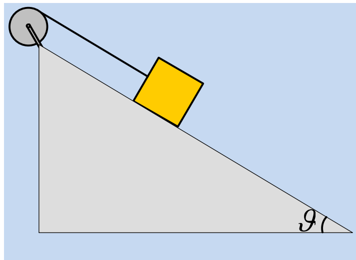
Ολίσθηση κύβου και περιστροφή τροχαλίας.



Στην κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου έχει στερεωθεί μια τροχαλία μάζας m=2kg και ακτίνας R=0,2m, στο αυλάκι της οποίας έχουμε τυλίξει ένα αβαρές μη ελαστικό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου δένουμε έναν κύβο μάζας M=4kg, ο οποίος παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστή τριβής μ=0,25. Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο τον κύβο να γλιστρήσει. Αν το νήμα είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο, η κλίση του οποίου είναι θ, όπου ημθ=0,6 και $g=10m/s^2$, να βρεθούν:

i) Η επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί ο κύβος.

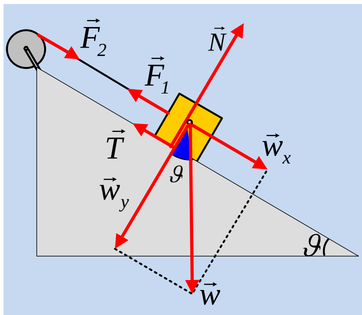
ii) Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας, τη στιγμή που θα έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους 1,25m.

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κύβου και τροχαλίας την παραπάνω χρονική στιγμή.

iv) Το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας του κύβου, που μεταφέρεται στην τροχαλία μέχρι τη στιγμή που ο κύβος φτάνει στο έδαφος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της $I= ½ mR^2$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο καθώς και οι δυνάμεις F_1 και F_2 που το αβαρές νήμα ασκεί σε κύβο και τροχαλία (η τάση του νήματος), όπου $F_1=F_2$.

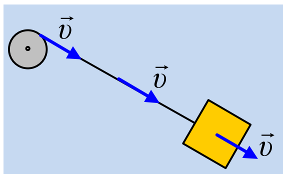
Για τον κύβο:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=Mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta =4\cdot 10\cdot 0{,}8N=32N$$

$$\Sigma F_x=M\cdot\alpha \rightarrow Mg\cdot\eta\mu\theta-T-F_1=M\cdot\alpha \quad (1)$$

Για την τροχαλία: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_2\cdot R= ½\, mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή

$$F_2= ½\, m\cdot R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$



Αλλά η ταχύτητα του κύβου κάθε στιγμή, είναι και ίση με την ταχύτητα κάθε σημείου του νήματος, συνεπώς και με την ταχύτητα, του σημείου του νήματος που άπτεται της τροχαλίας. Οπότε $\upsilon_\kappa=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R \rightarrow$

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R=a_{\gamma\omega\nu}R \quad (3)$$

Και με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη με χρήση της (3) παίρνουμε:

$$Mg\cdot\eta\mu\theta - T= (M+ ½\, m)\cdot\alpha \rightarrow$$

$$a=\frac{Mg\cdot\eta\mu\theta-\mu Mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{M+\frac{m}{2}}=\frac{2Mg(\eta\mu\theta-\mu\cdot\sigma\upsilon\nu\theta)}{2M+m}\rightarrow$$

$$a=\frac{2\cdot 4\cdot 10(0{,}6-0{,}25\cdot 0{,}8)}{2\cdot 4+2}m/s^2=3{,}2m/s^2.$$

ii) Η κίνηση του κύβου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία ισχύουν:

$$\upsilon=\alpha\cdot t \quad \text{και} \quad x=½\,\alpha\cdot t^2.$$

Με απαλοιφή του χρόνου παίρνουμε:

$$\upsilon=\sqrt{2\cdot a\cdot x}=\sqrt{2\cdot 3{,}2\cdot 1{,}25}m/s=2\sqrt{2}m/s$$

Αλλά τότε και η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου στην περιφέρεια της τροχαλίας έχει το ίδιο μέτρο και:

$$\omega=\frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{R}=\frac{2\sqrt{2}}{0{,}2}rad/s=10\sqrt{2}rad/s$$

iii) Για τον κύβο έχουμε:

$$\frac{dK_\kappa}{dt}=\frac{dW_{o\lambda}}{dt}=\frac{\Sigma F\cdot dx\cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt}=\Sigma F\cdot\upsilon=M\alpha\cdot\upsilon=4\cdot 3{,}2\cdot 2\sqrt{2}J/s=25{,}6\sqrt{2}J/s$$

Αντίστοιχα για την τροχαλία, όπου δέχεται δύναμη $F_2=½\,m\cdot\alpha$ θα έχουμε:

$$\frac{dK_{\tau\rho}}{dt}=\frac{dW_{o\lambda}}{dt}=\frac{\Sigma\tau\cdot d\theta}{dt}=F_2R\cdot\omega=\frac{1}{2}ma\cdot\upsilon=\frac{1}{2}2\cdot 3{,}2\cdot 2\sqrt{2}J/s=6{,}4\sqrt{2}J/s$$

iv) Τη στιγμή που ο κύβος φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο έχει μετατοπισθεί κατά x και η δυναμική του ενέργεια έχει μειωθεί κατά $|\Delta U|=MgH=Mg\cdot x\cdot\eta\mu\theta$.

Αντίστοιχα η κινητική ενέργεια που έχει αποκτήσει η τροχαλία θα είναι ίση με το έργο της δύναμης F_2, δηλαδή $W_{F2}=F_2\cdot x=½\,m\alpha\cdot x$.

Συνεπώς το ζητούμενο ποσοστό θα είναι:

$$\pi=\frac{K_{\tau\rho}}{|\Delta U|}100\%=\frac{{}^1\!/_2\,max}{Mgx\cdot\eta\mu\theta}100\%=\frac{ma}{2Mg\cdot\eta\mu\theta}100\% \text{ ή}$$

$$\pi=\frac{ma}{2Mg\cdot\eta\mu\theta}100\%=\frac{2\cdot 3{,}2}{2\cdot 4\cdot 10\cdot 0{,}6}100\%=13{,}3\%$$

dmargaris@sch.gr