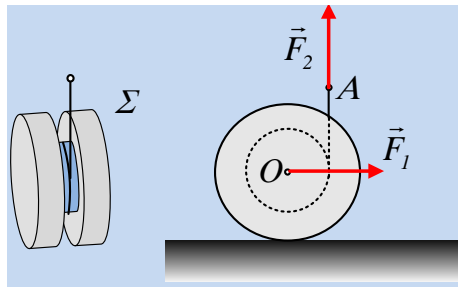


### Οι κινήσεις πάνε και έρχονται....

Διαθέτουμε ένα στερεό  $\Sigma$  (ένα καρούλι), αποτελούμενο από δυο δίσκους οι οποίοι συνδέονται με κύλινδρο, γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Η μάζα του  $\Sigma$  είναι  $M=20\text{kg}$  και η εξωτερική του ακτίνα  $R=0,4\text{m}$ . Τοποθετούμε το στερεό  $\Sigma$  λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή ασκούμε στο κέντρο μάζας του  $O$  μια σταθερή οριζόντια δύναμη  $F_1=20\text{N}$ , ενώ ταυτόχρονα τραβάμε το άκρο  $A$  του νήματος ασκώντας διαρκώς μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη  $F_2=16\text{N}$ , όπως στο σχήμα.



Μετά από λίγο ο άξονας του στερεού (που διέρχεται από το κέντρο  $O$ ) έχει μετατοπισθεί κατά  $x=2\text{m}$ , ενώ έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους  $0,25\text{m}$ . Για την θέση αυτή ζητούνται:

- i) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του στερεού  $\Sigma$ .
- ii) Η γωνιακή του ταχύτητα.
- iii) Η ταχύτητα ενός σημείου  $B$ , επαφής του στερεού με το έδαφος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του στερεού γύρω από τον άξονα περιστροφής του  $I=0,4MR^2$ .

#### Απάντηση:

- i) Κατά τη διάρκεια της κίνησης που πραγματοποιεί το στερεό μας, η οριζόντια δύναμη  $F_1$  παράγει έργο:

$$W_{F_1} = F_1 \cdot x = 20\text{N} \cdot 2\text{m} = 40\text{J}$$

Το παραπάνω έργο εκφράζει την αύξηση της «μεταφορικής» κινητικής ενέργειας του στερεού. Συνεπώς:

$$\frac{1}{2} M v_{cm}^2 = W_{F_1} \rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2W_{F_1}}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40}{20}} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

- ii) Κατά την παραπάνω κίνηση, η ροπή της δύναμης  $F_2$  επιταχύνει στροφικά το στερεό μας, αντίθετα από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Η ενέργεια που μεταφέρεται στο στερεό μας, μέσω του έργου της δύναμης  $F_2$  είναι ίσο:

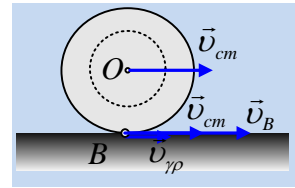
$$W_{F_2} = F_2 \cdot y = 16\text{N} \cdot 0,25\text{m} = 4\text{J}$$

Το παραπάνω έργο εκφράζει την αύξηση της «στροφικής» κινητικής ενέργειας του στερεού. Συνεπώς:

$$\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = W_{F_2} \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{F_2}}{I_{cm}}} = \sqrt{\frac{5W_{F_2}}{MR^2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 4}{20 \cdot 0,4^2}} \text{ rad / s} = 2,5 \text{ rad / s}$$

iii) Το σημείο επαφής B του στερεού μας με το έδαφος έχει μια συνιστώσα ταχύτητας  $v_{cm}$  εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια συνιστώσα  $v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R = 2,5 \cdot 0,4 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$  εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης, που οφείλεται στην στροφική κίνηση του στερεού, όπως στο διπλανό σχήμα.



Συνεπώς:

$$v_B = v_{cm} + v_{\gamma\rho} = 3 \text{ m/s}$$

Με φορά προς τα δεξιά.

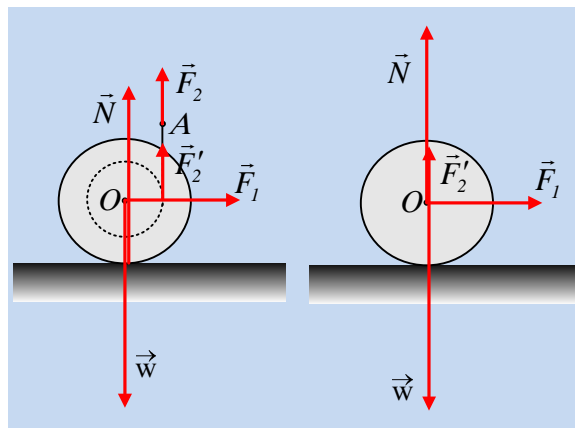
### Σχόλια:

Στα παραπάνω στηριχθήκαμε στην διατήρηση της ενέργειας, αναφερόμενοι στην μεταφορική κίνηση που προκαλείται από την δράση της δύναμης  $F_1$  και στην περιστροφική κίνηση του στερεού που προκαλείται εξαιτίας της δράσης της ροπής, ως προς τον άξονα περιστροφής, της δύναμης  $F_2$ .

Ας δούμε την ίδια εικόνα, από μια άλλη οπτική γωνία.

i) Το σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση. Πώς μελετάμε μια τέτοια κίνηση; Στην πραγματικότητα «δεν βλέπουμε» κανένα στερεό να μεταφέρεται, απλά μελετάμε την κίνηση του κέντρου μάζας, θεωρώντας το στερεό υλικό σημείο. Όπως ακριβώς μελετήσαμε την κίνηση του τραίνου στην Α' Λυκείου.

Στο αριστερό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό, ενώ στο δεξιό, τις δυνάμεις όπως σχεδιάζονται **στο υλικό σημείο O**, μάζας  $M$ .



Αλλά τότε για το υλικό σημείο O (κέντρο μάζας) θα ισχύουν, όλα όσα ισχύουν για το υλικό σημείο και προφανώς το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w + W_N + W_{F_1} + W_{F_2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} M v_{cm}^2 - 0 = 0 + 0 + F_1 \cdot x + 0 \rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{2F_1 x}{M}} = 2 \text{ m/s}$$

Αφού το βάρος, η κάθετη αντίδραση  $N$  και η  $F_2$  δεν παράγουν έργο επειδή είναι κάθετες στη μετατόπιση.

ii) Το σώμα εκτελεί (μόνο) στροφική κίνηση γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας

Ο του στερεού Σ. Στο αριστερό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό, όπου  $F_2$  η δύναμη που ασκείται στο στερεό μας, μέσω του νήματος, ίσου μέτρου με την δύναμη που εμείς ασκούμε στο άκρο Α.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη στροφική κίνηση του στερεού παίρνουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\tau\omega} + W_{\tau N} + W_{\tau F1} + W_{\tau F'2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = 0 + 0 + 0 + (F_2 r) \cdot \theta \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = F_2 \cdot (r \cdot \theta) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = F_2 \cdot \Delta\ell = F_2 y \rightarrow$$

$$\omega = 2,5 \text{ rad / s}$$

[dmargaris@sch.gr](mailto:dmargaris@sch.gr)