8=80N\\ \Sigma F_y=0\rightarrow N=w+F_y=Mg+F\cdot\eta\mu\theta=200N+100N\cdot 0{,}6=260N\end{cases}$$



iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα, όταν η δύναμη ασκηθεί στο σημείο Β, όπου επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές φ=45°. Αλλά τώρα η δύναμη F_1 έχει ροπή ως προς τη διάμετρο της σφαίρας που είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, με αποτέλεσμα η σφαίρα να τείνει να περιστραφεί κατά την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, συνεπώς το σημείο Α τείνει να αποκτήσει ταχύτητα προς τα αριστερά, οπότε η τριβή θα έχει φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.

Το ερώτημα που γεννάται τώρα είναι, αν θα περιστραφεί η σφαίρα ή όχι. Ας υποθέσουμε ότι δεν θα στραφεί, τότε θα πρέπει:

$$\Sigma\tau_O=0\rightarrow F_{1y}\cdot R\text{-}T\cdot R=0\rightarrow T=F_1\cdot\eta\mu\varphi=100\,N\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=50\sqrt{2}N\approx 70{,}7N\ .$$

Αλλά από την ισορροπία της σφαίρας στην κατακόρυφη διεύθυνση παίρνουμε:

$$\Sigma F_y=0\rightarrow N=w+F_{1y}=Mg+F_1\cdot\eta\mu\varphi=200N+100N\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 270{,}7N$$

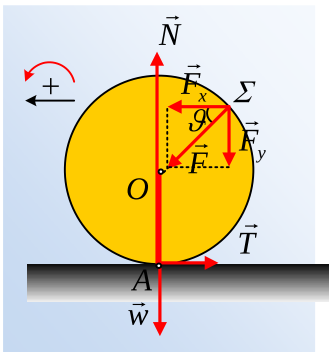
Και η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που θα μπορούσε να εμφανιστεί είναι:

$$T_{o\rho}=T_{o\lambda}=\mu_s\cdot N=0{,}2\cdot 270{,}7N\approx 54N$$

Συνεπώς η τριβή που θα ασκηθεί **δεν** μπορεί να έχει μέτρο 70,7Ν, αλλά θα πάρει τιμή 54Ν.

(Αλλά τότε η σφαίρα θα αρχίσει να περιστρέφεται, αποκτώντας γωνιακή επιτάχυνση:

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{(F_{1x}-T)R}{I}=\frac{(F_{1x}-T)R}{\frac{2}{5}MR^2}=\frac{5(F_{1x}-T)}{2MR}=\frac{5(70{,}7-54)}{2\cdot 20\cdot 0{,}4}rad/s^2=5{,}2rad/s^2\ .)$$



iv) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα, όπου δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση της τριβής. Συνηθίζεται να σχεδιάζουμε στην τύχη την τριβή και να επιλύουμε το πρόβλημα. Στην πραγματικότητα όμως μπορούμε να βρούμε την κατεύθυνσή της, διερευνώντας την κατεύθυνση της ταχύτητας που τείνει να αποκτήσει το σημείο επαφής Α της σφαίρας με το έδαφος.

Με την επίδραση της συνιστώσας F_x η σφαίρα τείνει να κινηθεί προς τα αριστερά με επιτάχυνση κέντρου μάζας:

$$a_{cm}=\frac{F_x}{M}=\frac{F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{M}=\frac{100\cdot 0{,}8}{20}m/s^2=4m/s^2$$

Ενώ δεν ασκείται καμιά άλλη ροπή (πλην της τριβής) ως προς τον άξονα περιστροφής της σφαίρας που περνά από το Ο (Η ροπή της δύναμης F, ως προς το Ο είναι μηδέν). Συνεπώς το σημείο Α θα αποκτήσει επιτάχυνση προς τα αριστερά ίση με την α_{cm}, αλλά τότε θα ασκηθεί τριβή με φορά προς τα δεξιά.

Το επόμενο ερώτημα είναι, η τριβή αυτή είναι στατική ή τριβή ολίσθησης;

Υποθέτουμε ότι η τριβή είναι στατική και η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αλλά τότε θεωρώντας ότι η κίνηση της σφαίρας είναι σύνθετη, παίρνουμε με εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα και με θετικές φορές όπως στο σχήμα:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - T = M\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R = T\cdot R = \frac{2}{5}MR^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T = \frac{2}{5}MR\cdot a_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Θεωρώντας δε ότι έχουμε κύλιση (χωρίς ολίσθηση) θα ισχύει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ (3), οπότε από τις εξισώσεις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{7}{5}M\cdot a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{5F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{7M} = \frac{5\cdot 100\cdot 0{,}8}{7\cdot 20}m/s^2 = \frac{20}{7}m/s^2$$

$$\text{Οπότε } T = \frac{2}{5}M\cdot a_{cm} = \frac{2}{5}20\cdot\frac{20}{7}N = \frac{160}{7}N$$

Αλλά η μέγιστη τιμή της οριακής στατικής τριβής είναι:

$$T_{o\rho} = \mu_s N = 0{,}2\cdot 260N = 52N$$

Παρατηρούμε ότι η τριβή που απαιτείται για να κυλίσει η σφαίρα είναι μικρότερη από την οριακή ($T<T_{o\rho}$), συνεπώς η τιμή αυτή μπορεί να επιτευχθεί και η υπόθεσή μας είναι σωστή.

Αλλά τότε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{20}{7\cdot 0{,}4}rad/s^2 = \frac{50}{7}rad/s^2.$$

Συμπέρασμα:

- Στην πρώτη περίπτωση, η σφαίρα δεν τείνει να κινηθεί με την δράση της δύναμης F, οπότε δεν εμφανίζεται δύναμη τριβής.
- Στην δεύτερη περίπτωση, η ασκούμενη δύναμη έχει ροπή ως προς το κέντρο Ο, η οποία τείνει να περιστρέψει τη σφαίρα, οπότε εμφανίζεται τριβή ολίσθησης, η οποία αντιστέκεται στην περιστροφή της (μειώνοντας την γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά τελικά η σφαίρα).
- Στην τρίτη περίπτωση η ασκούμενη δύναμη τείνει να επιταχύνει μεταφορικά τη σφαίρα και εμφανίζεται επίσης (γενικά) τριβή. Το ποια θα είναι η κατεύθυνσής της και αν θα είναι στατική ή τριβή ολίσθησης, εξαρτάται από τα δεδομένα. Τα αριθμητικά δεδομένα, στην περίπτωσή μας, μας οδηγούν ότι εδώ αυτή είναι στατική και η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

dmargaris@sch.gr