# Μια κινούμενη τροχαλία.

|  |
| --- |
|  |

Γύρω από μια τροχαλία μάζας Μ=0,8kg έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου έχουμε δέσει ένα σώμα Σ μάζας m=0,1kg. Συγκρατούμε τα δυο σώματα με τα χέρια μας, ώστε το νήμα να είναι τεντωμένο (χωρίς να ασκεί δυνάμεις στα σώματα) και σε μια στιγμή t0=0, αφήνουμε το σώμα Σ να κινηθεί, ενώ συγκρατούμε σταθερή την τροχαλία. Τη στιγμή t1=1s αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή F2=11Ν, μέχρι τη στιγμή t2 που η τροχαλία αποκτά ταχύτητα υ2=1m/s.

i) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης την οποία ασκούσαμε στην τροχαλία από 0-t1.

ii) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t2.

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος Σ σε συνάρτηση με το χρόνο από 0-t2.

iv) Ποιες ενεργειακές μεταβολές εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα Δt=t2-t1; Πώς συνδέονται οι μεταβολές αυτές με τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα;

Για την τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της Ι= ½ ΜR2, ενώ g=10m/s2.

***Απάντηση:***

|  |
| --- |
|  |

1. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου αφού το νήμα είναι αβαρές Τ΄=Τ και  η δύναμη που ασκούμε στον άξονα της τροχαλίας. Από 0-t1 συγκρατούμε την τροχαλία, το νήμα ξετυλίγεται και το σώμα Σ κατέρχεται. Παίρνοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε:

Σώμα Σ: ΣF=m∙α → mg-Τ=m∙α (1)

Τροχαλία: *Στ=Ι∙αγων → Τ΄∙R= ½ ΜR2∙αγων → Τ= ½ ΜRαγων* (2)

Αλλά το σώμα Σ έχει κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα με κάθε σημείο του νήματος, συνεπώς και με το σημείο Α του νήματος το οποίο έρχεται σε επαφή με την τροχαλία:

 (3)

Οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) λαμβάνοντας υπόψη μας και την σχέση (3), παίρνουμε:



Αλλά τότε από την ισορροπία της τροχαλίας, όσον αφορά τη μεταφορική της κίνηση, θα έχουμε:

*F=w+Τ΄=Μg+ ½ Μ∙α=0,8∙10Ν+ ½ ∙0,8∙2Ν=8,8Ν*

1. Μόλις αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης κατακόρυφης δύναμης F, η τροχαλία θα επιταχυνθεί προς τα πάνω και έστω ότι το σώμα Σ συνεχίζει να επιταχύνεται προς τα κάτω. Δουλεύοντας με τα μέτρα των μεγεθών, θα έχουμε:

Τροχαλία: Μεταφορική κίνηση: *ΣFy=Μ∙αcm → F-Μg-Τ΄=Μ∙αcm* (4)

 Στροφική κίνηση: *Στ=Ι∙αγων → Τ΄∙R= ½ ΜR2∙αγων → Τ΄= ½ ΜR∙αγων* (5)

 Σώμα Σ: *ΣF=m∙α1 → mg-Τ=m∙α1* (6)

|  |
| --- |
|  |

Ας έρθουμε τώρα στο σημείο Α, όπου το νήμα εφάπτεται της τροχαλίας. Το σημείο αυτό, σαν σημείο της περιφέρειας της τροχαλίας έχει μια συνιστώσα ταχύτητα ίση με υcm και μια υγρ=ω∙R, όπως στο σχήμα, οπότε η συνολική ταχύτητα, ίση με την ταχύτητα υ1 του σώματος Σ, θα είναι:

*υ1=υγρ-υcm → υ1=ωR-υcm →*

 (7)

Οπότε η (5) γίνεται *Τ΄= ½ ΜR∙αγων* ή *2∙Τ=Μα1+Μαcm* και με αντικατάσταση στις σχέσεις (4) και (6) παίρνουμε:

*1,5Μαcm+0,5mα1=F-Μg*

*0,5Μαcm+(m+0,5Μ)α1=mg*

*α1=0 και αcm=2,5m/s2*

Αλλά τότε για την κίνηση του κέντρου μάζας της τροχαλίας έχουμε:

*υ2=αcm∙Δt* → 

1. Το σώμα Σ, από 0-1s κινείται με σταθερή επιτάχυνση, οπότε αποκτά ταχύτητα υ1=α∙t1=2∙1m/s=2m/s, ενώ στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα και η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



1. Στο χρονικό διάστημα από 1s έως 1,4s, η τροχαλία ανέρχεται κατά:

*y= ½ αcm ∙(Δt)2 = ½ ∙2,5∙0,42m=0,2m*.

Αλλά τότε έχει αυξηθεί η δυναμική της ενέργεια κατά:

*ΔUτρ =Μg∙y=0,8∙10∙0,2J=1,6J.*

Ταυτόχρονα έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα *ω=ω1+ αγων∙Δt*, όπου ω1= ενώ λόγω της σχέσης (7) αγων=αcm/R, οπότε παίρνουμε *ω*= (S.Ι.)

Συνεπώς έχει αποκτήσει και κινητική ενέργεια:

→



Ενώ τη στιγμή t1 είχε κινητική ενέργεια:

*Κt1*=

Έχουμε δηλαδή **αύξηση** της μηχανικής ενέργειας της τροχαλίας κατά:

*ΔΕτρ=ΔU+ΔΚ=1,6J+(2,2J-0,8J)=3J.*

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το σώμα Σ κατεβαίνει κατά y1=υ1∙Δt=2∙0,4m=0,8m.

Αλλά τότε η δυναμική του ενέργεια **μειώνεται** κατά ΔU1=mgy1=0,1∙10∙0,8J=0,8J, ενώ η κινητική του ενέργεια παρέμεινε σταθερή, αφού κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Αν θέλουμε να μιλήσουμε για το σύστημα, προφανώς έχουμε αύξηση της μηχανικής του ενέργειας κατά:

*ΔΕολ=ΔΕτρ+ΔΕΣ=+3J-0,8J=2,2J.*

Τα βάρη των σωμάτων είναι δυνάμεις τα έργα των οποίων εκφράζουν την ενέργεια η οποία μετατρέπεται από δυναμική σε κινητική και αντίστροφα. Το έργο επίσης της τάσης του νήματος, εσωτερική δύναμη, μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο. Έτσι η μόνη δύναμη που μπορεί να μεταβάλλει την μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι η ασκούμενη δύναμη F.

Πράγματι:

*WF=F∙y=11∙0,2J=2,2 J=ΔΕολ.*

|  |
| --- |
|  |

Ας δούμε τώρα λίγο αναλυτικότερα το τι συμβαίνει, με τη βοήθεια των έργων.

Κατά την κίνηση του σώματος Σ, η δυναμική του ενέργεια μειώνεται κατά 0,8J αφού το βάρος παράγει έργο *Ww1=+mgy1= + 0,1∙10∙0,8 J= 0,8J*. Αλλά πάνω του ασκείται και η τάση του νήματος το έργο της οποίας είναι WΤ=-Τ∙y1=-0,8J, πράγμα που σημαίνει ότι αφαιρείται ενέργεια 0,8J από το σώμα η οποία μεταφέρεται μέσω του νήματος στην τροχαλία.

Για την μεταφορική κίνηση της τροχαλίας έχουμε:

*WF=F∙y=11∙0,2J=2,2 J, WΤ΄=-Τ∙y=-mg∙y=-0,1∙10∙0,2J=-0,2J και*

*Ww=-Μgy= -0,8∙10∙0,2J= - 1,6J*

Συνεπώς η μεταφορική κινητική της ενέργεια μεταβάλλεται κατά:

*ΔΚ= Κμετ=WF+WΤ΄+Ww=2,2J-0,2J-1,6J=0,4J.*

Κατά την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας αυτή διαγράφει γωνία:

*θ=ω1∙(Δt)+  αγων(Δt)2= *

Οπότε το αντίστοιχο έργο της ροπής που ευθύνεται για την περιστροφή είναι:

→



Ίσο με την αύξηση της κινητικής περιστροφικής ενέργειας της τροχαλίας, αφού:

*ΔΚπερ =→*

*ΔΚπερ=1,8J-0,8J=1J.*

Πόσο είναι το έργο της τάσης του νήματος; Το έργο της τάσης Τ, η οποία ασκείται στο σώμα Σ υπολογίστηκε ίσο με -0,8J, πράγμα που σημαίνει ότι μέσω του νήματος μεταφέρεται ενέργεια 0,8J στην τροχαλία. Ναι, αλλά πώς γίνεται η περιστροφική κινητική ενέργεια να αυξήθηκε κατά 1J και όχι κατά 0,8J; Όταν μελετήσαμε τη μεταφορική κινητική ενέργεια είχαμε βρει ότι WΤ΄=-0,2J, πράγμα που σημαίνει ότι «αφαιρέθηκαν» 0,2J μεταφορικής κινητικής ενέργειας από την τροχαλία, τα οποία προστιθέμενα στα 0,8J της ενέργειας που μεταφέρονται από το σώμα Σ, μας δίνουν τη συνολική περιστροφική κινητική ενέργεια της τροχαλίας.

***Σχόλια:***

|  |
| --- |
|  |

1. Παρατηρώντας το διπλανό σχήμα όπου έχουμε σχεδιάσει τις ταχύτητες του σημείου Α, βλέπουμε ότι η γραμμική ταχύτητα λόγω περιστροφής υγρ > υcm αφού το νήμα κινείται προς τα κάτω. Εδώ θα μπορούσε να προκύψει το **λάθος**, αν κάποιος παραγωγίζοντας υποστηρίξει ότι και αεπ=αγων∙R > αcm, πράγμα το οποίο, όπως αποδείχτηκε παραπάνω δεν ισχύει. Στην άσκηση αυτή βρήκαμε ότι αγων∙R=αcm!

Τι σημαίνει αυτό; Ότι μεταβάλλεται και η υcm και η γωνιακή ταχύτητα οπότε αcm=αγων∙R, αλλά η διαφορά ωR-υcm κάθε στιγμή παραμένει σταθερή!

Ας το δούμε αλλιώς με βάση τα μαθηματικά.

Το ότι ισχύει  δεν σημαίνει ότι υcm=ωR αφού η ολοκλήρωση μας δίνει υcm=ωR+C, όπου C μια σταθερά.

1. Το παραπάνω βρίσκει εφαρμογή και στην κύλιση. Αν ένας τροχός κυλίεται τότε ισχύει ότι αcm=αγων∙R, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Δείτε τι συμβαίνει στα τρία παρακάτω σχήματα.



1. Το σύστημα μελέτης μας ήταν η τροχαλία, το σώμα Σ με το νήμα που τα συνδέει, αλλά και **η Γη**, αρκεί να σκεφτούμε ότι όταν μιλάμε για δυναμική ενέργεια, είναι ενέργεια αλληλεπίδρασης και αναφέρεται στο σύστημα Γη-σώμα και όχι μόνο στο σώμα. Αλλά τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στα διάφορα μέλη του συστήματος μας, μπορούν να χωριστούν σε δυο ομάδες:
2. ***Εσωτερικές δυνάμεις.***

Αυτές είναι τα βάρη (και οι αντιδράσεις τους που ασκούνται στη Γη, η οποία όμως λόγω μεγάλης μάζας θεωρείται ακίνητη, οπότε δεν παράγουν έργα) και οι δυνάμεις που το νήμα ασκεί στα σώματα.

Τα έργα των δυνάμεων αυτών εκφράζουν την ενέργεια που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο ή την ενέργεια που μετατρέπεται από μια μορφή σε άλλη. Στο παράδειγμά μας, το έργο του βάρους της τροχαλίας, εκφράζει την αύξηση της δυναμικής της ενέργειας, ενώ το βάρος του σώματος Σ τη μείωση της δυναμικής του ενέργειας.

Αν δεν υπήρχε το νήμα, το σώμα Σ θα επιταχυνόταν και η μείωση της δυναμικής του ενέργειας θα ήταν ίση με την αύξηση της κινητικής του ενέργειας. Εδώ όμως ασκείται και η τάση του νήματος και η ενέργεια μεταφέρεται από το ένα σώμα (σώμα Σ), στο άλλο (τροχαλία).

Αξίζει να επισημανθεί ότι αν στα σώματα ασκούνται και κάποιες μη συντηρητικές δυνάμεις, όπως η τριβή, τότε θα έχουμε και κάποια ενέργεια που θα υποβαθμίζεται σε θερμική, οπότε θα έχουμε ισόποση μείωση της μηχανικής ενέργειας.

1. ***Εξωτερικές δυνάμεις.***

Στην περίπτωσή μας, η ασκούμενη από εμάς δύναμη F, η οποία μέσω του έργου της μεταφέρει ενέργεια στο σύστημα. Έτσι το έργο της υπολογίστηκε ίσο με 2,2J όση θα είναι και η αύξηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος.

**dmargaris@sch.gr**