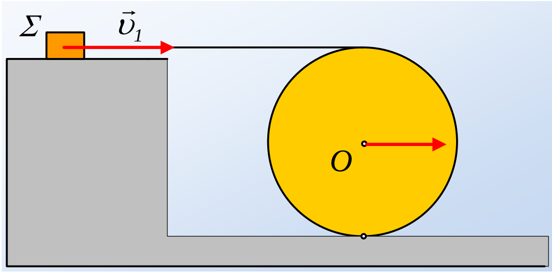
Οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις σε ένα σύστημα.



Στο σχήμα γύρω από έναν τροχό, ακτίνας R, ο οποίος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο, έχουμε τυλίξει ένα νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε δέσει ένα σώμα Σ. Το νήμα που συνδέει τον τροχό με το σώμα Σ είναι οριζόντιο. Σε μια στιγμή το σώμα Σ έχει ταχύτητα $υ_1$ και επιτάχυνση $α_1$.

i) Η ταχύτητα του άξονα του τροχού, που περνά από το κέντρο του O, είναι:

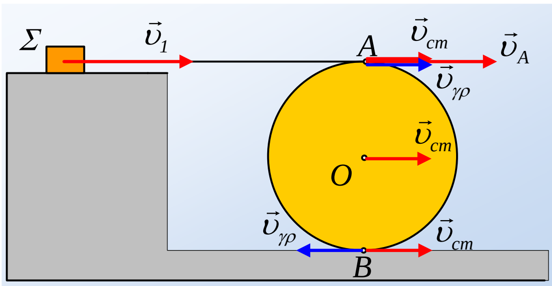
α) ½ $υ_1$, β) $υ_1$, γ) $2υ_1$.

ii) Ο τροχός έχει γωνιακή επιτάχυνση μέτρου:

α) $α_{γων}=0$, β) $α_{γων}=$ ½ $α_1/R$, γ) $α_{γων}= α_1/R$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:



i) Καθώς το σώμα Σ κινείται με ταχύτητα $υ_1$, κινείται επίσης και το νήμα, με το οποίο είναι δεμένο, με την ίδια ταχύτητα $υ_1$, αλλά τότε και το ανώτερο σημείο Α του τροχού, στο οποίο τυλίγεται το νήμα, θα έχει επίσης ταχύτητα $υ_A=υ_1$.

Θεωρώντας όμως σύνθετη την κίνηση του τροχού και αποτελούμενη από μια μεταφορική με ταχύτητα $υ_{cm}$ και μια στροφική με γωνιακή ταχύτητα ω, το σημείο Α έχει ταχύτητα, η οποία ισούται με το διανυσματικό άθροισμα $\vec{υ}_A=\vec{υ}_{cm}+\vec{υ}_{γρ}$, όπου οι δυο επιμέρους ταχύτητες, φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.

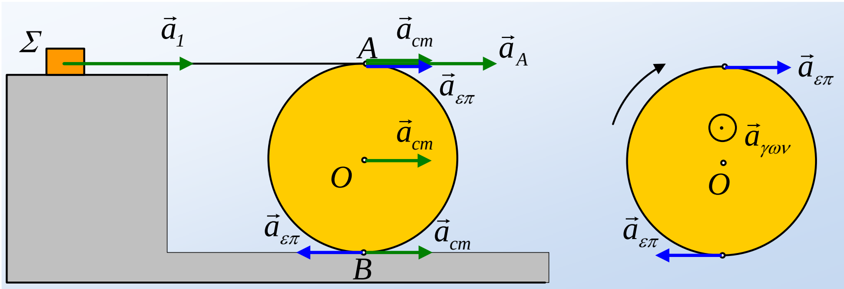
Αλλά από τη στιγμή που ο τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει), το σημείο επαφής του με το έδαφος έχει μηδενική ταχύτητα ή $υ_{cm}=υ_{γρ}=ω\cdot R$, οπότε:

$$υ_A=υ_1=υ_{cm}+υ_{γρ}=υ_{cm}+ω\cdot R=2υ_{cm} \rightarrow$$

$$υ_{cm}=\frac{υ_1}{2}$$

Σωστή η α) εκδοχή.

ii) Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις επιταχύνσεις των διαφόρων σημείων, όπου στο δεύτερο σχήμα έχουμε εστιάσει στην περιστροφική κίνηση του τροχού, η οποία είναι μια επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, με γωνιακή επιτάχυνση, κάθετη στο επίπεδο του σχήματος, στο κέντρο Ο του τροχού με φορά προς τα μέσα.



Αλλά για την ταχύτητα ενός σημείου, έστω του σημείου Α, όσον αφορά την κυκλική κίνηση που πραγματοποιεί γύρω από το κέντρο Ο, ισχύει:

$$\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R \rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=\frac{d\omega\cdot R}{dt}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha_{\varepsilon\pi}$$

Όπου η $\alpha_{\varepsilon\pi}$ ονομάζεται επιτρόχια επιτάχυνση και συνδέεται με την αλλαγή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Α. Με άλλα λόγια ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Α, εξαιτίας της κυκλικής κίνησης γύρω από το Ο, συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση του τροχού με την σχέση:

$$a_{\varepsilon\pi}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot R$$

Αλλά με την συλλογιστική πορεία που ακολουθήσαμε και για τις ταχύτητες:

$$\alpha_1=\alpha_A=\alpha_{cm}+\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \quad (1)$$

ενώ για το σημείο Β, αφού $\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R \rightarrow$

$$a_{cm}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}=\frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot R$$

Οπότε η σχέση (1) γράφεται:

$$\alpha_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=2\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{1}{2}\frac{a_1}{R}$$

Σωστή η β) επιλογή.

Σχόλιο:

Το σημείο Α έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση, η οποία όμως δεν μας ενδιαφέρει στην περίπτωση που μελετάμε, γι’ αυτό και δεν αναφέρθηκε, ούτε σχεδιάστηκε στο σχήμα μας.

dmargaris@sch.gr