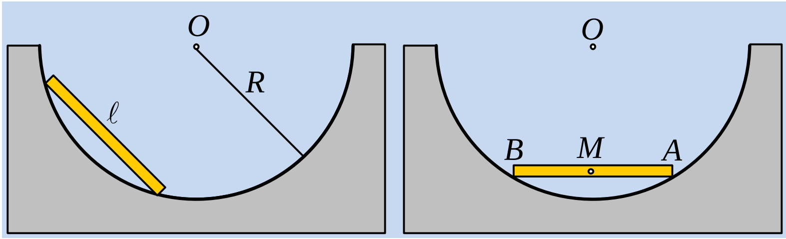
Μια σανίδα σε ημικυκλική τροχιά.

Μια ομογενής σανίδα μήκους 1m και μάζας 2kg, αφήνεται να κινηθεί από μια ορισμένη θέση ενός λείου κοίλου ημισφαιρίου, κατά μήκος της ημικυκλικής τροχιάς του σχήματος, κέντρου Ο και ακτίνας R=1m. Μετά από λίγο, η σανίδα γίνεται οριζόντια (δεξιό σχήμα). Τη στιγμή αυτή τα άκρα της Α και Β έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου υ=2m/s.



Για την οριζόντια αυτή θέση ζητούνται:

i) Η ταχύτητα του μέσου Μ της σανίδας.

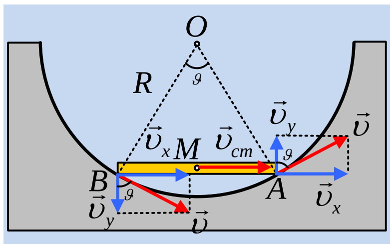
ii) Η κινητική της ενέργεια.

iii) Η στροφορμή της σανίδας, ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που περνά από το κέντρο Ο της τροχιάς.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς κάθετο άξονα, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm}= M\ell^2/12$

Απάντηση:

i) Η κίνηση της σανίδας, μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθετη αποτελούμενη από μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και μια στροφική γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζα Μ (το μέσον της σανίδας).



Οι ταχύτητες των δύο άκρων που εφάπτονται στο ημικύκλιο, είναι εφαπτόμενες στην κυκλική τροχιά, όπως στο διπλανό σχήμα. Αναλύουμε τις ταχύτητες, σε συνιστώσες παράλληλες και κάθετες στη σανίδα, όπως στο σχήμα, όπου η γωνία θ=60° (το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές), οπότε:

$$\upsilon_x=\upsilon\cdot\eta\mu\theta=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m/s=\sqrt{3}m/s \text{ και } \upsilon_y=\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=2\cdot ½\ m/s=1m/s.$$

Αλλά αφού οι συνιστώσες υ_y, κάθετες στην σανίδα, για τα δυο άκρα της είναι ίσου μέτρου, αντιστοιχούν στις γραμμικές τους ταχύτητες, εξαιτίας της στροφικής κίνησης της σανίδας, δηλαδή:

$$\upsilon_y=\omega\cdot\frac{\ell}{2}\rightarrow$$

$$\omega=\frac{2\upsilon_y}{\ell}=\frac{2\cdot 1}{1}rad/s=2rad/s$$

Ενώ η συνιστώσα υ_x είναι κοινή για όλα τα σημεία της σανίδας και αντιστοιχεί στην ταχύτητα υ_{cm} για την μεταφορική της κίνηση:

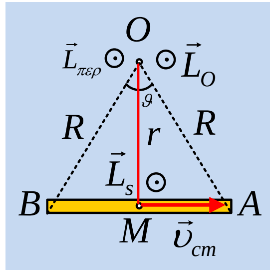
$$\upsilon_{cm}=\upsilon_x=\sqrt{3}m/s$$

ii) Η κινητική ενέργεια της σανίδας είναι:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega^2\rightarrow$$

$$K=\frac{1}{2}2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2J+\frac{1}{24}2\cdot1^2\cdot2^2J=\frac{10}{3}J$$

iii) Η στροφορμή της σανίδας ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο Ο της τροχιάς, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας είναι:



$$\vec{L}=\vec{L}_s+\vec{L}_{\pi\varepsilon\rho}\rightarrow$$

$$L_O=I_{cm}\omega+m\upsilon_{cm}r$$

Όπου $r=(OM)=\sqrt{R^2-\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}m=\frac{\sqrt{3}}{2}m$, οπότε:

$$L_O=\frac{1}{12}m\ell^2\cdot\omega+m\upsilon_{cm}r\rightarrow$$

$$L_O=\frac{1}{12}2\cdot1^2\cdot2kgm^2/s+2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}kgm^2/s=\frac{10}{3}kgm^2/s$$

Με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και φορά προς τον αναγνώστη.

dmargaris@sch.gr