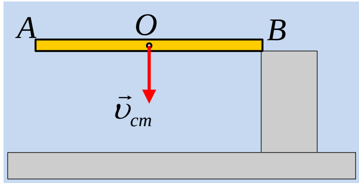
Μια ράβδος συγκρούεται με ένα σκαλοπάτι.



Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ και μάζας Μ πέφτει ελεύθερα και σε μια στιγμή το άκρο της Β κτυπά στην πάνω πλευρά ενός λείου σκαλοπατιού. Ελάχιστα πριν την κρούση, το κέντρο μάζας Ο της ράβδου έχει κατακόρυφη ταχύτητα υ_{cm}=2m/s, ενώ το άκρο Α έχει μηδενική ταχύτητα.

i) Ποια η ταχύτητα του άκρου Β της ράβδου ελάχιστα πριν την κρούση;

ii) Κατά τη διάρκεια της κρούσης της ράβδου με το σκαλοπάτι:

α) Η δύναμη που ασκήθηκε στη ράβδο από το σκαλοπάτι, είναι κατακόρυφη.

β) Η ορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.

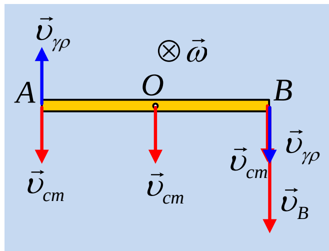
γ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.

δ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή ως προς κατάλληλα επιλεγμένο σημείο.

iii) Αν το άκρο Β, αμέσως μετά την κρούση, έχει κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα πάνω μέτρου 1m/s, ενώ το άκρο Α κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα κάτω μέτρου 3m/s, να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή όχι.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της I=$\frac{1}{12}M\ell^2$.

Απάντηση:



i) Αφού το άκρο της ράβδου Α, δεν έχει την ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο, η κίνηση της ράβδου είναι σύνθετη, την οποία μπορούμε να μελετήσουμε ως μια μεταφορική με ταχύτητα ίση με υ_{cm} και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον Ο, με γωνιακή ταχύτητα ω, όπως στο σχήμα.

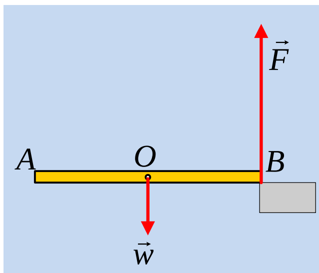
Αλλά τότε για την ταχύτητα του άκρου Α ισχύει:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \rightarrow$$

$$\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}=2m/s \rightarrow$$

$$\omega\frac{\ell}{2}=\upsilon_{cm} \rightarrow \omega\ell = 2\upsilon_{cm} = 4m/s$$

Αλλά τότε το άκρο Β έχει ταχύτητα $\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}$=4m/s, κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω.



ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στη διάρκεια της κρούσης, όπου **F** η δύναμη από το σκαλοπάτι, κάθετη στο λείο σκαλοπάτι, συνεπώς κατακόρυφη (ακόμη και αν το επίπεδο δεν ήταν λείο η δύναμη θα ήταν κατακόρυφη, αφού η ταχύτητα του άκρου Α είναι κατακόρυφη!). Αλλά τότε στη ράβδο ασκούνται δυνάμεις που μεταβάλουν και την ορμή της και τη στροφορμή της, ως προς οποιοδήποτε σημείο και αν την υπολογίσουμε. Έτσι έχουμε:

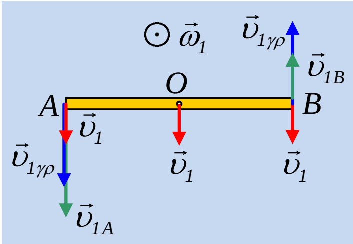
α) Η δύναμη που ασκήθηκε στη ράβδο από το σκαλοπάτι, είναι κατακόρυφη. **Σ.**

β) Η ορμή της ράβδου παραμένει σταθερή. **Λ.**

γ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή. **Λ.**

δ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή ως προς κατάλληλα επιλεγμένο σημείο. **Λ.**

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες των άκρων Α και Β της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. Αφού το άκρο Α έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Β θα πρέπει η ταχύτητα κέντρου μάζας και η γραμμική ταχύτητα εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης της ράβδου, να έχουν την ίδια φορά, αλλά τότε η ταχύτητα κέντρου μάζας, έστω **υ₁** και η γωνιακή ταχύτητα **ω₁** θα είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας $υ_1$ θα είναι κατακόρυφη αφού οι δυνάμεις που ασκήθηκαν στη ράβδο στη διάρκεια της κρούσης είναι κατακόρυφες, όπως και η ταχύτητα $υ_{cm}$ πριν την κρούση.



Αλλά τότε:

$$\upsilon_{1A}=\upsilon_1+\omega_1\frac{\ell}{2} \quad και \quad \upsilon_{1B}=\omega_1\frac{\ell}{2}-\upsilon_1$$

και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\omega_1\ell=\upsilon_{1A}+\upsilon_{1B}=4m/s=2\upsilon_{cm}$$

οπότε και $\upsilon_1=\upsilon_{1A}-\omega_1\frac{\ell}{2}=3m/s\text{-}2m/s=1m/=\frac{1}{2}\upsilon_{cm}$.

Η αρχική κινητική ενέργεια της ράβδου ήταν:

$$K_{\pi\rho}=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}M\ell^2\omega^2=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{24}M(2\upsilon_{cm})^2\rightarrow$$

$$K_{\pi\rho}=\frac{2}{3}M\upsilon_{cm}^2 \quad (1)$$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι ίση:

$$K_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2=\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}M\ell^2\omega_1^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{1}{2}\upsilon_{cm}\right)^2+\frac{1}{24}M(2\upsilon_{cm})^2\rightarrow$$

$$K_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{7}{24}M\upsilon_{cm}^2 \quad (2)$$

Προφανώς από (1) και (2) $K_{μετ}<K_{αρχ}$ και κατά συνέπεια η κρούση είναι ανελαστική.

dmargaris@sch.gr