Μερικές «αντιφάσεις» στην ελαστική κρούση.

Κατά την μετωπική ελαστική κρούση έχουμε καταλήξει στις σχέσεις:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

Για τις ταχύτητες των δύο υλικών σημείων που συγκρούονται ελαστικά και που το δεύτερο σώμα είναι αρχικά ακίνητο.

Οι τελικές ταχύτητες συνεπώς των δύο σωμάτων, εξαρτώνται καθαρά από τις σχέσεις των μαζών τους.

Αλλά τότε ανάλογα με την σχέση των δύο μαζών, θα έχουμε διαφορετικά «πρακτικά» αποτελέσματα και μερικά από αυτά μπορούν να δημιουργούν «εκπλήξεις»!

Ας ξεκινήσουμε από μια πολύ συχνή περίπτωση:

Παράδειγμα 1ο:

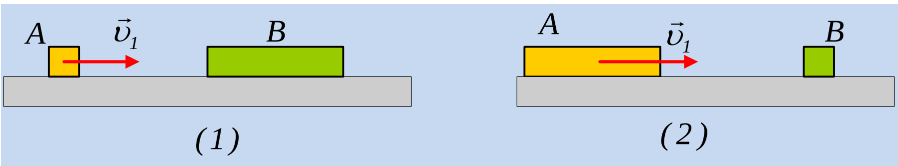
Αν υλικό σημείο Α κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ_1=4m/s και συγκρούεται με δεύτερο ακίνητο υλικό σημείο Β.

Να βρεθούν μετά την κρούση:

i) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων.

ii) Η ορμή κάθε σώματος

iii) Η κινητική του ενέργεια



Στις δυο περιπτώσεις που εμφανίζονται στο παραπάνω σχήμα, όπου στην πρώτη m_1=m και m_2=4m, ενώ στη δεύτερη m_1=4m και m_2=m.

Απάντηση:

Για την (1) περίπτωση, οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν:

i) $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{m-4m}{m+4m}\upsilon_1 = -\frac{3}{5}\upsilon_1$ και $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{2m}{m+4m}\upsilon_1 = \frac{2}{5}\upsilon_1$

ii) Αλλά τότε για την ορμή κάθε σώματος έχουμε:

$$P_1' = m_1\upsilon_1' = -\frac{3}{5}m\upsilon_1 = -\frac{3}{5}P_1 \quad \text{και}$$

$$P_2' = m_2\upsilon_2' = +\frac{2}{5}4m\upsilon_1 = +\frac{8}{5}P_1$$

Προφανώς $\Delta P_1 = -\Delta P_2$. Η απόδειξη αφήνεται για έλεγχο…

iii) Αντίστοιχα για τις κινητικές ενέργειες έχουμε:

$$K_1' = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \frac{1}{2}m\left(-\frac{3}{5}\upsilon_1\right)^2 = \frac{9}{25}\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{9}{25}K_1$$

$$K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}4m\left(\frac{2}{5}\upsilon_1\right)^2 = \frac{16}{25}\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{16}{25}K_1$$

Προφανώς $K_1{'}+K_2{'}= K_{αρχ}$.

Για την (2) περίπτωση αντίστοιχα θα έχουμε:

i) $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{4m - m}{4m + m}\upsilon_1 = +\frac{3}{5}\upsilon_1$ και $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{8m}{4m + m}\upsilon_1 = \frac{8}{5}\upsilon_1$

ii) Αλλά τότε για την ορμή κάθε σώματος έχουμε:

$$P_1' = m_1\upsilon_1' = +4m\frac{3}{5}\upsilon_1 = \frac{3}{5}P_1$$

$$P_2' = m_2\upsilon_2' = +\frac{8}{5}m\upsilon_1 = \frac{2}{5}4m\upsilon_1 = \frac{2}{5}P_1$$

Προφανώς $ΔP_1= - ΔP_2$. Και αυτό … αφήνεται για έλεγχο!

iii) Αντίστοιχα για τις κινητικές ενέργειες έχουμε:

$$K_1' = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \frac{1}{2}4m\left(\frac{3}{5}\upsilon_1\right)^2 = \frac{9}{25}\frac{1}{2}4m\upsilon_1^2 = \frac{9}{25}K_1$$

$$K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{8}{5}\upsilon_1\right)^2 = \frac{16}{25}\frac{1}{2}4m\upsilon_1^2 = \frac{16}{25}K_1$$

Προφανώς $K_1{'}+K_2{'}= K_{αρχ}$.

Μερικά σχόλια:

Αν προσέξουμε τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι κρίσιμο θέμα είναι το πρόσημο της διαφοράς m_1-m_2, που θα καθορίσει το πρόσημο της ταχύτητας του κινούμενου σώματος.

Έτσι αν $m_1<m_2$ τότε η ταχύτητα του Α μετά την κρούση έχει αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική του ταχύτητα (δεν λέμε είναι θετική ή αρνητική πριν αποφασίσουμε ποια κατεύθυνση θα ορίσουμε ως θετική! Σε όλη την παραπάνω επεξεργασία έχουμε δουλέψει με αλγεβρικές τιμές, χωρίς να έχει ορισθεί θετική κατεύθυνση…).

Αν $m_1>m_2$ τότε το Α σώμα συνεχίζει να κινείται προς την ίδια κατεύθυνση.

Βέβαια η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας θα εκφραστεί και στην αντίστοιχη αλγεβρική τιμή της ορμής, όπου στην (1) περίπτωση βρήκαμε ότι:

$$P_1' = -\frac{3}{5}P_1 \text{ και } P_2' = +\frac{8}{5}P_1$$

Δηλαδή το σώμα Α μετέφερε στο Β σώμα, **μεγαλύτερη** ορμή από αυτήν που έχει!!! Ας μην ξεχνάμε όμως στο σημείο αυτό ότι η ορμή είναι διάνυσμα!

Κάτι ανάλογο όμως δεν συμβαίνει με τις κινητικές ενέργειες (μονόμετρο μέγεθος)! Αν το σώμα Α έχει κάποια κινητική ενέργεια, προφανώς δεν μπορεί να μεταφέρει στο Β, μεγαλύτερο ποσό ενέργειας!!!

Παράδειγμα 2ο:

Αν το παραπάνω σώμα Α έχει μάζα m_1= m ενώ το Β m_2= 999m να βρεθούν:

i) Η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος.

ii) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του Α σώματος.

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις ξανά παίρνουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{m - 999m}{m + 999m}\upsilon_1 = -\frac{998}{1.000}\upsilon_1 = -0{,}998\upsilon_1 \approx -\upsilon_1$$

και

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m}{m + 999m}\upsilon_1 = 0{,}002\upsilon_1 \approx 0$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, το πρώτο σώμα επιστρέφει με ταχύτητα **πρακτικά** ίσου μέτρου, ενώ το Β σώμα παραμένει **πρακτικά** ακίνητο. Ας προσέξουμε όμως τι λέμε:

Το Α ουσιαστικά ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου, αλλά όχι **ακριβώς** ίσου!!! Ελαφρώς μικρότερο, αλλά που εμείς το θεωρούμε ίσο! Το Β σώμα μένει πρακτικά ακίνητο; Και όμως κινείται!!! Ωραία, πολύ μικρή ταχύτητα, έχει όμως αποκτήσει ταχύτητα!!!

i) Η μεταβολή της ορμής του Α σώματος θα είναι:

$$\Delta P_2 = P_1' - P_1 = m\upsilon_1' - m\upsilon_1 = -0{,}998m\upsilon_1 - m\upsilon_1 = -1{,}998\,P_1 \approx -2P_1$$

Ενώ του Β σώματος:

$$\Delta P_2 = P_2' - P_2 = P_2' = m_2\upsilon_2' = 999m \cdot 0{,}002\upsilon_1 = +1{,}998P_1 \approx 2P_1.$$

ii) Για τις κινητικές ενέργειες αντίστοιχα θα έχουμε:

$$\Delta K_1 = K_1' - K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1\left((0{,}998\upsilon_1)^2 - \upsilon_1^2\right) \approx -0{,}004K_1$$

$$\Delta K_2 = K_2' - K_2 = K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}998m_1(0{,}002\upsilon_1)^2 \approx 0{,}004K_1 \approx 0 \;??*$$

Και μερικά σχόλια:

Τι ακριβώς βρήκαμε;

«Όταν ένα μικρό σώμα Α συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο, πολύ μεγάλης μάζας, τότε το σώμα Α ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου, ενώ το Β παραμένει ακίνητο».

Αυτό σε γλώσσα μαθηματικών επιβάλλει τη χρήση ορίων, όπου τα πράγματα εμφανίζονται ξεκάθαρα:

- Αν $m_1 \to 0$ και m_2=C , τότε έχουμε:

$$\upsilon_1' = \lim_{m_1 \to 0} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{-m_2}{m_2}\upsilon_1 = -\upsilon_1 \text{ και } \upsilon_2' = \lim_{m_1 \to 0} \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m_1}{m_2}\upsilon_1 = 0$$

- Αλλά και αν m_1=C και $m_2 \to \infty$ έχουμε επίσης:

$$\upsilon_1' = \lim_{m_2 \to \infty} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{-m_2}{m_2}\upsilon_1 = -\upsilon_1 \text{ και } \upsilon_2' = \lim_{m_2 \to \infty} \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m_1}{m_2}\upsilon_1 = 0$$

Και βέβαια, τώρα θα μπορούσαμε να καταλάβουμε τι σημαίνει το «αυθαίρετο» που προηγούμενα γράψαμε:

$$K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}998m_1(0{,}002\upsilon_1)^2 \approx 0{,}004K_1 \approx 0$$

Αφού κάποιος δικαιούται να πει, μα αν K_1=1.000J, τότε K_2'=4J, γιατί βάζεις ότι είναι περίπου μηδέν;

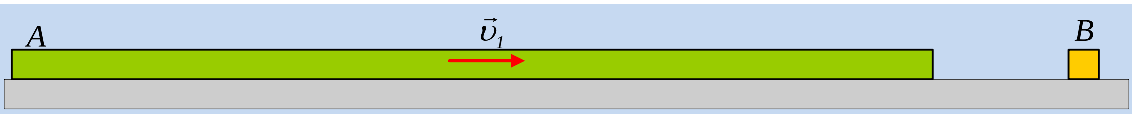
Το μηδέν στην παραπάνω περίπτωση σημαίνει ότι το σώμα Β θα αποκτήσει αμελητέα κινητική ενέργεια, σε σχέση με την αρχική κινητική ενέργεια του κινούμενου σώματος Α.

Αλλά ενώ το αρχικά ακίνητο σώμα Β, αποκτά πρακτικά μηδενική ταχύτητα και μηδενική κινητική ενέργεια, απέκτησε διπλάσια ορμή από αυτήν που είχε το αρχικά κινούμενο σώμα Α!!!

Αυτή είναι άλλωστε και η μέγιστη ορμή που μπορεί να αποκτήσει το ακίνητο σώμα Β. Στην περίπτωση που πρακτικά μένει ακίνητο!!!

Παράδειγμα 3^ο:

Αν το παραπάνω σώμα Α έχει μάζα m_1=999m ενώ το Β m_2= m να βρεθούν:



i) Η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος.

ii) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του Α σώματος.

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις ξανά παίρνουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{999m - m}{999m + m}\upsilon_1 = \frac{998}{1.000}\upsilon_1 = 0{,}998\upsilon_1 \approx \upsilon_1$$

και

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2 \cdot 999m}{m + 999m}\upsilon_1 = 1{,}998\upsilon_1 \approx 2\upsilon_1$$

Δηλαδή το Α σώμα συνεχίζει σχεδόν με την ίδια ταχύτητα, ενώ το Β αποκτά σχεδόν διπλάσια ταχύτητα.

i) Η μεταβολή της ορμής του Α σώματος θα είναι:

$$\Delta P_1 = P_1' - P_1 = m\upsilon_1' - m\upsilon_1 = 0{,}998m\upsilon_1 - m\upsilon_1 = -0{,}002\ P_1 \approx 0$$

Ενώ του Β σώματος:

$$\Delta P_2=P_2{}'-P_2=P_2{}'=m_2\upsilon_2{}'=m\cdot 2\upsilon_1=+0,002P_1\approx 0.$$

ii) Για τις κινητικές ενέργειες αντίστοιχα θα έχουμε:

$$\Delta K_1=K_1{}'-K_1=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2=\frac{1}{2}m_1\left(\upsilon_1{}'^2-\upsilon_1^2\right)\approx 0$$

$$\Delta K_2=K_2{}'-K_2=K_2{}'=\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2=\frac{1}{2}m(2\upsilon_1)^2=\frac{4}{999}\frac{1}{2}999m\upsilon_1^2\approx 0,004K_1\approx 0$$

Και μερικά ακόμη σχόλια:

Στην περίπτωση που το κινούμενο σώμα Α έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από το ακίνητο, τότε το σώμα Α συνεχίζει να κινείται, σχεδόν σαν να μην συνέβη τίποτα!!! Με σχεδόν την ίδια ταχύτητα, την ίδια ορμή και σχεδόν την ίδια κινητική ενέργεια.

Αλλά, παρόλα αυτά, το μικρό σώμα εκτινάσσεται με μέγιστη ταχύτητα, διπλάσια του κινούμενου σώματος. Όμως ενώ η ταχύτητά του είναι μέγιστη, η ορμή του είναι πάρα πολύ μικρή, οπότε μπορούμε να την αγνοούμε, αφού είναι περίπου μηδέν, όπως επίσης με «σχεδόν» μηδενική κινητική ενέργεια.

Μπορούμε όλα αυτά να τα διατυπώσουμε με πιο ακριβή γλώσσα. Στη γλώσσα των μαθηματικών επιβάλλεται η χρήση ορίων, όπου τα πράγματα εμφανίζονται ξεκάθαρα:

- Αν $m_2 \to 0$ και $m_1=C$, τότε έχουμε:

$$\upsilon_1{}'=\lim_{m_2\to 0}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=\frac{m_1}{m_1}\upsilon_1=\upsilon_1 \text{ και } \upsilon_2{}'=\lim_{m_2\to 0}\frac{2m_1}{m_1}\upsilon_1=2\upsilon_1$$

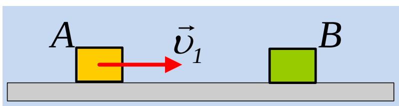
- Αλλά και αν $m_1 \to \infty$ ενώ $m_2=C$ έχουμε επίσης:

$$\upsilon_1{}'=\lim_{m1\to\infty}\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=\frac{m_1}{m_1}\upsilon_1=\upsilon_1 \text{και } \upsilon_2{}'=\lim_{m_1\to\infty}\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1=\frac{2m_1}{m_2}\upsilon_1=2\upsilon_1$$

Προφανώς και στην περίπτωση αυτή, όταν λέμε «μηδενική» ορμή ή ενέργεια εννοούμε ότι έχουν πολύ μικρότερη τιμή, σε σχέση με τις αρχικές τιμές της ορμής και της κινητικής ενέργειας του σώματος Α.

Παράδειγμα 4^ο^:

Και αν πάμε στην ενδιάμεση κατάσταση, όπου τα σώματα έχουν ίσες μάζες;



Απάντηση:

Εφαρμόζοντας και πάλι τις αρχικές σχέσεις παίρνουμε:

$$\upsilon_1{}'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=\frac{m-m}{m+m}\upsilon_1=0$$

και

$$\upsilon_2{}' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 = \frac{2\cdot m}{m+m}\upsilon_1 = \upsilon_1$$

Δηλαδή τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες, οπότε αν μιλήσουμε για ορμές:

$$\Delta P_1 = P_1{}' - P_1 = 0 - m\upsilon_1 = -P_1$$

Ενώ του Β σώματος:

$$\Delta P_2 = P_2{}' - P_2 = P_2{}' = m_2\upsilon_2{}' = m\cdot\upsilon_1 = +P_1 .$$

i) Για τις κινητικές ενέργειες αντίστοιχα θα έχουμε:

$$\Delta K_1 = K_1{}' - K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = -\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = -K_1$$

$$\Delta K_2 = K_2{}' - K_2 = K_2{}' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = K_1$$

Με άλλα λόγια το αρχικά ακίνητο σώμα Β, αποκτά ΟΛΗ την κινητική ενέργεια του Α σώματος, αποκτά δηλαδή τη **μέγιστη** κινητική ενέργεια που θα μπορούσε να αποκτήσει. Αλλά προσοχή! Αυτό δεν σημαίνει ούτε μέγιστη ταχύτητα, ούτε μέγιστη ορμή. Μόνο μέγιστη κινητική ενέργεια.

Ας συγκεντρώσουμε τα συμπεράσματα:

Σχέση μαζών	$\upsilon_2{}'$	$P_2{}'$	K_2
$m_1 <<< m_2$	0	$2P_1$ *Μέγιστη*	0
$m_1 = m_2$	υ_1	P_1	K_1 *Μέγιστη*
$m_1 >>> m_2$	$2\upsilon_1$ *Μέγιστη*	0	0

dmargaris@sch.gr